Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 35 (1962)
Heft: I

Artikel: Über die Matrixelemente des Translationsoperators
Autor: Jost, R. / Hepp, K.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113266

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Matrixelemente des Translationsoperators

von **R. Jost***) und **K. Hepp***)
Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris

(6. XI. 1961)

Summary: The matrix elements of the translation operator $T(a)$ in a Wightman field theory are analyzed. If the vectors Φ and Ψ are chosen from a certain dense set D in Hilbert space, it is shown that

$$(\Phi, T(a)\ \Psi) - (\Phi, \Omega)\ (\Omega, \Psi) \equiv t_1\ (a)$$

is a C^∞ function, which decreases in the side-cone $\mathfrak{C} = \{a\colon (a, a) < 0\}$ faster than $|(a, a)|^{-N/2}$ for any integer $N > 0$. The connection of this result with a theorem of H. ARAKI is discussed.

§ 1. Einleitung

Die axiomatische Feldtheorie von A. S. WIGHTMAN[1][2]) hat es gestattet, einige grundlegende Fragen aus der Theorie der quantisierten Felder entweder abzuklären oder wenigstens scharf zu formulieren. Zu den geklärten Fragen gehört das Problem über den Zusammenhang von Vertauschungsrelationen und geometrischem Charakter der Felder. Letzthin gelang es G. F. DELL'ANTONIO[3][13]) auf Grund eines Satzes von H. ARAKI[4][5]), den – vorläufig – letzten Baustein zur Lösung dieses Problems beizubringen. Dieses führt uns dazu, den Satz von H. ARAKI, der auch in anderem Zusammenhang («Cluster»-Eigenschaft der Wightmandistributionen nach R. HAAG[6])) eine wichtige Rolle spielt, erneut zu diskutieren und von einer etwas anderen Seite zu beleuchten. Als typisches Hilfsmittel verwenden wir dabei die Spektralzerlegung des Translationsoperators.

Die vorliegende Untersuchung macht keinen Anspruch auf besondere Originalität. Wir sind im Gegenteil überzeugt, dass die meist elementaren Überlegungen auch von anderer Seite bis zu einem gewissen und vielleicht bedeutenden Grade durchgeführt worden sind. Wir denken hier besonders an A. S. WIGHTMAN und die Princetoner Schule. Es lag uns aber daran zu zeigen, wie weit man bei der konsequenten Handhabung einfacher Hilfsmittel etwa gelangen kann.

---

*) Permanente Adresse: Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.

§ 2. Grundlagen

Die Wightmanschen Axiome einer neutralen skalaren Feldtheorie[2]) werden in der folgenden Form und im folgenden Umfang vorausgesetzt:

0. Axiom: Der Raum der Zustände ist ein Hilbertraum $\mathfrak{H}$ mit Elementen $\Phi, \Psi, \ldots$ und dem positiven, hermiteschen Skalarprodukt (Φ, Ψ).

1. Axiom: Die Testfunktionen $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{D}(R^4)$[10]) über dem 4-dimensionalen Punktraum R^4 mit den Elementen $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ werden auf lineare Operatoren $A(\varphi)$ des Hilbertraumes abgebildet. $A(\varphi)$ ist dabei in einer dichten Menge $D \subset \mathfrak{H}$ definiert und ordnet zwei Vektoren $\Phi_1, \Phi_2 \in D$ eine Distribution $(\Phi_1, A(\varphi)\, \Phi_2) = (A(\bar{\varphi})\, \Phi_1, \Phi_2)$ zu. Schliesslich gilt $A(\varphi)\, D \subset D$.

Bemerkungen: a) Für $A(\varphi)$ werden wir auch $\langle A, \varphi \rangle$ oder $\int A(x)\, \varphi(x)\, d^4x$ schreiben.

b) Wir brauchen nicht vorauszusetzen, dass $(\Phi_1, A(\varphi)\, \Phi_2)$ eine temperierte Distribution ist.

2. Axiom: Es existiert eine stetige, unitäre Darstellung der Einskomponente der inhomogenen Lorentzgruppe $\{ (a, \Lambda) \}$, die mit $U(a, \Lambda)$ bezeichnet sei und die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $$U(a, \Lambda)\, A(\varphi)\, U^{-1}(a, \Lambda) = A(\varphi_{(a, \Lambda)}) \,,$$

mit $$\varphi_{(a, \Lambda)}(x) \equiv \varphi\left(\Lambda^{-1}(x - a)\right). \tag{1}$$

2. $$U(a, \Lambda)\, D \subset D \,.$$

Bevor wir zum 3. Axiom übergehen, müssen wir etwas ausgreifen. Sei $T(a) \equiv U(a, 1)$ die unitäre, stetige Darstellung der Translationen. Als Darstellung einer «lokalkompakten abelschen Gruppe» erlaubt dann $T(a)$ eine Spektralzerlegung[7])[8])[9]):

$$T(a) = \int e^{i(p, a)}\, dE(p) \,, \tag{2}$$

wobei $(p, a) = p^0 a^0 - \vec{p} \cdot \vec{a}$ ist und p im Impulsraum (d. h. im Dualraum von R^4) variiert. E ist ein eindeutig bestimmtes, projektionswertiges Mass, das jeder Borelmenge Δ eine Projektion $E(\Delta) = E(\Delta)^2 = E(\Delta)^*$ in wohlbestimmter und als bekannt vorausgesetzter Weise zuordnet. Über den Träger dieses Masses macht das 3. Axiom eine Aussage:

3. *Axiom:* Der Träger von E enthält den isolierten Punkt $\{p = 0\}$ und ist im übrigen in

$$V_+^M \equiv \{p : p^0 > 0 \,,\ (p, p) > M^2 > 0\}$$

enthalten. Die Projektion $E_\Omega = E(\Delta_0)$, wobei Δ_0 den Punkt $\{p = 0\}$ enthält aber $\Delta_0 \cap V_+^M = \phi$ ist, ist eindimensional und projiziert auf den Vakuumzustand Ω. Es gilt $\Omega \in D$.

4. Axiom: Bezüglich der sukzessiven Anwendung von Operatoren $A(\varphi)$ auf Ω ist Ω zyklisch.

Das Lokalitätsaxiom brauchen wir im folgenden nicht. Dagegen brauchen wir einige Elemente aus der Entwicklung der Theorie. Zunächst existieren nach Voraussetzung die Grössen

$$\mathfrak{W}_n(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) \equiv (\Omega, A(\varphi_1)\, A(\varphi_2) \cdots A(\varphi_n)\, \Omega) \tag{3}$$

und sind Distributionen in den einzelnen Funktionen φ_k. Nach dem théorème nucléaire von L. SCHWARTZ[11]) ist durch $\mathfrak{W}_n(\varphi_1, \ldots \varphi_n)$ eindeutig eine Distribution $\mathfrak{W}_n(\varphi)$ mit $\varphi \in \mathfrak{D}(R^{4n})$ bestimmt. Diese Tatsache erlaubt es, Zustände zu definieren, die wie folgt beschrieben werden können:

$$\Phi_n(\varphi) \equiv \langle A^n, \varphi \rangle\, \Omega = \int d^{4n}x\, \varphi(x_1, \cdots x_n)\, A(x_1) \cdots A(x_n)\, \Omega\,. \tag{4}$$

In der Tat ist $\Phi_n(\chi)$ definiert, falls χ von der Form

$$\chi(x_1, \cdots x_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k)$$

ist. Durch lineare Fortsetzung gemäss

$$\begin{aligned} \Phi\,(\chi_1 + \chi_2) &= \Phi(\chi_1) + \Phi(\chi_2)\,, \\ \Phi(c\,\chi) &= c \cdot \Phi(\chi) \end{aligned} \tag{5}$$

wird dann die Definition auf $\mathfrak{D}^{\otimes n}(R^4)$ ausgedehnt. $\mathfrak{D}^{\otimes n}(R^4)$ ist aber dicht in $\mathfrak{D}(R^{4n})$. Sei also eine Folge χ_k gegen φ konvergent, dann gilt

$$\|\Phi_n\,(\chi_k - \chi_l)\|^2 = \mathfrak{W}_{2n}\,(\overleftarrow{(\chi_k - \chi_l)}\,(\chi_k - \chi_l))\,, \tag{6}$$

wobei generell $\overleftarrow{\psi}(x_1, \ldots x_n) \equiv \overline{\psi}(x_n, \ldots x_1)$ gesetzt ist. Wegen des théorème nucléaire strebt die rechte Seite von (6) gegen Null, falls $k, l \to \infty$. Da $\mathfrak{H}$ vollständig ist, existiert damit

$$\lim_{k \to \infty} \Phi_n(\chi_k) \equiv \Phi_n(\varphi)\,.$$

$\Phi_n(\varphi)$ ist zudem eine Distribution hinsichtlich der starken Topologie in $\mathfrak{H}$, das heisst

$$\|\Phi_n(\varphi)\|^2 = \mathfrak{W}_{2n}(\overleftarrow{\varphi}\,\varphi) \to 0\,, \tag{7}$$

falls $\varphi \to 0$ in der Topologie von $\mathfrak{D}(R^{4n})$.

Die Entwicklungen erlauben es nun, für D eine Menge anzugeben, auf die wir uns im folgenden beziehen werden:

Festlegung von D: D sei im folgenden immer die lineare Hülle der Vektoren $\Phi_n(\varphi)$, wobei $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $\Phi_0(c) \equiv c\,\Omega$ gesetzt wird.

Satz: Die so festgelegte dichte Menge D in $\mathfrak{H}$ erfüllt alle Bedingungen aus dem 2. und 3. Axiom. Ausserdem sind auf Vektoren aus D die infinitesimalen inhomogenen Lorentztransformationen anwendbar und diese bilden D in sich ab.

