

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 33 (1960)  
**Heft:** II

**Artikel:** Widerstandsänderung von Metallen in hohen Magnetfeldern  
**Autor:** Lüthi, Bruno  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-113072>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Widerstandsänderung von Metallen in hohen Magnetfeldern

von Bruno Lüthi\*)

(Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik, ETH, Zürich)

(11. I. 1960)

*Abstract:* Measurements of the transverse and of the longitudinal magnetoresistance of polycrystalline metals in pulsed magnetic fields up to 220 000 Gauss are reported. The residual resistances of the different specimens vary between 1% and 0.01%. In the longitudinal case all metals investigated, except Li and Fe, show a well pronounced saturation in high fields. In the transverse case only Al and In show saturation behaviour, Cu, Ag and Au follow exactly a linear law, while the other metals Zn, Sn, Pb, Fe, Ni and Pt have a magnetic field dependence which lies between a linear and a quadratic law. A detailed comparison with existing theories (LIFSHITZ *et al.*) is made and it is found that the results can be understood at least in a qualitative way by making use of the concept of open orbits.

## I. Einleitung

Messungen des elektrischen Widerstandes in hohen Magnetfeldern sind in verschiedener Hinsicht interessant und aufschlussreich: Schon die ersten Experimente von KAPITZA<sup>1)</sup> zeigen Resultate, die in krassem Widerspruch zu den Ergebnissen der klassischen Theorie der Transportphänomene stehen. So konnte vor allem die beobachtete lineare Feldabhängigkeit der transversalen magnetischen Widerstandsänderung nicht erklärt werden. In den letzten Jahren wurden jedoch in der Theorie wesentliche Fortschritte erzielt und das experimentelle Tatsachenmaterial weitgehend vervollständigt. Damit scheint es heute, dass sämtliche Effekte im Rahmen einer klassischen Beschreibung mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung interpretiert werden können. Ein Hauptziel der vorliegenden Arbeit liegt darin, an Hand von neuen experimentellen Resultaten dies im einzelnen zu zeigen.

In einfacheren Fällen erhält man dann Aussagen über den topologischen Charakter der Fermifläche. Es lässt sich mit Hilfe der magnetischen Widerstandsänderung nicht die genaue Form dieser Fläche bestimmen, wie dies im Prinzip mit den bekannten Methoden (de-Haas-van-Alphen-Effekt, anomaler Skineffekt) möglich ist. Jedoch bleibt die magnetische Widerstandsänderung ein unerlässliches Hilfsmittel in speziellen Fällen, wie denen der Berührung von Fermifläche und Brillouin-Zonen-Ebene, bei denen die obigen Methoden versagen.

---

\*) Jetzige Adresse: Institute for the Study of Metals, University of Chicago.

Solche Messungen wurden bis heute praktisch nur für den Fall eines transversalen Magnetfeldes und für polykristalline Metalle durchgeführt. Auf einige neuere Arbeiten mit Einkristallen und für den longitudinalen Widerstand werden wir im Text zurückkommen. Die meisten Messungen hat KAPITZA<sup>1)</sup> durchgeführt, mit einer ähnlichen Technik wie wir sie verwenden, allerdings nur bei Temperaturen der flüssigen Luft. Daneben gibt es Arbeiten von JUSTI *et al.*<sup>2)</sup>, BOROVIK<sup>3)</sup> und CHAMBERS<sup>4)</sup> in stationären Magnetfeldern bei Temperaturen von flüssigem Helium. Mit unserer Messmethode, die leider nur für polykristalline Metalle anwendbar ist, sind wir bei der Widerstandsänderung im Transversalfeld mit vielen Metallen in noch höhere Feldregionen als bis anhin vorgestossen. Damit kennen wir das Hochfeldverhalten dieses Effektes genügend, um ihn richtig diskutieren zu können. Überdies haben wir auch das Verhalten der Widerstandsänderung in hohen longitudinalen Magnetfeldern gründlich aufgeklärt, von der bis heute nur ein Messergebnis an Kupfer<sup>5)</sup> vorlag.

In den nächsten zwei Kapiteln werden das Experiment erklärt und die dabei auftretenden Störeffekte diskutiert. Im folgenden Abschnitt zeigen wir unsere Messergebnisse; hierauf wird ein kurzer Abriss der Theorie gegeben. Im letzten Kapitel diskutieren wir die Resultate ausführlich.

