

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 33 (1960)
Heft: VIII

Artikel: Nullpunktsenergie und Anordnung nicht vertauschbarer Faktoren im Hamiltonoperator
Autor: Enz, C.P. / Thellung, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113099>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Nullpunktsenergie und Anordnung nicht vertauschbarer Faktoren im Hamiltonoperator

von C. P. Enz

The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J.

und A. Thellung

Institut für Theoretische Physik der Universität Zürich

Summary. In general the arrangement of non-commuting factors in a Hamiltonian H is not completely determined by the requirement that H must be Hermitian. In the case of the harmonic oscillator the zero point energy can be removed by a perfectly legitimate reordering of the factors p and q (i. e. by writing H as a 'normal product'). This raises the question whether physical effects that confirm the existence of a zero point energy mean that only one particular choice of the order of the p 's and q 's in H is correct. For the case of the sublimation pressure of isotopes and of the Casimir effect this is discussed in full detail. It is shown that the general principles of quantum mechanics (without the addition of any empirical prescriptions about the order of factors) lead to a unique result for such measurable effects, although the Hamiltonian itself is not uniquely defined.

§ 1. Einleitung

Eines der Probleme, die sich beim Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik stellen, ist die Anordnung nicht vertauschbarer Faktoren im Hamiltonoperator H . Sie wird im allgemeinen durch die Vorschrift der Hermitezität (und eventuell gewisser Invarianzeigenschaften) nicht eindeutig festgelegt¹⁾. Solange H quadratisch von den Koordinaten q und Impulsen p abhängt (dieser Fall entspricht physikalisch immer gewissen Elementaranregungen), unterscheiden sich verschiedene Faktorenanordnungen nur um eine additive Konstante*). Es hat aber den Anschein, als wäre diese Konstante nicht belanglos, da sie mit der *Nullpunktsenergie* zusammenhängt. Die Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators können wir zum Beispiel in der konventionellen Form

$$H = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) \quad (1)$$

oder in der Wickschen Normalform³⁾

$$:H: = \frac{1}{2m} (p + i m \omega q) (p - i m \omega q) \quad (1')$$

*) Bei Hamiltonoperatoren von höherem als 2. Grad in p, q sind die Unterschiede weniger trivial. Ein Beispiel hierfür findet sich in der Quantenhydrodynamik²⁾.

schreiben, was klassisch auf dasselbe herauskommt. Quantenmechanisch unterscheiden sich H und $:H:$ durch eine Verschiebung aller Eigenwerte um die Nullpunktsenergie $1/2 \hbar \omega$; es ist

$$EW \quad H = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$EW \quad :H: = \hbar \omega n \quad (2')$$

Da H und $:H:$ hermitesche Operatoren sind, entsprechen sie, wie auch jede Linearkombination $\alpha H + \beta :H:$ (α, β reell, $\alpha + \beta = 1$), den allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik.

Der interessante Punkt ist nun, dass es Effekte gibt, bei denen die Nullpunktsenergie von Elementaranregungen physikalisch eine Rolle spielt. Hier werden wir vor allem zwei Beispiele eingehend diskutieren: den Sublimationsdruck (Phononen als Elementaranregungen) und den Casimir-Effekt (Photonen als Elementaranregungen). Weitere Beispiele sind in § 4 erwähnt.

Die Diskussionen um die Nullpunktsenergie (NPE) sind seit PLANCKs grundlegender Arbeit aus dem Jahre 1911⁴⁾ nie ganz verstummt und erhielten erst vor kurzem neuen Auftrieb durch die experimentelle Bestätigung des Casimir-Effekts durch SPARNAAY⁵⁾. Auch PAULI selbst war an dieser Frage mannigfach interessiert. Anfang der zwanziger Jahre hatte er in Hamburg lange Diskussionen mit OTTO STERN, der gegen PAULIS schwere Bedenken zu kämpfen hatte*). Noch im Sommer vor PAULIS Tod wurde die Frage der NPE in Zürich diskutiert, und PAULI steuerte verschiedene Argumente und historische Episoden aus seinem unerschöpflichen Schatz von Erinnerungen bei.