Beweis: Es gilt offensichtlich

$$\langle A^m, \psi \rangle \Phi_n(\varphi) = \Phi_{n+m}(\psi\,\varphi) \in D \tag{8}$$

und

$$U(a, \Lambda)\,\Phi_n(\varphi) = \Phi_n(\varphi_{(a,\Lambda)}) \in D\,. \tag{9}$$

Nun sei $T(\tau a_0)$ eine einparametrige stetige Untergruppe von $\{T(a)\}$ und es sei $\varphi_\tau(x) \equiv \varphi(x - \tau\,a_0)$; schliesslich sei

$$\partial_{\tau_0}\varphi(x) \equiv \frac{d}{d\tau}\,\varphi_\tau(x)\,|_{\tau=0} = -\,a_0^k\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\varphi(x)\,.$$

Dann gilt zunächst in der Topologie von $\mathfrak{D}(R^{4n})$:

$$\lim_{\tau\to 0}\,[\tau^{-1}\,(\varphi_\tau - \varphi) - \partial_{\tau_0}\varphi] = 0\,.$$

Falls wir also

$$\Phi_n^\tau(\varphi) \equiv \Phi_n(\varphi_\tau)$$

setzen, gilt

$$\lim_{\tau\to 0}\,\|\tau^{-1}(\Phi_n^\tau(\varphi) - \Phi_n(\varphi)) - \Phi_n(\partial_{\tau_0}\varphi)\| = 0\,. \tag{10}$$

Man beachte, dass auch dieser Limes in der starken Topologie in $\mathfrak{H}$ existiert. Ausserdem ist $\Phi_n(\partial_{\tau_0}\varphi) \in D$.

Analog schliesst man für eine einparametrige Untergruppe $\Lambda(\sigma)$, wobei diesmal $\varphi_\sigma(x) \equiv \varphi(\Lambda^{-1}(\sigma)x)$ und $\partial_{\sigma_0}\varphi(x) \equiv d/d\sigma\;\varphi_\sigma(x)\,|_{\sigma=0}$ gesetzt wird. Wieder gilt in der Topologie von $\mathfrak{D}(R^{4n})$:

$$\lim_{\sigma\to 0}\,[\sigma^{-1}\,(\varphi_\sigma - \varphi) - \partial_{\sigma_0}\varphi] = 0\,,$$

und daher, mit $\Phi_n^\sigma(\varphi) \equiv \Phi_n(\varphi_\sigma)$:

$$\lim_{\sigma\to 0}\,\|\sigma^{-1}\,(\Phi_n^\sigma(\varphi) - \Phi_n(\varphi)) - \Phi_n(\partial_{\sigma_0}\varphi)\| = 0\,, \qquad \Phi_n(\partial_{\sigma_0}\varphi) \in D\,. \tag{11}$$

In dem so festgelegten Bereich D ist also, um es kurz und salopp auszudrücken, «alles» erlaubt.

§ 3. Das Mass $(\Phi, dE(p)\,\Psi)$

Das projektionswertige Mass E ist durch die Spektralzerlegung

$$T(a) = \int e^{i(p,a)}\, dE(p)$$

eindeutig bestimmt. Da für unsere Zwecke die Bezeichnung mit dem Stieltjesschen Integral nicht passend ist, führen wir eine andere ein, die sich an die Theorie der Distributionen anlehnt. Wir fassen E als stetiges, operatorwertiges, lineares Funktional auf dem Banachraum $\mathfrak{B}$ der stetigen beschränkten Funktionen auf:

$$\langle E, \chi\rangle \equiv \int \chi(p)\, dE(p) \quad \text{für} \quad \chi \in \mathfrak{B}\,. \tag{12}$$

Aus den elementaren Eigenschaften von E folgt dann unmittelbar

$$\|\langle E, \chi\rangle\| \leq \sup |\chi(p)|\,. \tag{13}$$

Dabei steht links die übliche Norm eines Operators O:

$$\|O\| = \sup_{\|\Phi\|=1} \|O\Phi\|\,.$$

Für die Fouriertransformierte gilt in der neuen Bezeichnung die Formel:

$$T(a) = \langle E, e_a\rangle\,, \qquad e_a(p) \equiv e^{i(p,a)}\,. \tag{14}$$

Natürlich ist $e_a \in \mathfrak{B}$.
Die Darstellungsbedingungen

$$T(a)\,T(b) = T\,(a+b) \quad \text{und} \quad U(\Lambda)\,T(a)\,U^{-1}(\Lambda) = T(\Lambda a)\,,$$

wobei $U(\Lambda) = U(0, \Lambda)$ gesetzt ist, reflektieren sich in den Gleichungen

$$T(a)\,\langle E, \chi\rangle = \langle E, \chi_{-a}\rangle$$

und

$$U(\Lambda)\,\langle E, \chi\rangle\,U^{-1}(\Lambda) = \langle E, \chi_{\Lambda^{-1}}\rangle\,. \tag{15}$$

