

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 34 (1961)  
**Heft:** III

**Artikel:** Zur Frage der Vorzeichenumkehr des Magnetfeldes beim  
Meissnereffekt. II, Diffuse Oberflächenstreuung  
**Autor:** Sommerhalder, R. / Thomas, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113176>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Frage der Vorzeichenumkehr des Magnetfeldes beim Meissnereffekt

## II. Diffuse Oberflächenstreuung

von **R. Sommerhalder** und **H. Thomas**  
IBM Forschungslaboratorium, Zürich

(20. XI. 1960)

*Abstract.* Our recently published calculations of the penetration of a longitudinal magnetic field through the wall of a superconducting hollow cylinder, according to Pippard's non-local theory with specular reflection of the electrons at the surfaces have been extended to cover the case of diffuse scattering of the electrons at the surfaces.

It is shown by numerical analysis that the wall thickness, above which the magnetic fields inside and outside the hollow cylinder have different signs, is about 750 Å larger, and the maximum field attenuation ratio available for experimental detection of the sign reversal, about twice as low for diffuse as for specular surface scattering. Both results do not depend upon the value of the coherence length.

Because of the strong similarity between the BCS and Pippard kernels, these results should also be fairly representative for the BCS-theory.

### I. Einleitung

In einer vorausgegangenen Arbeit (SOMMERHALDER und THOMAS 1961) haben wir zur Prüfung der nichtlokalen Theorie der Supraleitung Experimente mit supraleitenden Hohlzylindern vorgeschlagen. An lange Hohlzylinder soll aussen ein homogenes longitudinales Magnetfeld  $H_a$  angelegt werden, und es soll das in den Hohlraum eindringende Feld  $H_i$  als Funktion der Wandstärke  $D$  des Hohlzylinders bestimmt werden. Dieser Feldverlauf, insbesondere die minimal notwendige Wandstärke für negatives Verhältnis  $H_i/H_a$  (kritische Wandstärke), sowie die Wandstärke für maximales negatives Verhältnis  $H_i/H_a$  (optimale Wandstärke) wurden für den Fall des Pippardschen Kernes berechnet unter der Voraussetzung *spiegelnder* Reflexion der Elektronen an den Oberflächen.

Auf Grund der bisherigen Erfahrungen (REUTER und SONDHEIMER 1948) sollen die speziellen Reflexionsbedingungen an den Oberflächen keinen wesentlichen Einfluss auf den Feldverlauf haben. Es ist aber qualitativ leicht einzusehen, dass im Fall *diffuser* Oberflächenstreuung die

kritische wie auch die optimale Wandstärke nach grösseren Wanddicken verschoben werden. Da bereits verhältnismässig geringe Änderungen dieser Werte zu experimentell unangenehm kleinen negativen Abschwächungsverhältnissen  $H_i/H_a$  führen könnten, schien uns die Ausdehnung der Berechnungen der ersten Arbeit auf den Fall diffuser Streuung der Elektronen an den Oberflächen angezeigt.

## II. Berechnung der Feldabschwächung

Wir führen die gleichen Symbole und Koordinaten ein wie in der ersten Arbeit. Das Vektorpotential  $A(x)$  ist eine Lösung der Integro-Differentialgleichung

$$A''(x) = \int_0^D K(|x - x'|) \cdot A(x') \cdot dx' \quad (2.1)$$

und genügt den Randbedingungen

$$A'(0) = H_i; \quad A'(D) = H_a. \quad (2.2)$$

Die Voraussetzung diffuser Oberflächenreflexion kommt in den Integrationsgrenzen von (2.1) zum Ausdruck. Die gesuchte Verknüpfung zwischen  $H_i$  und  $H_a$  erhält man aus der Bedingung

$$A(0) = R H_i / 2. \quad (2.3)$$

Die Rechnungen sollen hier für den Pippardschen Kern

$$K(|x|) = \frac{3}{4 \xi_0 \cdot \lambda^2} \cdot \int_1^\infty \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) \cdot e^{-|x| t/\xi} \cdot dt \quad (2.4)$$

durchgeführt werden.