STERN stützte seine Argumente in den Diskussionen mit PAULI auf seine Berechnung der Dampfdruckunterschiede der Neonisotope 20 und 22, die leider nie publiziert worden ist**). Diese Sternsche Rechnung fand später ihren Niederschlag in PAULIS Kursvorlesung über statistische Mechanik⁸⁾. Wir geben hier die Paulische Formulierung wieder, da sie den Ausgangspunkt für unsere Diskussion in § 2 bildet.

Für den Sublimationsdruck p eines einatomigen Gases gilt bei hohen Temperaturen

*) Briefliche Mitteilung von O. STERN. Wir sind Herrn Prof. STERN für seine wertvollen biographischen Angaben aus dieser Zeit zu grossem Dank verpflichtet.

**) Siehe jedoch ASTON⁶⁾. ASTON hatte vergeblich versucht, diese Isotope durch Destillation zu trennen (genau genommen muss es sich um Adsorption gehandelt haben. Nach einer freundlichen Bemerkung von Herrn Prof. CLUSIUS). Wenn man ohne NPE rechnet, ergibt sich ein so grosser Unterschied, dass die Trennung ganz leicht hätte sein müssen (nach O. STERN). Wie PAULI vor allem betonte, war die Sternsche Rechnung noch in der Zeit der Quantentheorie der Phasenintegrale, d. h. vor der korrekten halbzahligen Quantisierung gemacht worden. Vgl. auch F. A. LINDEMANN⁷⁾.

$$\log p = -\frac{1}{2} \log T + i + 3 \log \frac{\hbar \omega}{k} + \frac{1}{kT} \left(-\lambda_0 + 3 \overline{e_0(\omega)} - \frac{3}{2} \hbar \bar{\omega} \right) \quad (3)$$

Hier bedeutet T die absolute Temperatur, i die chemische Konstante, k die Boltzmannsche Konstante, $\overline{f(\omega)}$ den folgenden Mittelwert der Funktion $f(\omega)$

$$\overline{f(\omega)} \equiv \frac{\sum_k f(\omega_k)}{\sum_k 1}, \quad (4)$$

wobei über alle Gitteroszillatoren k mit der Kreisfrequenz ω_k zu summieren ist. $-\lambda_0$ ist die potentielle Gitterenergie pro Atom, wenn sich die Atome in ihren klassischen Ruhelagen im Gitter befinden. $e_0(\omega_k)$ ist die Nullpunktsenergie des Gitteroszillators k . Nun sind für Isotope der Massen m und m' die Kräfte und somit die potentiellen Energien gleich, folglich auch λ_0 . Dagegen sind die Oszillatorfrequenzen verschieden: $\omega/\omega' = \sqrt{m'/m}$ in der harmonischen Näherung (vgl. § 2, Gl. (14)). Wenn nun $e_0(\omega) \neq 1/2 \hbar \bar{\omega}$ wäre, so müsste sich der Term $\sim 1/kT$ in (3) für Isotope unterscheiden. Experimentell findet man, dass dies nicht der Fall ist, und schliesst daraus, dass die NPE

$$e_0(\omega_k) = \frac{1}{2} \hbar \omega_k \quad (5)$$

beträgt.

Es stellt sich nun die Frage: Bedeutet dieses Resultat, dass nur die Wahl (1) für den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators richtig ist? Und wenn ja, folgt dies aus irgendwelchen theoretischen Überlegungen, oder kann die richtige Faktorordnung nur durch Vergleich mit der Erfahrung bestimmt werden? Das letztere würde allerdings heissen, dass die allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik nicht genügen, um beobachtbare Grössen wie den Sublimationsdruck eindeutig zu bestimmen, sondern dass noch empirische Zusatzvorschriften nötig sind. In § 2 werden wir diese Frage im negativen Sinne beantworten. Dabei werden wir uns von der in ⁸⁾ gemachten Debyeschen Näherung befreien, so dass das Resultat völlig allgemein gilt.