## II. Experiment

Die Experimente wurden zum grossen Teil mit einer Hochfeldapparatur durchgeführt. Einige Messungen wurden zu Kontrollzwecken auch bei stationären niederen Magnetfeldern vorgenommen.

1. *Hochfeldapparatur.* Die Methode zur Erzeugung hoher pulsformiger Magnetfelder in der hier angewendeten Art wurde von OLSEN<sup>6)</sup> entwickelt. Sie ist eingehend beschrieben bei COTTI<sup>7)</sup>, weshalb wir uns hier kurz fassen dürfen. In Fig. 1 ist die Apparatur schematisch dargestellt.

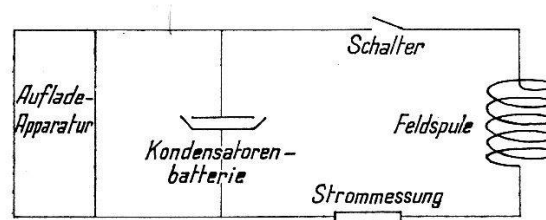


Fig. 1.

Prinzipschema der Hochfeldapparatur.

Die Kondensatorenbatterie besteht aus Elektrolyt-Kondensatoren von je 550  $\mu\text{F}$  zu 500 V. Als Entladeschalter dient ein Thyatron (TQ 2/12) oder ein Ignitron<sup>7)</sup>. Zur Verfügung standen zwei Apparaturen, eine von 1700 Joule, die andere von 5500 Joule Energie. Die erste Apparatur

wurde für Messungen mit Spulen, gekühlt durch flüssiges Helium, die zweite Apparatur für Messungen mit Spulen, gekühlt durch flüssige Luft, verwendet.

2. *Feldspulen.* Als Feldspulen dienten aus Kupferdraht gewickelte Solenoide, die mit Araldit durchtränkt und mit Glasfasern verstärkt, Beanspruchungen von elektromagnetischen Kräften bis zu Feldern von mehr als 300 kGauss standhielten. Es wurden im wesentlichen drei verschiedene Spulentypen verwendet: Eine mit flüssigem Helium gekühlte Spule I zur Messung der Widerstandsänderung im Transversalfeld, eine ebenfalls mit flüssigem Helium gekühlte Spule II zur Messung der Widerstandsänderung im Longitudinalfeld und eine mit flüssiger Luft gekühlte Spule III, bei der man ein schwanzförmiges Dewar einführen und damit Messungen sowohl bei 80° K, als auch bei 4° K ausführen kann. Spulentypus III wurde nur dort verwendet, wo man auf längere Pulsdauern angewiesen war. In Tabelle 1 sind charakteristische Daten der drei Spulentypen zusammengestellt.

**Tabelle 1**

Spulen- typus	Innen- durch- messer (cm)	Aussen- durch- messer (cm)	Länge (cm)	Anzahl Windungen	Entla- dungs- dauer (msec)	Maximales verwendetes Feld (kG)
I	0,5	1,8	3,6	1540	3	280
II	0,4	2,0	7,7	2100	6	220
III	1,0	5,2	8,2	3190	50	160

3. *Magnetfeldmessung.* Durch Messung des Spannungsabfalles eines niederohmigen Konstantendrahtes (kleiner Temperaturkoeffizient) in möglichst induktionsarmer Anordnung kann der Strom, der durch die Feldspule fließt, bestimmt werden. Das Magnetfeld in der Spule lässt sich dann einerseits aus der Spulengeometrie errechnen, andererseits mittels einer Induktionsspule mit Integrierglied direkt messen. Auf diese Weise kann man das Magnetfeld auf ca. 5% genau bestimmen. Die Feldinhomogenität längs der Spulenachse wurde berechnet. Wir wählten dann die Länge der zu messenden Probe so, dass die Feldinhomogenität längs der Probe weniger als 5% beträgt.

4. *Messung der magnetischen Widerstandsänderung.* Die Änderung des elektrischen Widerstandes im Magnetfeld wurde ursprünglich mit einer Wechselstrommethode gemessen<sup>8)</sup>. Dabei musste die Impedanz des Probensystems mit einer «Gegeninduktivitäts-Brücke» auskompensiert werden. Die Spannung konnte mittels eines Selektiv-Verstärkers in einem Zwei-Strahl-Oszillographen, zusammen mit dem Feldpuls, beobachtet werden.