Dabei wurde als Abkürzungen

$$\chi_{-a}(p) \equiv e^{i(p,a)}\,\chi(p)$$

und

$$\chi_{\Lambda^{-1}}(p) \equiv \chi(\Lambda p) \tag{16}$$

verwendet. Da die Abbildungen $\chi \to \chi_{-a}$ und $\chi \to \chi_{\Lambda^{-1}}$ topologische Abbildungen von $\mathfrak{B}$ auf sich sind, können wir durch die Gleichungen

$$\langle E_a, \chi \rangle \equiv \langle E, \chi_{-a} \rangle \tag{17}$$

und

$$\langle E_\Lambda, \chi \rangle \equiv \langle E, \chi_{\Lambda^{-1}} \rangle \tag{18}$$

eindeutig die Grössen E_a und E_Λ definieren.
Dann gilt

$$T(a)\, E = E_a \quad \text{und} \quad U(\Lambda)\, E\, U^{-1}(\Lambda) = E_\Lambda\,.$$

E_Λ ist wieder ein projektionswertiges Mass, was für E_a nicht gilt.

Nach diesen Präliminarien können wir zum eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen übergehen und das komplexe Mass

$$\langle m, \chi \rangle \equiv (\Phi, \langle E, \chi \rangle \Psi) \quad \text{für} \quad \Phi, \Psi \in D \tag{19}$$

betrachten. Dieses Mass ist beschränkt mit der Schranke

$$|\langle m, \chi \rangle| \leq \sup |\chi| \cdot \|\Phi\| \cdot \|\Psi\|\,, \tag{20}$$

welche unmittelbar aus der Schranke für $\langle E, \chi \rangle$ folgt. $\langle m, \chi \rangle$ aber zeigt, dank des besonders gutartigen Charakters der Zustände in D, ein viel reguläres Verhalten als $\langle E, \chi \rangle$. Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst

$$(\Phi, T(a) \langle E, \chi \rangle \Psi) = (\Phi, \langle E, \chi_{-a} \rangle \Psi) = \langle m, \chi_{-a} \rangle\,.$$

Nun gilt gleichzeitig auch

$$\langle m, \chi_{-a} \rangle = \big(T(-a)\, \Phi, \langle E, \chi \rangle \Psi\big)\,,$$

und dieser Ausdruck ist, wie wir in § 2 gesehen haben, beliebig oft nach a ableitbar. Führen wir durch

$$T(a) = \exp i(P, a)$$

oder, gleichbedeutend, durch

$$P_k = \int p_k\, dE(p)$$

den Energie-Impulsoperator ein, dann findet sich durch die erwähnte Ableitung nach a die Gleichung

$$\langle m, \mathfrak{P}\, \chi \rangle = \big(\mathfrak{P}(P)\, \Phi, \langle E, \chi \rangle \Psi\big)\,, \tag{21}$$

wobei $\mathfrak{P}$ links für ein Polynom $\mathfrak{P}(p)$ in den Komponenten von p steht, während rechts dasselbe Polynom mit den Unbestimmten ersetzt durch P, den Energie-Impulsoperator, auftritt.

Der wesentliche Punkt besteht aber darin, dass die rechte Seite wieder ein beschränktes Mass ist:

$$|\langle m, \mathfrak{P}\chi\rangle| \leq \|\mathfrak{P}(P)\Phi\| \cdot \|\Psi\| \cdot \sup|\chi| . \tag{22}$$

So haben wir das

1. Resultat: Für ein beliebiges Polynom $\mathfrak{P}(p)$ ist auch $\mathfrak{P}\, m$ ein beschränktes Mass.

Durch die Betrachtung von

$$(\Phi, U(\Lambda)\langle E, \chi\rangle U^{-1}(\Lambda)\Psi) = \langle m, \chi_{\Lambda^{-1}}\rangle =$$
$$= \langle m_\Lambda, \chi\rangle = (U^{-1}(\Lambda)\Phi, \langle E, \chi\rangle U^{-1}(\Lambda)\Psi)$$

erhalten wir eine zweite Art von Regularitätseigenschaften. Denn für Λ können wir eine einparametrige Gruppe $\Lambda(\sigma)$ substituieren und – wieder nach dem Resultat des zweiten Paragraphen – beliebig oft nach σ differenzieren. Durch einmalige Ableitung entsteht dann, wenn

$$\partial_{kl} \equiv p_k \frac{\partial}{\partial p^l} - p_l \frac{\partial}{\partial p^k}$$

gesetzt wird und M_{kl} die entsprechende infinitesimale Lorentztransformation bedeutet, die Gleichung

$$\langle \partial_{kl}\, m, \chi\rangle = i\,(M_{kl}\Phi, \langle E, \chi\rangle\Psi) - i\,(\Phi, \langle E, \chi\rangle M_{kl}\Psi) .$$

Wieder ist die rechte Seite ein beschränktes Mass; es gilt nämlich:

$$|\langle \partial_{kl}\, m, \chi\rangle| \leq \{\|M_{kl}\Phi\|\,\|\Psi\| + \|\Phi\| \cdot \|M_{kl}\Psi\|\} \sup|\chi| . \tag{23}$$