Dieselbe Frage stellt sich beim sogenannten Casimir-Effekt. Dabei handelt es sich um Kräfte elektromagnetischer Natur (Retardierungskorrektur zu den London-van-der-Waals-Kräften), die zwischen makroskopischen, elektrisch neutralen Körpern wirksam sind und die CASIMIR⁹⁾ aus der NPE des Strahlungsfeldes herleitete. Nach CASIMIR denkt man sich die makroskopischen Körper in einen Strahlungshohlraum eingeschlossen und berechnet die NPE des derart verstimmten Hohlraumes. Die potentielle Energie der Körper ist dann einfach die Differenz dieser NPE gegenüber der NPE des leeren Hohlraumes. Nun

erfolgte aber die ursprüngliche Herleitung des Effekts durch CASIMIR und POLDER¹⁰⁾ nach einer anderen Methode, nämlich durch störungstheoretische Berechnung des Austausches virtueller Photonen. Dies lässt uns jetzt schon vermuten, dass es beim Casimir-Effekt auf die Wahl zwischen (1) und (1') nicht ankommen kann. In § 3 werden wir dies in voller Allgemeinheit zeigen.

Die NPE der Strahlung hat nun aber im Vergleich zu derjenigen der Gitterschwingungen noch einen besonderen Aspekt: das Problem ihrer Gravitationswirkung. PAULI hatte diese Frage früh erkannt und, wie er uns sichtlich amüsiert mitteilte, in jungen Jahren auch eine entsprechende Rechnung angestellt. Das Resultat war, dass der Radius der Welt (bei Abschneidung der kurzen Wellenlängen beim klassischen Elektronenradius) «nicht einmal bis zum Mond reichen würde». Diese Rechnung hat unseres Wissens in PAULIS Arbeiten lediglich an einer Stelle eine schwache Spur hinterlassen¹¹⁾, war aber möglicherweise für die oben erwähnten Bedenken gegen O. STERNS Argumente von Bedeutung gewesen.

§ 2. Der Sublimationsdruck

Wir betrachten eine Substanz, bestehend aus N gleichen Atomen der Masse m . Ihr Hamiltonoperator sei

$$H = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{1}{2m} p_{\alpha}^2 + V(x_1, \dots, x_{3N}). \quad (6)$$

x_{α} sind die kartesischen Koordinaten und p_{α} die Komponenten der Impulse der Atome. Ein Teil der Substanz sei im gasförmigen, der andere im festen Zustand. Für die Atome im Gas, das wir einfachheitshalber als einatomig voraussetzen, vernachlässigen wir die potentielle Energie V , während wir für die Atome im festen Körper in üblicher Weise annehmen, dass wir die potentielle Energie um ihren Minimalwert V_0 herum nach den Auslenkungen der Atome aus den Gleichgewichtslagen entwickeln können. Unter Vernachlässigung von Oberflächeneffekten zwischen dem Gas und dem festen Körper spaltet sich H dann auf in

$$H = H_g + H_f, \quad (7)$$

wobei mit einer geeigneten Umbenennung der Indices α

$$H_g = \sum_{\alpha=1}^{3N_g} \frac{1}{2m} p_{\alpha}^2, \quad (8)$$

$$H_f = \sum_{\alpha=1}^{3N_f} \frac{1}{2m} p_{\alpha}^2 + V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3N_f} \sum_{\beta=1}^{3N_f} A_{\alpha\beta} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} + \dots \quad (9)$$

p_α sind die Impulskomponenten der N_g Teilchen im Gas und p'_α diejenigen der N_f Teilchen im festen Körper. Die ξ_α bezeichnen die kartesischen Koordinaten der Atome im festen Körper, von ihren Gleichgewichtslagen im Gitter aus gemessen, und es gelten natürlich wie für die ursprünglichen p_α und x_α die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[p'_\alpha, \xi_\beta] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

Durch eine orthogonale Transformation

$$\left. \begin{aligned} \xi_\alpha &= \sum_{k=1}^{3N_f} T_{\alpha k} Q_k, & p'_\alpha &= \sum_{k=1}^{3N_f} T_{\alpha k} P_k, \\ \sum_{\alpha} T_{\alpha k} T_{\alpha k'} &= \delta_{kk'}, & \sum_k T_{\alpha k} T_{\alpha' k} &= \delta_{\alpha\alpha'}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

können wir erreichen, dass in (9)