Aus verschiedenen Gründen (s. III 2, 4), nicht zuletzt dem der Einfachheit, wurde später mit Gleichstrom gemessen. Das Prinzipschema dieser Methode ist in Fig. 2 dargestellt. Die Induktionsspannung, welche vom zeitlich veränderlichen Magnetfeld herrührt, wird durch ein ent-

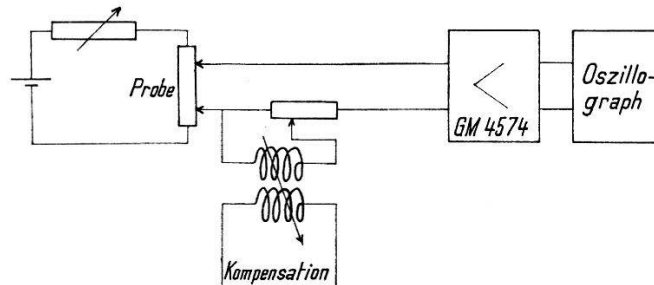


Fig. 2

Schema der Apparatur zur Messung der magnetischen Widerstandsänderung

gegengesetztes, aus dem Entladungskreis entnommenes Signal auskompensiert. Die kapazitive Kopplung zwischen Probe und Feldspule ist vernachlässigbar klein. Eine Phasenänderung des Pickupsignals, herrührend von der Kapazität der Feldspule, kann durch Verkleinern dieser Kapazität für die verwendeten Empfindlichkeiten immer vernachlässigbar klein gemacht werden. Als Vorverstärker verwenden wir den batteriegespeisten Philipsmessverstärker GM 4574. Dieser hat einen guten linearen Niederfrequenzgang, einen konstanten Verstärkungsfaktor von 100 und einen Geräuschpegel von  $\lesssim 10 \mu\text{Volt}$ , der im wesentlichen auch unsere Empfindlichkeit begrenzt. Der Zwei-Strahl-Oszillograph Dumont, Typ 333, mit eingebauter Kamera, ermöglicht eine gleichzeitige Aufnahme von Strompuls des Feldspulenkreises und Spannungspuls des Probenkreises.

Mit den verwendeten Reinheiten und Dimensionen (s. II 4) wird der ohmsche Widerstand der Proben  $\gtrsim \text{ca. } 20 \mu\Omega$ . Die Meßströme variierten zwischen 0,1 und 5 Ampère. Durch jeweilige Messung der Verstärkungsgrade von Vorverstärker und Oszillographen konnten die Spannungen absolut geeicht werden. Wegen den auftretenden Störeffekten (s. III) ist es sehr wichtig, den zeitlichen Verlauf der Spannungen zu kennen. Dazu ist eine Zweistrahlaufnahme (Widerstandsänderung – Zeit, Feldpuls – Zeit) geeigneter. Wenn keine Störeffekte auftreten, ist dagegen eine Einstrahlaufnahme (Widerstandsänderung – Feld) übersichtlicher. In den Experimenten wurden beide Arten von Aufnahmen verwendet. Die Messgenauigkeit bei diesen Experimenten war in ungünstigsten Fällen 10%, im allgemeinen aber ca. 5%.

5. *Proben.* Die Metalle wurden in Form von polykristallinen Drähten von 0,2–0,3 mm Durchmesser untersucht. Wir haben die folgenden Elemente untersucht: Li, Cu, Ag, Au, Zn, Al, In, Sn, Pb, Fe, Ni und Pt. Aus später noch zu erwähnenden Gründen musste grösstes Gewicht auf

eine gute Reinheit der Metalle gelegt werden. Es wurden deshalb (mit Ausnahme von Fe und Ni) nur spektroskopisch standardisierte Substanzen («Johnson Matthey» oder «Tadanac») verwendet; zudem wurden die Proben (mit Ausnahme von Li und In) vor dem Experiment einige Stunden getempert. Charakteristisch für die Reinheit des betreffenden Metalls ist das Restwiderstandsverhältnis  $R_0/R_{290^\circ}$ , das heisst das Verhältnis des elektrischen Widerstandes bei  $0^\circ \text{ K}$  zu dem bei Zimmertemperatur. In Tabelle II sind diese Restwiderstandsverhältnisse für die gemessenen Proben in % angegeben.