Führt man dimensionslose Grössen

$$\begin{aligned} s &= x/\xi, \\ \varLambda &= D/\xi, \\ \varrho &= R/\xi, \\ h &= H_i/H_a, \\ \alpha &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\xi^3}{\xi_0 \cdot \lambda^2}, \\ F(s) &= A(x)/\xi H_i, \\ k(|s|) &= \frac{4}{3} \cdot \xi_0 \cdot \lambda^2 \cdot K(|x|) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ein, so transformieren sich (2.1) bis (2.4) in

$$F''(s) - \alpha \cdot \int_0^A k(|s - s'|) \cdot F(s') \cdot ds' = 0, \quad (2.6)$$

$$F'(0) = 1; \quad F'(A) = \frac{1}{h}, \quad (2.7)$$

$$F(0) = \frac{\varrho}{2} \quad (2.8)$$

und

$$k(|s|) = \int_1^\infty \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) \cdot e^{-|s|t} \cdot dt. \quad (2.9)$$

$F(s)$  muss linear von den Randwerten abhängen:

$$F(s) = \varphi(s) + \frac{1}{h} \psi(s). \quad (2.10)$$

Dabei sind  $\varphi(s)$  und  $\psi(s)$  Lösungen von (2.6) und genügen den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= 1, & \varphi'(A) &= 0, \\ \psi'(0) &= 0, & \psi'(A) &= 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Daraus folgt

$$\varphi(s) = -\psi(A - s) \quad (2.12)$$

und somit lässt sich  $F(s)$  durch  $\psi(s)$  allein darstellen.

Für das Feldstärkenverhältnis  $h$  findet man

$$h = \frac{\psi(0)}{\varrho/2 + \psi(A)}. \quad (2.13)$$

Zur numerischen Berechnung der Lösungsfunktion  $\psi$  im Intervall  $0 \leq s \leq A$  approximieren wir  $\psi$  durch einen Polygonzug mit  $n$  gleichen Intervallen der Länge  $l = A/n$ : Die Funktionswerte an den Stellen  $s = k \cdot l$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) sind  $\psi(k \cdot l) = \psi_k$ ; dazwischen wird linear interpoliert. Ferner setzt man an allen inneren Punkten  $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$\psi_k'' = \frac{1}{l^2} (\psi_{k+1} - 2\psi_k + \psi_{k-1}). \quad (2.14)$$

Zur Darstellung von  $\int_0^A k(|s - s'|) \cdot \psi(s') \cdot ds'$  durch die Werte  $\psi_k$  führt man folgende Funktionen ein\*):

\*) Wir verdanken diese Idee Herrn Prof. Dr. RUTISHAUSER, Inst. für angew. Mathematik ETH.

$$\begin{aligned}
y(x) &= -y(-x) = \int_0^x k(|t|) dt = \\
&= \frac{2}{3} - e^{-x} \left[ \frac{2}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{6} - \left( x - \frac{x^3}{6} \right) \cdot E(x) \right], \\
z(x) &= +z(-x) = \int_0^x y(t) \cdot dt = \tag{2.15} \\
&= \frac{2}{3} x - \frac{1}{4} - e^{-x} \cdot \left[ -\frac{1}{4} + \frac{5}{12} x + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{24} - \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right) \cdot E(x) \right]
\end{aligned}$$

für  $x \geq 0$ , wobei

$$E(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} \cdot dt. \tag{2.16}$$

Dann ist überall  $k(s) = y'(s) = z''(s)$ .