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta = \frac{1}{2} \sum_k a_k Q_k^2, \quad \sum_{\alpha} p'^2_\alpha = \sum_k P_k^2, \quad (12)$$

wobei nun P_k und Q_k zueinander kanonisch konjugiert sind, das heisst

$$[P_k, Q_{k'}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kk'}. \quad (13)$$

Mit $a_k = m \omega_k^2$ ($a_k > 0$, da V_0 das Minimum von V ist), schreibt sich (9) bei Vernachlässigung der Terme höheren als 2. Grades in den ξ_α

$$H_f = \sum_{k=1}^{3N_f} \frac{1}{2m} (P_k^2 + m^2 \omega_k^2 Q_k^2) + V_0; \quad (14)$$

es ist die Hamiltonfunktion von $3N_f$ unabhängigen harmonischen Oszillatoren mit den Eigenwerten

$$EW \quad H_f = \sum_{k=1}^{3N_f} \hbar \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) + V_0, \quad n_k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Die Anordnung der P_k und Q_k in (14) und damit das Auftreten der Nullpunktsenergie in (15) folgt direkt aus der ursprünglichen Stellung der Operatoren in (9) bzw. (6), da (14) durch die kanonische Transformation (11) mit (9) und (6) verknüpft ist.

Wenden wir nun die Methoden der statistischen Mechanik auf unser System an, so setzt sich seine freie Energie additiv zusammen aus der freien Energie F_f des festen Körpers und der freien Energie F_g des Gases. Für F_f erhält man

$$F_f = kT \sum_k \log \left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega_k}{kT}} \right) + \sum_k e_0(\omega_k) + V_0, \quad (16)$$

wobei wir $1/2 \hbar \omega = e_0(\omega)$ gesetzt haben. Für hohe Temperaturen ($\hbar \omega / k T \ll 1$ für alle Oszillatorfrequenzen ω) entwickeln wir

$$\log \left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega}{k T}} \right) = \log \frac{\hbar \omega}{k T} - \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega}{k T} + O \left(\frac{\hbar \omega}{k T} \right)^2. \quad (17)$$

Benützen wir noch die Definition (4) und setzen wir $V_0 = -N_f \lambda_0$, so wird

$$F_f = 3 N_f \left\{ k T \log \frac{\hbar \omega}{k T} - \frac{1}{2} \hbar \overline{\omega} + \overline{e_0(\omega)} \right\} - N_f \lambda_0. \quad (18)$$

Im Gleichgewicht zwischen fester und gasförmiger Phase gilt

$$\frac{\partial F_g}{\partial N_g} = \frac{\partial F_f}{\partial N_f}. \quad (19)$$

Verwenden wir für $\partial F_g / \partial N_g$ den Ausdruck für das ideale einatomige Gas

$$\frac{\partial F_g}{\partial N_g} = k T \left(\log p - \frac{5}{2} \log T - i \right), \quad (20)$$

$i = \log[(2 \pi m)^{3/2} k^{5/2} h^{-3}]$, so folgt aus (18), (19) und (20) die Gleichung (3) für den Sublimationsdruck, wobei aber, im Gegensatz zu ⁸⁾, die Debyesche Näherung nicht gebraucht wurde.

Ausgehend vom festen Körper, hätte man aber auch eine andere Anordnung der Faktoren in H_f , zum Beispiel die (1') entsprechende

$$:H_f: = \sum_{k=1}^{3 N_f} \frac{1}{2 m} (P_k + i m \omega_k Q_k) (P_k - i m \omega_k Q_k) = H_f - 3 N_f \overline{e_0(\omega)}, \quad (21)$$