Tabelle 2

Li	Cu	Ag	Au	Zn	Al	In	Sn	Pb	Fe	Ni	Pt
0,43	0,7	0,29	0,61	0,06	0,04	0,007	0,01	0,02	3,19	2,03	0,51
0,47	1,27	0,37	0,79	0,09	0,05	0,02	0,02	0,03	3,95	3,63	1,23
		1,36	2,78	0,11	0,57		0,04				
				0,41							

Für die Messung der transversalen magnetischen Widerstandsänderung werden die Proben bifilar auf einen runden Plexiglasstab aufgewickelt und längs der Achse in das Solenoid eingeführt. Im longitudinalen Fall wird die Probe längs der Achse auf einen Plexiglasstab montiert. Die Probenlänge beträgt damit für die transversale Anordnung ca. 15 cm und für die longitudinale ca. 5 cm. Die Potentialsonden werden in allen Fällen durch Weichlöten mit der Probe verbunden und verdrillt aus der Feldspule hinausgeführt.

6. *Niederfeldapparatur.* Gewisse hochreine Substanzen wie Al, In, Sn und Pb wurden zu Kontrollzwecken auch in einem stationären Magnetfeld gemessen. Zur Verfügung stand ein Elektromagnet, der Felder bis 11 kG erzeugt. Die Spannungsmessungen führten wir mit Hilfe eines Galvanometerverstärkers<sup>9)</sup> aus. Sie bereiteten keine grösseren Schwierigkeiten; es soll deshalb nicht auf Einzelheiten eingegangen werden.

### III. Störeffekte

Bei der Messung der magnetischen Widerstandsänderung in pulsierten Feldern treten verschiedene Störeffekte auf. Es sind dies die folgenden:

1. Mechanische Schwingungen der Probe infolge der Biot-Savart-Kräfte.
2. Wirbelstromaufheizung. 3. Skin-Effekt. 4. Size-Effekt.

1. *Mechanische Schwingungen.* Ein stromdurchflossener Leiter erfährt im Magnetfeld eine Biot-Savart-Kraft, die ihn aus seiner Ruhelage bringen und dadurch Spannungen induzieren kann. Bei der ursprünglichen Wechselstrommethode führte der Draht periodische Schwingungen aus, die grosse Induktionsspannungen hervorriefen. Man kann diese Störungen weitgehend verhindern, indem man die Probe sorgfältig in Araldit

oder Prestolith einbettet. Allerdings wird dadurch, infolge mechanischer Spannungen, der Restwiderstand der Probe etwas erhöht. Zusätzlich treten durch Erschütterung des ganzen Feldspulensystems während der Kondensatorentladung weitere Induktionsspannungen auf. Diese können durch eine feste mechanische Bindung des Probehalters an die Feldspule verhindert werden. Mit all diesen Vorkehrungen blieb der Störeffekt der mechanischen Schwingungen von der Grössenordnung der Rauschspannung des Verstärkers.

2. *Wirbelstromaufheizung*. Der grösste aller Störeffekte ist die Joulesche Erwärmung, hervorgerufen durch die durch ein pulsiertes Magnetfeld induzierten Wirbelströme. Während die durch diese Wirbelströme entstehenden Feldinhomogenitäten noch vernachlässigbar klein sein können (für unseren Fall  $< 1\%$ ), erzeugen sie sehr grosse Aufheizeffekte. Diese haben in vielen Fällen dieselbe Grössenordnung wie die magnetische Widerstandsänderung.

Die Joulesche Leistung pro Volumeneinheit  $Q$  ist für den longitudinalen und den transversalen Fall von der gleichen Grössenordnung. Durch einfache Rechnung erhält man für  $Q$  eine Proportionalität zur Leitfähigkeit  $\sigma$  und eine quadratische Abhängigkeit vom Probenradius  $a$  und von der Magnetfeldänderung  $\dot{H}$ , das heisst  $Q \sim \sigma a^2 \dot{H}^2$ . Da eine grosse Leitfähigkeit sehr erwünscht ist, muss man, um die Heizleistung  $Q$  zu vermindern, zu möglichst kleinen Probendurchmessern und möglichst langen Feldpulsen übergehen.

