

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 34 (1961)  
**Heft:** I

**Artikel:** Zur Frage der Vorzeichenumkehr des Magnetfeldes beim  
Meissnereffekt. I, Spiegelnde Oberflächenstreuung  
**Autor:** Sommerhalder, R. / Thomas, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113168>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Frage der Vorzeichenumkehr des Magnetfeldes beim Meissnereffekt. I. Spiegelnde Oberflächenstreuung

von **R. Sommerhalder** und **H. Thomas**

IBM Forschungslaboratorium Zürich

(13. VII. 1960)

*Abstract.* The penetration of a longitudinal magnetic field through the wall of a superconducting hollow cylinder is calculated for an arbitrary nonlocal theory, assuming specular reflection of the electrons at the surfaces.

Numerical analysis for the case of Pippard's kernel predicts opposite signs of the magnetic fields inside and outside the cylinder above a certain critical wall thickness, which depends on the coherence length.

The calculated field attenuation ratio should allow experimental observation of this sign reversal for evaporated films, thus providing a direct proof of the nonlocal relation between vector potential and density of the supercurrents.

## 1. Einleitung

In der Londonschen Theorie der Supraleitung sind Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und Suprastromdichte  $\mathbf{j}_s$  in jedem Punkt des Supraleiters zueinander proportional. Dieser Zusammenhang ist in den neueren Theorien der Supraleitung (PIPPARD 1953, BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER 1957) so verallgemeinert worden, dass die Dichte des Suprastroms am Orte  $\mathbf{r}$  durch einen geeigneten *Mittelwert* des Vektorpotentials über eine Umgebung von  $\mathbf{r}$  bestimmt wird.

Lokale und nichtlokale Theorie zeigen interessante Unterschiede beim Meissnereffekt. Während in der Londonschen Theorie ein statisches Magnetfeld unter der Oberfläche des Supraleiters exponentiell abfällt, somit in endlicher Distanz von der Oberfläche nie Null oder gar negativ werden kann, sagt die nichtlokale Theorie für den supraleitenden Halbraum einen Vorzeichenwechsel des Magnetfeldes mit Nulldurchgang in endlicher Entfernung von der Oberfläche voraus. Ein experimenteller Nachweis dieses Effektes ist bis jetzt nicht gelungen (LEWIS, COCHRAN, FRAUENFELDER, MAPOTHER und PEACOCK 1960). Da er aber einen direkten Beweis für die nichtlokale Verknüpfung zwischen Stromdichte und Vektorpotential liefern würde, unabhängig von der speziellen Art der

Mittelung (PIPPARD 1953), halten wir weitere Anstrengungen für lohnend.

Wir haben die von SCHAWLOW 1958 erstmals verwendete und seither öfters gebrauchte Eindringtiefenmessung an supraleitenden Hohlkörpern (JAGGI und SOMMERHALDER 1958, 1959, 1960; ERLBACH, GARWIN und SARACHIK 1958\*), 1960; SARACHIK, GARWIN und ERLBACH 1960) auf ihre Eignung für ein derartiges Experiment geprüft. Dazu ist zu untersuchen, wie die Gegenwart der zweiten Grenzfläche die Feldverteilung nach der nichtlokalen Theorie beeinflusst. Es wird gezeigt, dass auch im Innern eines supraleitenden Hohlzylinders ein Vorzeichenwechsel des Feldes bei einer bestimmten Wanddicke stattfindet.

## 2. Berechnung der Feldabschwächung

Wir verwenden ein Verfahren, welches von SCHRIEFFER 1957 angegeben wurde.

An einen unendlich langen Hohlzylinder (Innenradius  $R$ , Wanddicke  $D$ ) werde aussen ein homogenes, longitudinales Magnetfeld  $H_a$  angelegt. Gesucht ist das in den Hohlraum eindringende Feld  $H_i$  als Funktion von  $H_a$ .