wählen können. Dann erhält man durch Umkehrung der kanonischen Transformation (11) den Hamiltonoperator (9) mit dem Zusatz $-3 N_f \overline{e_0(\omega)}$, das heisst, das Potential V in (6) ist nun so normiert, dass bei grossen Abständen der Teilchen eine potentielle Energie $-3 \overline{e_0(\omega)}$ pro Teilchen übrig bleibt. Da (6) symmetrisch in allen Teilchen sein muss, tritt nun auch ein Term $-3 N_g \overline{e_0(\omega)}$ in der Hamiltonfunktion des Gases (8) auf. *Der Term $\sim \overline{e_0(\omega)}$ fällt also in F_f weg, dafür tritt aber ein Term $-3 N_g \overline{e_0(\omega)}$ in F_g auf, und man erhält wieder den Ausdruck (3) für den Sublimationsdruck.* Die Verallgemeinerung auf eine beliebige Linearkombination $\alpha H_f + \beta :H_f:$ ($\alpha + \beta = 1$) ist trivial.

§ 3. Der Casimir-Effekt

Es ist evident, dass durch Austausch virtueller Photonen im Prinzip Kräfte von makroskopischer Reichweite erzeugt werden. Dass diese in gewissen Fällen eine Rolle spielen können, wurde zuerst von CASIMIR und

POLDER¹⁰⁾ störungstheoretisch gezeigt. Physikalisch durchsichtig wurde der Effekt in der wenig später von CASIMIR⁹⁾ benützten Methode der Nullpunktsenergie, die wir in § 1 erwähnt haben *).

Die Casimirsche Methode ist indessen keineswegs auf Felder mit Masse Null (Photonen, Phononen) beschränkt. In der Tat hat WENTZEL¹³⁾ lange vor CASIMIR die Kräfte in der Mesonpaar-Theorie fester Quellen mit Hilfe der Nullpunktsenergie berechnet. Die vollständige Analogie zwischen dem Wentzelschen und dem Casimirschen Problem ist evident aus der Feststellung, dass die Quantenelektrodynamik fester nicht-relativistischer Ladungen wegen der A^2 -Wechselwirkung nichts anderes als eine Paartheorie ist¹⁴⁾.

Auf Grund der Formeln von ¹⁴⁾ ist es ein leichtes, die Unabhängigkeit der Wentzel-Casimir-Methode von der Stellung der Operatoren in der Hamiltonfunktion des freien Feldes zu zeigen. Die zur Diskussion stehende potentielle Energie ist in der Schreibweise von ¹⁴⁾

$$\frac{\hbar}{2} \sum_k (\Omega_k - \omega_k) = \langle 0 | H_0(P', Q') + H_1(P', Q') | 0 \rangle - \left. \begin{array}{l} \\ - \langle 0' | H_0(P', Q') | 0' \rangle. \end{array} \right\} \quad (22)$$

H_0 ist die Hamiltonfunktion des freien Feldes (Operatoren P', Q') in der Form (1), H_1 dessen Wechselwirkung mit den Quellen. $|0'\rangle$ bzw. $|0\rangle$ ist der Grundzustand von H_0 bzw. $H_0 + H_1$, das heisst das Vakuum des freien bzw. gekoppelten Feldes. $\hbar \omega_k$ bzw. $\hbar \Omega_k$ sind die Quanten des entsprechenden Feldes ($\hbar \times$ die Eigenfrequenzen des Hohlraumes).

Nun besteht zwischen dem freien und dem gekoppelten Feld eine kanonische Transformation A , welche entsprechende Zustände ineinander überführt; insbesondere ist

$$|0\rangle = A |0'\rangle. \quad (23)$$

Damit wird (22)

$$\frac{\hbar}{2} \sum_k (\Omega_k - \omega_k) = \langle 0' | A^+ H_0 A - H_0 + A^+ H_1 A | 0' \rangle. \quad (24)$$

Aus der expliziten Formel (siehe ¹⁴⁾)

$$A = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-i(H_0 + H_1)T} \cdot e^{iH_0 T} \quad (25)$$

ist ersichtlich, dass (24) invariant ist gegenüber der Transformation

$$H_0 \rightarrow H_0 + c \quad (26)$$

*) Für den Fall eines plattenförmigen, ideal reflektierenden Körpers hat FIERZ¹²⁾ eine elegante Ableitung nach der Casimirschen Methode gegeben.