Damit wird für  $s = i \cdot l$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ )

$$\begin{aligned}
\int_0^A k(|s - s'|) \cdot \psi(s') \cdot ds' &= y(s' - s) \cdot \psi(s') \Big|_0^A - \int_0^A y(s' - s) \cdot \psi'(s') \cdot ds' = \\
&= y_{n-i} \cdot \psi_n - y_{-i} \cdot \psi_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{l} (\psi_{k+1} - \psi_k) \cdot (z_{k+1-i} - z_{k-i}), \tag{2.17}
\end{aligned}$$

da  $\psi'(s')$  ja im Intervall  $k \cdot l < s' < (k + 1) \cdot l$  konstant ist. Die Singularität von  $k(|s - s'|)$  an der Stelle  $s = s'$  macht bei der partiellen Integration wegen der Stetigkeit der Funktionen  $y(s - s')$  und  $z(s - s')$  keine Schwierigkeiten.

Mit (2.14) und (2.17) ergeben sich aus der Integrodifferentialgleichung (2.6) daher die  $n - 1$  linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha \cdot l^2} \cdot [\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}] &= \psi_0 \cdot \left[ -y_{-i} + \frac{1}{l} (z_{1-i} - z_{-i}) \right] + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{l} \cdot \psi_k \cdot [z_{k+1-i} - 2z_{k-i} + z_{k-1-i}] + \tag{2.18} \\
&+ \psi_n \cdot \left[ y_{n-i} - \frac{1}{l} (z_{n-i} - z_{n-1-i}) \right].
\end{aligned}$$

Die Randbedingungen (2.11) werden durch

$$\begin{aligned}\psi'(0) &= \frac{1}{2l} \cdot [-3\psi_0 + 4\psi_1 - \psi_2] = 0, \\ \psi'(l) &= \frac{1}{2l} \cdot [3\psi_n - 4\psi_{n-1} + \psi_{n-2}] = 1\end{aligned}\tag{2.19}$$

approximiert. Durch (2.18) und (2.19) ist ein lineares Gleichungssystem für die  $n + 1$  Funktionswerte  $\psi_i$  gegeben. Es wurde für  $n = 25$  Teilintervalle auf der elektronischen Rechenmaschine ERMETH aufgelöst, in einigen Beispielen zur Überprüfung der Rechengenauigkeit für  $n = 45$ .

Im Gültigkeitsbereich des von PETER 1958 angegebenen Iterationsverfahrens stimmen die Lösungen unseres Gleichungssystems sehr gut mit seiner Formel überein.

### III . Resultate

Das Verhältnis  $H_i/H_a$  des in den Hohlraum eindringenden Magnetfeldes  $H_i$  zum äusseren angelegten Feld  $H_a$  in Abhängigkeit von der Wandstärke  $D$  des Hohlzylinders ist in Figur 1 aufgezeichnet für die gleichen zwei Parametersätze wie im Fall der elastischen Oberflächenstreuung:

- Radius des Hohlzylinders  $R = 1$  cm, Eindringtiefe der Londontheorie  $\lambda = 500$  Å, Kohärenzlänge  $\xi = \xi_0 = 2500$  Å (BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER 1957). Dies entspricht dem Fall einer ungestörten Zinnschicht.
- $R = 1$  cm,  $\lambda = 500$  Å,  $\xi = 1000$  Å. Dies entspricht dem Fall einer Zinnschicht mit einem Störungsgehalt, wie er in realen Schichten vorhanden ist (SCHAWLOW 1958, JAGGI und SOMMERHALDER 1960).

Negative Verhältnisse  $H_i/H_a$  treten in der ungestörten Schicht erstmals für Schichtdicken  $D \approx 2150$  Å auf, in der gestörten für  $D \approx 5400$  Å. Diese kritischen Wandstärken sind zu vergleichen mit den entsprechenden Schichtdicken  $D \approx 1400$  Å resp.  $D \approx 4650$  Å im Fall der spiegelnden Reflexion der Elektronen an den Oberflächen. Es ergibt sich somit, dass *unabhängig* von der Kohärenzlänge die kritische Wandstärke bei diffuser Oberflächenreflexion um rund 750 Å grösser ist als bei spiegelnder Oberflächenreflexion.