Bei genügend kleiner Wanddicke  $D \ll R$  lässt sich die Wand des Hohlzylinders als eben behandeln. Führt man nach Figur 1 kartesische Koordinaten  $(x, y, z)$  ein, so gilt aus Symmetriegründen für Magnetfeld  $\mathbf{H}$ , Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und Suprastromdichte  $\mathbf{j}$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{H} = (0, 0, H(x)), \\ \mathbf{A} = (0, A(x), 0), \\ \mathbf{j} = (0, j(x), 0). \end{array} \right\} \quad (1)$$

Aus den Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{4\pi}{c} j(x), \quad \frac{dA}{dx} = H(x), \quad (2)$$

und der Verknüpfung zwischen Suprastromdichte und Vektorpotential

$$j(x) = -\frac{c}{4\pi} \int K(|x - x'|) A(x') dx' \quad (3)$$

ergibt sich für das Vektorpotential die Integrodifferentialgleichung

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \int K(|x - x'|) A(x') dx', \quad (4)$$

\*) Diese Arbeit bezieht sich auf ebene Filme, an die jedoch nur auf *einer* Seite ein äusseres Magnetfeld angelegt wird.

wobei die Form des Kerns  $K$  ( $|x - x'|$ ) zunächst noch offen bleiben kann. Die den Randbedingungen

$$\left( \frac{dA}{dx} \right)_{x=0} = H_i, \quad \left( \frac{dA}{dx} \right)_{x=D} = H_a \quad (5)$$

genügende Lösung von (4) hat die Form

$$A(x) = H_i \cdot f(x) + H_a \cdot g(x). \quad (6)$$

Sie muss zusätzlich am Innenrand des Hohlzylinders an die Bedingung

$$A(0) = RH_i/2 \quad (7)$$

angepasst werden. Aus (6) und (7) ergibt sich

$$\frac{H_i}{H_a} = g(0) / \left[ \frac{R}{2} - f(0) \right]. \quad (8)$$

Die Gleichung (4) soll hier für den Fall gelöst werden, dass die Elektronen an den Grenzflächen spiegelnd reflektiert werden. Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Integration in (4) von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstreckt wird, wobei das Magnetfeld antisymmetrisch über das Intervall  $0 < x < D$  hinaus periodisch fortgesetzt wird (Fig. 2).

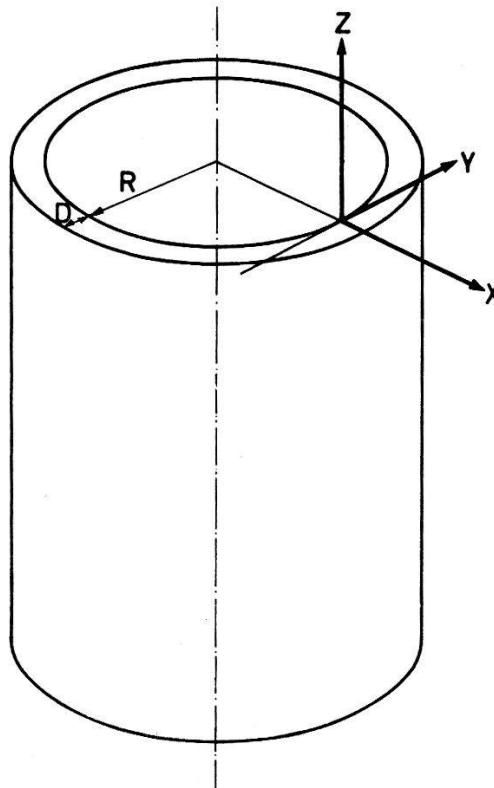


Fig. 1

Lage des Koordinatensystems ( $x, y, z$ ) relativ zum Hohlzylinder.

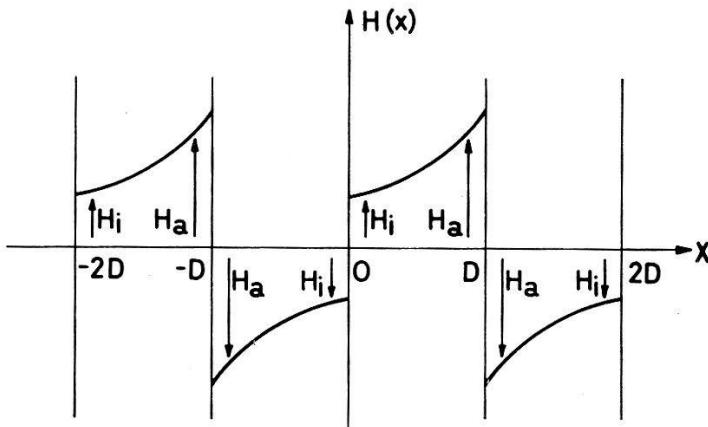


Fig. 2

Periodische Fortsetzung des Magnetfeldverlaufes  $H(x)$ , bedingt durch die spiegelnde Reflexion der Elektronen an den Oberflächen.