Wir haben so durch schwache Verallgemeinerung das

2. Resultat: Die Operatoren ∂_{kl} lassen sich beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge auf das Mass m anwenden. Immer entsteht dabei wieder ein beschränktes Mass (das natürlich auf *ganz* $\mathfrak{B}$ definiert und stetig ist). Durch Kombination der beiden Resultate erhalten wir den

Satz 1: Aus dem beschränkten Mass m, das durch

$$\langle m, \chi\rangle = (\Phi, \langle E, \chi\rangle\Psi) , \quad \Phi, \Psi \in D , \tag{24}$$

als stetiges Funktional auf $\mathfrak{B}$ erklärt ist, entsteht durch die folgenden Operationen

(I) Multiplikation mit einer Komponente p_k des Vektors p;

(II) Anwendung einer infinitesimalen Lorentztransformation ∂_{kl}

wieder ein beschränktes Mass, das eine Linearkombination von Massen der Art (24) ist. Die Operationen (I) und (II) lassen sich also beliebig wiederholen.

Es ist für das folgende bequem, das ursprüngliche Mass E in einen trivialen und einen nichttrivialen Teil zu spalten:

$$\langle E, \chi \rangle = \langle E_1, \chi \rangle + \chi(0)\, E_\Omega\,, \tag{25}$$

wobei E_Ω, wie schon erwähnt, die Projektion auf den Zustand Ω darstellt. Der Träger von E_1 ist in V_+^M enthalten. Der obige Satz gilt offensichtlich auch für das Mass

$$\langle m_1, \chi \rangle \equiv (\Phi, \langle E_1, \chi \rangle \Psi)\,.$$

Schliesslich ist es angezeigt, durch passende Koordinaten der Lorentzgruppe Rechnung zu tragen.

Wir führen dazu die in V_+^M völlig reguläre Transformation

$$(p_0, \vec{p}) \leftrightarrow (\mu^2, \vec{p})$$

mit $\mu^2 = (p, p)$ und $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ein. Die dadurch induzierte Transformation

$$\tilde{\chi}(\mu^2, \vec{p}) \equiv \chi\left(\sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}\right) \tag{26}$$

vermittelt die Transformation der Masse

$$\begin{aligned} \langle E_1, \chi \rangle &\equiv \langle \tilde{E}, \tilde{\chi} \rangle\,, \\ \langle m_1, \chi \rangle &\equiv \langle \tilde{m}, \tilde{\chi} \rangle\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Schliesslich bildet sich ∂_{0k} auf $-\,\omega D^k$ ab, wobei

$$\omega \equiv \sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2} \quad \text{und} \quad D^k \equiv \frac{\partial}{\partial p_k} \text{ gesetzt ist.}$$

Aus dem Satz 1 ergibt sich die

Folgerung: Auf das beschränkte Mass $\tilde{m}$ können die folgenden Operationen beliebig oft angewendet werden:

1. Multiplikation mit ω oder p_k.
2. Anwendung von $\omega\, D^l$.

Dabei entsteht immer wieder ein beschränktes Mass.

Nun besitzen wir aber für das Mass $\tilde{m}$ dank der Trägerbedingung

$$\mathrm{Tr}\,\{\tilde{m}\} \subset \{(\mu^2, \vec{p}) : \mu^2 > M^2\} \tag{28}$$

noch die Möglichkeit der Multiplikation mit ω^{-1}, denn ω^{-1} ist mit allen seinen Ableitungen in $Tr\,\{\tilde{m}\}$ beschränkt. Statt $\omega\, D^l$ können wir also

D^l selbst auf $\tilde{m}$ anwenden und erhalten damit wieder ein beschränktes Mass. So erhalten wir den

Satz 2: Seien $\mathfrak{P}_1(\omega, p_1, p_2, p_3)$ und $\mathfrak{P}_2(D^1, D^2, D^3)$ beliebige Polynome in den eingeschriebenen Variablen, und sei ausserdem n eine beliebige natürliche Zahl, dann ist

$$\omega^{-n}\, \mathfrak{P}_1(\omega, p_1, p_2, p_3)\, \mathfrak{P}_2(D^1, D^2, D^3)\, \tilde{m}$$

immer ein beschränktes Mass.

Schliesslich brauchen wir für spätere Zwecke noch eine bessere Einsicht in die Schranke von $(D^k)^N\, \tilde{m}$. Es gilt

$$(D^k)^N = [\omega^{-1}(\omega\, D^k)]^N,$$

und daraus schliesst man, dass $(D^k)^N$ in der Form

$$(D^k)^N = \sum_{r=1}^{N} A_r(\omega, p_k)\, (\omega\, D^k)^r$$

geschrieben werden kann, wobei $A_r(\omega, p_k)$ im Träger von $\tilde{m}$ beschränkt ist:

$$|A_r(\omega, p_k)| < B_r\,.$$

Es ist daher

$$|\langle (D^k)^N\, \tilde{m}, \tilde{\chi}\rangle| = |\sum_{r=1}^{N} \langle (\omega\, D^k)^r\, \tilde{m}, A_r\, \tilde{\chi}\rangle|\,. \tag{29}$$