Das optimale Feldstärkenverhältnis  $H_i/H_a$  ist in der ungestörten Schicht  $H_i/H_a \approx -5 \cdot 10^{-7}$ , in der gestörten  $H_i/H_a \approx -4 \cdot 10^{-9}$ . Die entsprechenden Feldstärkenverhältnisse bei spiegelnder Oberflächenreflexion sind  $H_i/H_a \approx -1 \cdot 10^{-6}$  resp.  $H_i/H_a \approx -8 \cdot 10^{-9}$ , also *unabhängig* von der Kohärenzlänge etwa zweimal kleiner bei diffuser Oberflächenstreuung

Die starke Ähnlichkeit des Pippardschen Kerns mit demjenigen der BCS-Theorie lässt erwarten, dass die speziellen Annahmen über die Reflexion der Elektronen in den Oberflächen auch dort nicht von grösserem Einfluss auf den Vorzeichenwechsel des Magnetfeldes in dünnen supraleitenden Schichten sind.

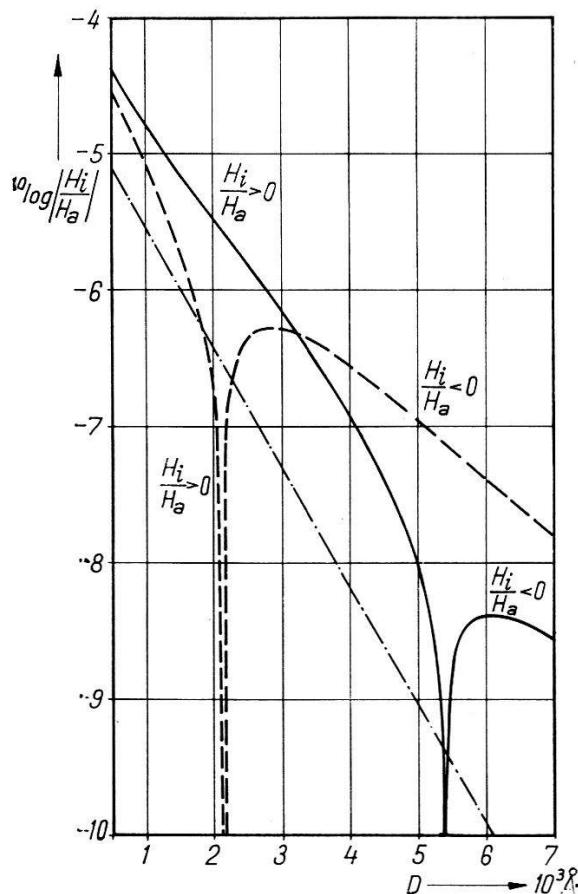


Fig. 1

Verhältnis der inneren zur äusseren Feldstärke  $H_i/H_a$  in Funktion der Schichtdicke  $D$ . Radius des Hohlzylinders  $R = 1 \text{ cm}$ .

— · · · · · Londonsche Theorie ( $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ).

— · · · · Pippardsche Theorie ( $\xi = \xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ,  $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ).

— · · · · Pippardsche Theorie ( $\xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ,  $\xi = 1000 \text{ \AA}$ ,  $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ).

In Figur 2 ist die Ortsabhängigkeit des Feldverlaufs für die Schichtdicke  $D = 6000 \text{ \AA}$  und für die Parameterwerte  $\xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ;  $\xi = 2500 \text{ \AA}$  bzw.  $\xi = 1000 \text{ \AA}$  aufgezeichnet. Im ersten Fall wechselt das Magnetfeld sein Vorzeichen grössenordnungsmässig in der Schichtmitte, im letzteren Fall innerhalb der ersten  $100 \text{ \AA}$  vom Innenrand des Hohlzylinders aus gerechnet.