(c beliebige c -Zahl), welche die Eigenvektoren invariant lässt. Von dieser Form ist aber der Übergang von H_0 zur Wickschen Ordnung $:H_0:$. Die Stellung der Operatoren in H_0 ist also belanglos.

Andererseits ist aber (24) nicht invariant gegenüber

$$H_1 \rightarrow H_1 + c, \quad (27)$$

so dass man H_1 zunächst nicht durch $:H_1:$ ersetzen kann *).

Der Zusammenhang mit der störungstheoretischen Methode (CASIMIR und POLDER¹⁰)) ergibt sich am einfachsten anhand der Schwingerschen Entwicklung von (25)

$$e^{-i(H_0 + H_1)T} e^{iH_0T} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_1(t_n) \dots H_1(t_1), \quad (28)$$

wo

$$H_1(t) = e^{-iH_0t} H_1 e^{iH_0t} \quad (29)$$

die Wechselwirkungsdarstellung von H_1 ist. Der Grundzustand in dieser Darstellung, $e^{-iH_0t} |0'\rangle$, ist oszillierend, wenn H_0 von der Form (1) ist, was die Interpretation der NPE als herrührend von Vakuum-Fluktuationen gestattet. Während diese Vakuum-Fluktuationen, Figur 1a, aber keinerlei physikalischen Effekt haben, tragen diejenigen der Wechselwirkung H_1 , Figur 1b, zur Selbstenergie der Quellteilchen bei, genau so wie die eigentlichen Selbstenergie-Graphen, Figur 1c.

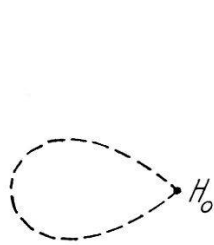


Fig. 1 a

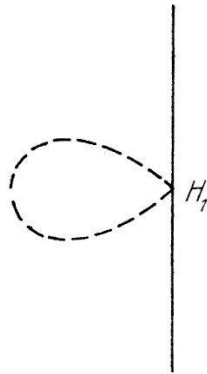


Fig. 1 b

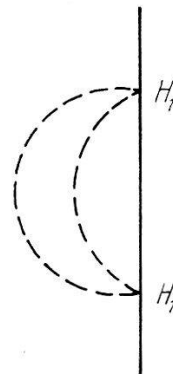


Fig. 1 c

Die Stellung der Operatoren in H_1 ist daher ebenfalls unwesentlich, insofern als solche Selbstenergien unbeobachtbar sind, das heisst durch eine Massenrenormalisation eliminiert werden können.

Bei den obigen Betrachtungen hatten wir immer die Paartheorien mit festen Quellen, insbesondere die Quantenelektrodynamik nicht-relativi-

*) Dies gilt für die Paartheorien. Bei einer 1-Photon- bzw. 1-Meson-Wechselwirkung (z. B. Elektrodynamik relativistischer Ladungen) ist natürlich $H_1 = :H_1:$.

stischer Ladungen, im Auge. Die Formulierung von (24), (25) ist jedoch so, dass sie für jede Feldtheorie mit kanonischen Vertauschungsrelationen Geltung hat. Jedoch ist natürlich die Frage nach den Kräften in einer relativistischen Feldtheorie wegen der Rückstösse nicht sehr sinnvoll.

§ 4. Weitere Beispiele

Mit den in § 2 und § 3 verwendeten Methoden lässt sich auch in den andern Fällen, wo die NPE harmonischer Oszillatoren experimentell nachgewiesen werden kann*), zeigen, dass die Wahl zwischen (1) und (1') (oder einer Linearkombination) keinen beobachtbaren Unterschied macht. So ergibt zum Beispiel nach § 2 die Berechnung der *Sublimationswärme* pro Atom am absoluten Nullpunkt immer $\lambda_0 - 3/2 \hbar \omega$, da es auch hier nur auf die *Energiedifferenz* zwischen den Teilchen im Gas und den Teilchen im Kristall ankommt. Wenn die Kräfte zwischen den Atomen einigermassen bekannt sind, so kann man λ_0 berechnen. Dann lässt sich die Differenz zwischen der Sublimationswärme und λ_0 experimentell nachweisen (sofern $3/2 \hbar \omega$ nicht allzu klein gegenüber λ_0 ist).