Ferner gilt für beliebige $\psi \in \mathfrak{B}$:

$$\langle (\omega\, D^k)^r\, \tilde{m}, \tilde{\psi}\rangle = (-1)^r\, \langle \partial^r_{0k}\, m_1, \psi\rangle =$$

$$= i^r \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (-1)^s\, (M^s_{0k}\, \Phi, \langle E_1, \psi\rangle\, M^{r-s}_{0k}\, \Psi)$$

und damit die Abschätzung

$$|\langle (\omega\, D^k)^r\, \tilde{m}, \tilde{\psi}\rangle| \leq \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \|M^s_{0k}\, \Phi\| \cdot \|M^{r-s}_{0k}\, \Psi\|\, \sup|\tilde{\psi}|\,, \tag{30}$$

denn:

$$\sup|\psi| = \sup|\tilde{\psi}|\,.$$

Also ist

$$|\langle (\omega\, D^k)^r\, \tilde{m}, A_r\, \tilde{\chi}\rangle| \leq B_r \sup|\tilde{\chi}| \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \|M^s_{0k}\, \Phi\| \cdot \|M^{r-s}_{0k}\, \Psi\|\,,$$

und $\langle (D^k)^N\, \tilde{m}, \tilde{\chi}\rangle$ wird durch einen Ausdruck folgender Art abgeschätzt:

$$|\langle (D^k)^N \tilde{m}, \tilde{\chi}\rangle| \leq \sup|\tilde{\chi}| \sum_{s \leq r \leq N} B_{r,s} \|M_{0k}^s \Phi\| \cdot \|M_{0k}^{r-s} \Psi\| \equiv$$
$$\equiv C_N^k(\Phi, \Psi) \sup|\tilde{\chi}|, \tag{31}$$

wobei die $B_{r,s}$ wieder Konstanten sind.

Diese Abschätzung gestattet eine Anwendung. Sei Λ_{0k} eine Lorentztransformation in der $(0, k)$-Ebene und $U_{0k} = U(\Lambda_{0k})$ die entsprechende Darstellung. Natürlich gilt $[U_{0k}, M_{0k}] = 0$. Nun bilden wir

$$(U_{0k}\Phi, \langle E_1, \chi\rangle U_{0k}\Psi) = \langle \tilde{m}_{0k}, \tilde{\chi}\rangle;$$

dann gilt unabhängig von U_{0k} wieder

$$|\langle (D^k)^N \tilde{m}_{0k}, \tilde{\chi}\rangle| \leq C_N^k(\Phi, \Psi) \sup|\tilde{\chi}| \tag{32}$$

wegen

$$\|M_{0k}^s U_{0k}\Phi\| = \|U_{0k} M_{0k}^s \Phi\| = \|M_{0k}^s \Phi\|.$$

§ 4. Das Matrixelement $(\Phi, T(a)\Psi)$

Mit der Aufspaltung von E in E_1 und die Projektion auf das Vakuum E_Ω ist eine Aufspaltung des Translationsoperators verbunden:

$$T(a) = \langle E, e_a\rangle = E_\Omega + \langle E_1, e_a\rangle \equiv E_\Omega + T_1(a).$$

Parallel dazu spaltet sich auch das Matrixelement

$$t(a) = (\Phi, T(a)\Psi) = (\Phi, \Omega)(\Omega, \Psi) + t_1(a)$$

in eine Konstante und den Term

$$t_1(a) = (\Phi, T_1(a)\Psi) = \langle m_1, e_a\rangle.$$

Uns interessiert nur $t_1(a)$. Dieses ist offenbar eine C^∞-Funktion von a, von der daher ausschliesslich das asymptotische Verhalten interessiert. Falls a von der Form $(0, \vec{a})$ ist, dann liefert der Satz 2 unmittelbar den

Satz 3: $t_1(0, \vec{a})$ ist eine Testfunktion aus $\mathfrak{S}(R^3)$ ([10]), Bd. II, p. 89ff). Dasselbe gilt für alle Ableitungen nach der Nullkomponenten:

$$\left[\frac{\partial^N}{\partial a_0^N} t_1\right](0, \vec{a}).$$

Den Beweis brauchen wir nicht auszuführen.

Der Satz 3 sagt im besonderen aus, dass für Vektoren der Art $(0, \vec{a})$

$$[-(a, a)]^{N/2} t_1(a) \to 0 \quad \text{für} \quad -(a, a) \to \infty. \tag{33}$$

Natürlich gilt ein ähnliches Resultat auf jeder raumartigen Ebene, aber die Gleichmässigkeit der Konvergenz für verschiedene Ebenen liegt tiefer. Ihr wenden wir uns jetzt zu.