Die Randbedingungen (5) schreiben vor, dass das Magnetfeld an den Stellen  $x = 2 k D$  um  $2 H_i$ , an den Stellen  $x = (2 k + 1) D$  um  $-2 H_a$  springt, wo  $k$  eine ganze Zahl bedeutet. Sie lassen sich dadurch ersetzen, dass an diesen Stellen Stromblätter mit einer Flächenstromdichte von  $-c/4\pi \cdot 2 H_i$  bzw.  $+c/4\pi \cdot 2 H_a$ , das heisst eine eingeprägte Stromdichte

$$\hat{j}(x) = \frac{c}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{-2 H_i \delta[x - 2 k D] + 2 H_a \delta[x - (2 k + 1) D]\}$$

eingeführt wird. Dann gilt an Stelle von (2)

$$-\frac{4\pi}{c} (j(x) + \hat{j}(x)) = \frac{d^2 A}{dx^2}, \quad (9)$$

während die Verknüpfung (3) zwischen Suprastrom und Vektorpotential erhalten bleibt. Gleichung (4) für das Vektorpotential geht daher über in

$$\frac{d^2 A}{dx^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} K(|x - x'|) A(x') dx' = -\frac{4\pi}{c} \hat{j}(x). \quad (10)$$

Mit Hilfe der Fourierzerlegung

$$\hat{j}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{j}_n \cdot \cos \frac{n\pi}{D} x \quad (11)$$

folgt aus (10) für die Fourierkomponenten des Vektorpotentials

$$\left[ \left( \frac{n\pi}{D} \right)^2 + K_n \right] \cdot A_n = \frac{4\pi}{c} \cdot \hat{j}_n$$

$$\text{mit } \frac{4\pi}{c} \cdot \hat{j}_0 = \frac{H_a - H_i}{D}, \quad \frac{4\pi}{c} \hat{j}_n = -\frac{2H_i}{D} + (-1)^n \frac{2H_a}{D} \text{ für } n \neq 0 \quad (12)$$

und

$$K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} K(|t|) \cos\left(\frac{n\pi}{D}t\right) dt.$$

Damit hat sich das Vektorpotential in der Form (6) ergeben. Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  werden

$$f(x) = -\frac{2}{D} \left\{ \frac{1}{2K_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{D}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{D}\right)^2 + K_n} \right\}, \quad (13)$$

$$g(x) = -\frac{2}{D} \left\{ \frac{1}{2K_0} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{D}x\right)}{\left(\frac{n\pi}{D}\right)^2 + K_n} \right\},$$

und das in den Hohlraum eingedrungene Feld ist daher nach (8)

$$H_i = \frac{\frac{1}{2K_0} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \left( \frac{n\pi}{D} \right)^2 + K_n \right]^{-1}}{\frac{RD}{4} + \frac{1}{2K_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{n\pi}{D} \right)^2 + K_n \right]^{-1}} \cdot H_a. \quad (14)$$

Gleichung (14) gilt für einen beliebigen Kern  $K_n$ .

Man überzeugt sich leicht, dass der Londonsche Kern

$$K_n^L = \frac{1}{\lambda^2} \quad (\lambda = \text{Eindringtiefe}) \quad (15)$$

das bekannte Resultat

$$H_i = H_a \left/ \left[ \frac{R}{2\lambda} \operatorname{Sinh} \frac{D}{\lambda} + \operatorname{Cosh} \frac{D}{\lambda} \right] \right.$$

liefert.

Für den Pippardschen Kern

$$K_n^P = \frac{3}{2\lambda^2 \left( \frac{n\pi}{D} \xi_0 \right) \left( \frac{n\pi}{D} \xi \right)^2} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{n\pi}{D} \xi \right)^2 \right] \operatorname{arctg} \left( \frac{n\pi}{D} \xi \right) - \frac{n\pi}{D} \xi \right\}, \quad (17)$$

wo

$\xi_0$  = Kohärenzlänge des ungestörten Kristalls,

$\xi$  = Kohärenzlänge des gestörten Kristalls,

ist (14) auf einer Rechenmaschine IBM 610 numerisch für zwei Sätze von Parameterwerten ausgewertet worden:

a)  $R = 1 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ,  $\xi = \xi_0 = 2500 \text{ \AA}$  (BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER 1957). Dies entspricht dem Fall einer ungestörten Zinnschicht.

b)  $R = 1 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ,  $\xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ,  $\xi = 1000 \text{ \AA}$ . Dies entspricht dem Fall einer Zinnschicht mit einer Struktur, wie sie in realen Schichten vorhanden ist (SCHAWLOW 1958, JAGGI und SOMMERHALDER 1960).