Ein etwas anderer Fall ist die *Streuung von Röntgenstrahlen oder Neutronen* an Kristallen. Die Tatsache, dass die von der thermischen Bewegung des Gitters herrührende Streuintensität am absoluten Nullpunkt nicht verschwindet, gibt keinen Aufschluss über die Energieeigenwerte der Gitteroszillatoren im Grundzustand. Was in die Rechnung eingeht, sind die Erwartungswerte $\langle Q_k^2 \rangle$ der Quadrate der Oszillatoramplituden¹⁶⁾; diese sind auch im Grundzustand immer von Null verschieden und unabhängig von der Wahl (1) oder (1') für H .

Wir sind Herrn Prof. K. CLUSIUS für wertvolle historische Hinweise zu grossem Dank verpflichtet. Herrn Dr. H. GRÄNICHEN danken wir für eine lehrreiche Diskussion über den Casimir-Effekt. Einer der Autoren (C. P. E.) dankt ganz besonders Herrn Prof. J. R. OPPENHEIMER, Direktor des Institute for Advanced Study, für die ihm gewährte Gastfreundschaft und finanzielle Unterstützung sowie dem Schweizerischen Nationalfonds für ein Forschungsstipendium.

Literaturverzeichnis

- 1) Siehe z. B. H. A. KRAMERS, Hand- und Jahrbuch der Chem. Phys. (Leipzig 1938), S. 108.
- 2) G. R. ALLCOCK und C. G. KUPER, Proc. Roy. Soc. A, 231, 226 (1955), insbes. S. 229; A. THELLUNG, Helv. Phys. Acta 29, 103 (1956), insbes. S. 114 und die vorangehende Diskussion der Renormalisation der Schallgeschwindigkeit.
- 3) G. C. WICK, Phys. Rev. 80, 268 (1950).

*) Eine Übersicht über Effekte, bei denen NP-Energien eine Rolle spielen, findet man bei K. CLUSIUS¹⁵⁾.

- ⁴⁾ M. PLANCK, Verh. dtsch, phys. Ges. *13*, 138 (1911).
- ⁵⁾ M. J. SPARNAAY, Physica *24*, 751 (1958).
- ⁶⁾ F. W. ASTON, Mass Spectra and Isotopes, 2. Aufl. (London 1941), S. 252.
- ⁷⁾ F. A. LINDEMANN, Phil. Mag. *37*, 523 (1919); *38*, 173 (1919).
- ⁸⁾ W. PAULI, Statistische Mechanik, ausgearbeitet von M. R. SCHAFFROTH, Verein der Mathematiker und Physiker an der ETH (Zürich 1947, 1951), S. 49, 50.
- ⁹⁾ H. B. G. CASIMIR, J. Chimie Phys. *46*, 407 (1949), Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. *B 51*, 793 (1948). Siehe auch H. G. VAN BUEREN, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. *B 55*, 493 (1952).
- ¹⁰⁾ H. B. G. CASIMIR und D. POLDER, Phys. Rev. *73*, 360 (1948).
- ¹¹⁾ W. PAULI, (Altes) Handbuch der Physik (Geiger und Scheel), 2. Aufl. *24*, Teil 1 (1933), S. 250.
- ¹²⁾ M. FIERZ, Helv. Phys. Acta, *33*, 855 (1960).
- ¹³⁾ G. WENTZEL, Z. Phys. *118*, 277 (1941); Helv. Phys. Acta *15*, 111 (1942).
- ¹⁴⁾ C. P. ENZ, Nuovo Cimento Suppl. *3*, 363 (1956).
- ¹⁵⁾ K. CLUSIUS, Die Chemie *56*, 241 (1943).
- ¹⁶⁾ Vgl. R. E. PEIERLS, Quantum Theory of Solids, Oxford (Clarendon Press), 1955.
Vgl. auch M. VON LAUE, Röntgenstrahl-Interferenzen (Leipzig 1941), S. 277 ff.