Für wesentlich dünnere Schichten kann der entsprechende Kurvenverlauf der Formel von PETER 1958 entnommen werden.

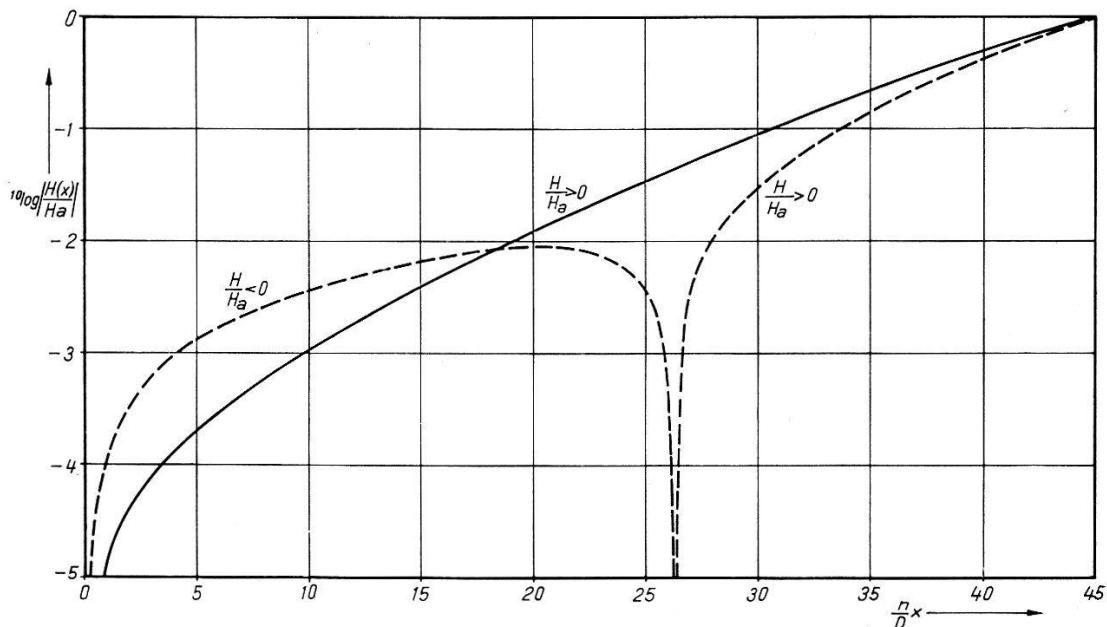


Fig. 2

Ortsabhängigkeit des Magnetfeldes  $H(x)$  in der Wand des Hohlzylinders.  $H_a$  = angelegtes äusseres Magnetfeld; Wandstärke  $D = 6000 \text{ \AA}$ , Anzahl der Teilintervalle  $n = 45$ , Radius des Hohlzylinders  $R = 1 \text{ cm}$ .

— — — Pippardsche Theorie ( $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ,  $\xi = \xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ),  
 — — — Pippardsche Theorie ( $\lambda = 500 \text{ \AA}$ ,  $\xi_0 = 2500 \text{ \AA}$ ,  $\xi = 1000 \text{ \AA}$ ).

Wir danken Herrn Prof. Dr. RUTISHAUSER, Institut für angewandte Mathematik ETH, für seine wertvolle Unterstützung herzlich.

### Literaturverzeichnis

- BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).  
 R. JAGGI und R. SOMMERHALDER, Helv. Phys. Acta 33, 1 (1960).  
 M. PETER, Phys. Rev. 109, 1857 (1958).  
 G. E. H. REUTER und E. H. SONDHEIMER, Proc. Roy. Soc. A 195, 336 (1948).  
 A. L. SCHAWLOW, Phys. Rev. 109, 1856 (1958).  
 R. SOMMERHALDER und H. THOMAS, Helv. Phys. Acta 34, 29 (1961).