Die Resultate sind in Figur 3 dargestellt. Wie qualitativ zu erwarten ist, bewirken die Störungen in der Schicht ( $\xi < \xi_0$ ) eine Verschiebung des Nulldurchgangs des Magnetfeldes zu grösseren Schichtdicken, und es sind in realen Schichten für negatives  $H_i/H_a$  Abschwächungsverhältnisse von der Grössenordnung  $10^{-9}$  bis  $10^{-8}$  zu erwarten.

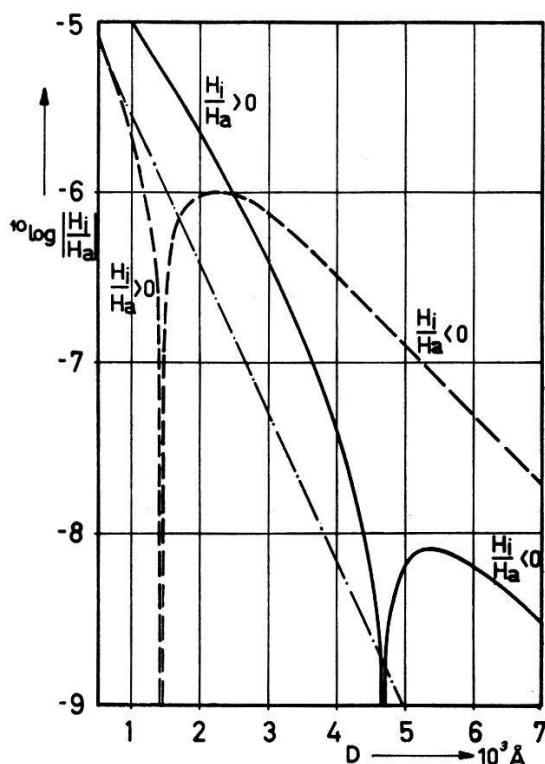


Fig. 3

Verhältnis der inneren zur äusseren Feldstärke  $H_i/H_a$  in Funktion der Filmdicke  $D$ .

Radius des Hohlzylinders  $R = 1 \text{ cm}$ .

— · · · · · Londonsche Theorie ( $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ),

— · · · · · Pippardsche Theorie ( $\xi = \xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ,  $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ),

— · — · — · Pippardsche Theorie ( $\xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ,  $\xi = 1000 \text{ \AA}$ ,  $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ).

Da der Kern der BCS-Theorie dem Pippardschen Kern recht ähnlich ist, dürfte dort die Vorzeichenumkehr bei vergleichbaren Schichtdicken mit grössenordnungsmässig gleicher Feldabschwächung liegen. Die Beschränkung der Rechnung auf den Fall spiegelnder Reflexion der Elektronen in den Oberflächen ist physikalisch wohl nicht einschneidend (SONDHEIMER 1952).

Die experimentelle Untersuchung der Vorzeichenumkehr des Magnetfeldes ist vorgesehen. Eine Apparatur hiezu ist im Aufbau.

Wir danken Herrn K. E. DRANGEID für die Programmierung der numerischen Rechnungen und Herrn Dr. W. LINIGER für anregende Diskussionen.

### Literaturverzeichnis

- J. BARDEEN, L. N. COOPER und J. R. SCHRIEFFER, Phys. Rev. *108*, 1175 (1957).  
E. ERLBACH, R. L. GARWIN und M. P. SARACHIK, Bull. Am. Phys. Soc. Ser. II, *3*, 133 (1958); IBM. J. Res. Developm. *4*, 107 (1960).  
R. JAGGI und R. SOMMERHALDER, Helv. Phys. Acta *31*, 292 (1958); *32*, 313 (1959); *33*, 1 (1960).  
H. R. LEWIS, J. F. COCHRAN, H. FRAUENFELDER, D. E. MAPOTHER und R. N. PEACOCK, Z. Physik *158*, 26 (1960).  
A. B. PIPPARD, Proc. Roy. Soc. [A] *216*, 547 (1953).  
M. P. SARACHIK, R. L. GARWIN und E. ERLBACH, Phys. Rev. Lett. *4*, 52 (1960).  
A. L. SCHAWLOW, Phys. Rev. *109*, 1856 (1958).  
J. R. SCHRIEFFER, Phys. Rev. *106*, 47 (1957).  
E. H. SONDHEIMER, Adv. in Physics *1*, 1 (1952).