Es sei a beliebig raumartig. Dann existiert eine Raumrotation O, für die $O\,a$ in der (0,1)-Ebene liegt. Λ_{01} sei weiter die Lorentztransformation, die $O\,a$ in die 1-Achse dreht:

$$\Lambda_{01}\, O\, a = \left(0, \sqrt{-(a, a)}, 0, 0\right) \equiv \hat{a}\,.$$

Wir setzen $U(\Lambda_{01}) \equiv U_{01}$ und $U(O) \equiv R$. Dann gilt

$$(\Phi, \langle E_1, e_a\rangle \Psi) = (U_{01}\, R\Phi, \langle E_1, e_{\hat{a}}\rangle\, U_{01}\, R\,\Psi) = \\ = \langle \tilde{m}_\Lambda, e_{\hat{a}}\rangle = t_1(a)\,. \tag{34}$$

Weiter ist

$$\langle (D^1)^N\, \tilde{m}_\Lambda, e_{\hat{a}}\rangle = \left[-i\sqrt{-(a, a)}\right]^N \langle \tilde{m}_\Lambda, e_{\hat{a}}\rangle$$

und daher mit der Abschätzung vom Ende des letzten Paragraphen:

$$|(a, a)|^{N/2}\, |t_1(a)| = |(a, a)|^{N/2}\, |\langle \tilde{m}_\Lambda, e_{\hat{a}}\rangle| \leq C_N^1(R\Phi, R\,\Psi)\,,$$

denn bei den ursprünglichen Argumenten $U_{01}\, R\Phi$, $U_{01}\, R\,\Psi$ von C_N^1 können wir die Transformation U_{01} weglassen. Schreiben wir die rechte Seite der Ungleichung aus, so erhalten wir

$$|(a, a)|^{N/2}\, |t_1(a)| \leq \sum_{s \leq r \leq N} B_{r,s} \| M_{01}^s\, R\Phi\| \cdot \| M_{01}^{r-s}\, R\,\Psi\|\,. \tag{35}$$

Die rechte Seite ist stetig auf der 3-dimensionalen Rotationsgruppe und kann daher unabhängig von R majorisiert werden. Es existiert also ein Funktional $K_N(\Phi, \Psi)$ von Φ und Ψ allein, derart dass

$$|(a, a)|^{N/2} \cdot |t_1(a)| \leq K_N(\Phi, \Psi)$$

falls

$$(a, a) < 0.$$

Wir haben so den

Satz 4: Falls Φ und Ψ Elemente von D sind, dann erfüllt

$$t_1(a) = (\Phi, T(a)\,\Psi) - (\Phi, \Omega)\,(\Omega, \Psi)$$

im Nebenkegel $\mathfrak{C} = \{a\colon (a, a) < 0\}$ für jede Wahl der natürlichen Zahlen N, m_0, m_1, m_2, m_3 eine Ungleichung

$$|(a, a)|^{N/2}\, |\partial_{a_0}^{m_0}\, \partial_{a_1}^{m_1}\, \partial_{a_2}^{m_2}\, \partial_{a_3}^{m_3}\, t_1(a)| \leq K_N^m(\Phi, \Psi)\,. \tag{36}$$

§ 5. Eine Anwendung und Bemerkungen

Im folgenden verwenden wir die Abkürzung

$$\mathfrak{W}^{(a)}_{n+m}(\chi) \equiv \int \mathfrak{W}_{n+m}(x_1, \cdots x_n, y_1 + a, \cdots y_m + a)\, \chi(x_1, \cdots x_n, y_1 \cdots y_m) \times \times\, d^{4n}x\, d^{4m}y. \tag{37}$$

Ausserdem führen wir das Tensorprodukt $\mathfrak{W}_n \otimes \mathfrak{W}_m$ der beiden Distributionen $\mathfrak{W}_n$ und $\mathfrak{W}_m$ ein ([10]), Bd. I, p. 106ff). Dieses ist durch die Werte $\mathfrak{W}_n \otimes \mathfrak{W}_m\,(\varphi\,\psi) = \mathfrak{W}_n(\varphi) \cdot \mathfrak{W}_m(\psi)$ vollständig definiert.

Spezialisiert man die Diskussion des letzten Paragraphen auf Vektoren Φ und Ψ der Form $\Phi_n(\overleftarrow{\varphi})$ und $\Phi_m(\psi)$, dann ergibt sich leicht die

Folgerung: Für jede natürliche Zahl N und beschränkte Mengen $B_x \subset \mathfrak{D}(R^{4n})$ und $B_y \subset \mathfrak{D}(R^{4m})$ existiert eine Schranke $K_N(B_x, B_y)$ derart, dass

$$|\mathfrak{W}^{(a)}_{n+m}(\varphi\,\psi) - \mathfrak{W}_n \otimes \mathfrak{W}_m(\varphi\,\psi)| \leq |(a, a)|^{-N/2}\, K_N(B_x, B_y)$$

für alle

$$\varphi \in B_x\,, \quad \psi \in B_y \quad \text{und} \quad (a, a) < 0\,. \tag{38}$$

B_x hat als beschränkte Menge die Eigenschaft, dass jede Distribution aus $\mathfrak{D}'(R^{4n})$ auf B_x beschränkt ist, und analoges trifft für B_y zu. Die Beschränktheitsaussage in der Folgerung ergibt sich dann unmittelbar aus der Tatsache, dass die Schranke $K^0_N(\Phi, \Psi)$ sich in unserem Spezialfall als endliche Summe bilinearer Ausdrücke von Distributionen mit den Variablen φ und ψ darstellt.

Nun lässt sich aber die Folgerung unschwer auf beliebige Funktionen $\chi \in B_{x,y} \subset \mathfrak{D}(R^{4n+4m})$ ausdehnen, wobei $B_{x,y}$ wieder als beschränkt vorausgesetzt ist. An die Stelle der Schranke $K_N(B_x, B_y)$ tritt dann eine Schranke, die von $B_{x,y}$ abhängt.

Zu $B_{x,y}$ existiert immer eine Konstante $M > 0$ und beschränkte Mengen $B_x \subset \mathfrak{D}(R^{4n})$ und $B_y \subset \mathfrak{D}(R^{4m})$ derart, dass jedes $\chi \in B_{x,y}$ die Darstellung gestattet ([12]), p. 64):

$$\chi(x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, \varphi_i(x_1, \cdots x_n)\, \psi_i(y_1, \cdots y_m)$$

mit $$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < M \quad \text{und} \quad \varphi_i \in B_x \quad \text{und} \quad \psi_i \in B_y\,.$$

Damit ergibt sich aber

$$|\mathfrak{W}^{(a)}_{n+m}(\chi) - \mathfrak{W}_n \otimes \mathfrak{W}_m(\chi)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\, |\mathfrak{W}^{(a)}_{n+m}(\varphi_i\,\psi_i) - - \mathfrak{W}_n \otimes \mathfrak{W}_m(\varphi_i\,\psi_i)| \leq |(a, a)|^{-N/2}\, M\, K_N(B_x, B_y)\,. \tag{39}$$

Gleichbedeutend mit dieser Aussage ist der

Satz 5: Im Sinne der Konvergenz in $\mathfrak{D}'(R^{4n+4m})$ gilt für jede natürliche Zahl N gleichmässig für alle raumartigen Vektoren a:

$$\lim_{-(a,a)\to\infty} |(a, a)|^{N/2} (\mathfrak{W}^{(a)}_{n+m} - \mathfrak{W}_n \otimes \mathfrak{W}_m) = 0 . \tag{40}$$

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von H. Araki. Ein Vergleich unserer Beweismethode mit derjenigen von Araki ist lehrreich: Araki verwendet die Spektralzerlegung des Translationsoperators nicht, sondern erschliesst allein aus den linearen Eigenschaften der Wightmandistributionen das Resultat. Dagegen muss er die Temperiertheit der Wightmandistributionen wenigstens in jeder Differenzvariablen einzeln annehmen. Diese Temperiertheit ist nun allerdings eine Folge der Spektralzerlegung von $T(a)$. Verwendet man diese direkt, dann erscheinen die Grundlagen der beiden Beweise nahezu identisch.

Beiden Beweisverfahren gemeinsam ist, dass die Voraussetzungen über das Spektrum nicht vollständig ausgenützt zu werden brauchen. Insbesondere gelten alle hier aufgeführten Sätze auch dann, wenn der Träger von E_1 in $V_+^M \cup V_-^M$ enthalten ist ($V_-^M \equiv \{p : (p, p) > M^2, p_0 < 0\}$). Sie haben also nur beschränkt etwas mit dem Postulat positiver Energie und damit mit den Analytizizätseigenschaften der Wightmanfunktionen zu tun.

Die Autoren möchten dem Institut des Hautes Etudes Scientifiques und besonders seinem Direktor Dr. Léon Motchane für die Einladung nach Paris danken. Es war ihnen so möglich, während einiger Wochen in Ruhe zu arbeiten. Diese Untersuchung ist ein Ergebnis dieser Arbeit. Einer der Autoren (K. H.) dankt ferner dem Schweizerischen Nationalfonds (K. A. W.) für ein Forschungsstipendium.

Bibliographie

1) A. S. Wightman, Phys. Rev. *101*, 860 (1956).
2) A. S. Wightman, «Les Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs», Lille 1957.
3) G. F. Dell'Antonio, Ann. Phys. *16*, 153 (1961).
4) H. Araki, Ann. Phys. *11*, 260 (1960).
5) H. Araki, J. Math. Phys. *2*, 267 (1961).
6) R. Haag, Phys. Rev. *112*, 669 (1958).
7) M. A. Naimark, Izvest. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. *7*, 237 (1943).
8) F. Riesz, B. Sz.-Nagy, «Leçons d'analyse fonctionnelle», Paris (1955).
9) A. Uhlmann, Ann. Phys. *13*, 453 (1961).
10) L. Schwartz, «Théorie des distributions», I, II, Paris (1957,1959).
11) L. Schwartz, Proc. Int. Cong. Math. 1950.
12) L. Gårding, J. L. Lions, Suppl. Nuovo Cimento *14*, 9 (1959).
13) G. F. Dell'Antonio, P. Gulmanelli, Nuovo Cimento *12*, 38 (1959).