Diese Wirbelstromaufheizung wurde in einer grossen Anzahl von Fällen beobachtet. So erwies sich zum Beispiel der Wiederanstieg der magnetischen Widerstandsänderung von Al in hohen Feldern als ein reiner Wirbelstromaufheizeffekt<sup>10)</sup>). Experimentell lässt sich der Aufheizeffekt für Metalle mit kleinem Grüneisen- $\theta$  sehr schön nachweisen, indem unmittelbar nach dem Feldpuls der elektrische Widerstand grösser ist als vor dem Feldpuls. Wegen der komplizierten Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes und der spezifischen Wärme ist eine rechnerische Korrektur dieses Aufheizeffektes zu ungenau. Ein besserer thermischer Kontakt zwischen Probe und Heliumbad, vor allem Messungen unterhalb des  $\lambda$ -Punktes von flüssigem Helium, vermindert jedoch diesen Effekt beträchtlich.

3. *Skin-Effekt*. Der Skin-Effekt ist bei unseren reinsten Proben verhältnismässig gross. So erhält man zum Beispiel für Cu mit einem Wechselstrom von 1 kHz und einem Restwiderstandsverhältnis von 0,1% eine Eindringtiefe von nur 0,06 mm. Dies ist der Hauptgrund, der zur Aufgabe der ursprünglichen Wechselstrommethode führte.

\*) Herrn Dr. D. SHOENBERG danke ich für die private Mitteilung seiner Messergebnisse der magnetischen Widerstandsänderung von Al, sowie für seine Unterstützung bei der Aufklärung dieses Störeffektes.

4. *Size-Effekt*. Falls die freie Weglänge der Elektronen mit den Probedimensionen vergleichbar wird, erfolgt infolge der zusätzlichen Wandstreuung eine Erhöhung des elektrischen Widerstandes. Da dieser Effekt auch eine Magnetfeldabhängigkeit zeigt<sup>11)12)</sup>, kann dadurch die magnetische Widerstandsänderung verfälscht werden. In hohen Feldern verschwindet er jedoch wieder, weil der Bahnradius der Elektronen umgekehrt proportional zum Magnetfeld ist; allerdings wird bei einer Darstellung in Funktion von  $\Delta R/R_0$  der Widerstand ohne Magnetfeld  $R_0$  verfälscht bleiben, weshalb  $R_0$  nachträglich auf den Widerstand eines dicken Drahtes umgerechnet werden muss.

5. *Messung der longitudinalen Widerstandsänderung*. Bei der Messung der longitudinalen magnetischen Widerstandsänderung tritt erschwerend der Umstand hinzu, dass für einige Metalle die transversale Widerstandsänderung um einige Zehnerpotenzen grösser sein kann als die longitudinale<sup>13)</sup>. Dies bedeutet, dass man die Probe äusserst genau parallel zum Feld richten muss, will man nicht eine grosse transversale Komponente mitmessen.

Der Vollständigkeit halber sei schliesslich noch erwähnt, dass bei unserer verwendeten Probenanordnung (Drahtdurchmesser  $\approx 0,3$  mm, Distanz zwischen den Potentialsonden  $\approx$  einige cm) keine Sonden-effekte<sup>14)</sup>, die von einer inhomogenen Stromverteilung herrühren, auftreten können.

#### IV. Resultate

In Fig. 3, 4 und 5 sind die Resultate der transversalen und der longitudinalen magnetischen Widerstandsänderung bei der Temperatur der flüssigen Luft und des flüssigen Heliums in einem sogenannten Justi-Kohler-Diagramm gesamthaft dargestellt. Dabei bedeuten  $\Delta R = R_H - R_T$  die Änderung des elektrischen Widerstandes im Magnetfeld,  $R_T$  der Widerstand ohne Feld bei der Temperatur  $T$  und  $R_\theta$  der Widerstand bei der Debye-Temperatur  $\theta$ .

Die Darstellung der Resultate in Funktion von  $H/R_T$  ist wegen der sogenannten Kohler-Regel angebracht (s. VI 1); die Einführung des Verhältnisses  $R_T/R_\theta$  erfolgt, um die verschiedenen Resultate normiert vergleichen zu können. Ein Teil dieser Resultate wurde schon an anderer Stelle in Kurzberichten publiziert<sup>13)15)</sup>. Die Messungen bei 80° K und bei 4° K überlappen sich für unsere Feldregionen nicht, der untere Ast der Kurven entspricht jeweils der Messung bei 80° K, der obere derjenigen bei 4° K.

Im longitudinalen Fall zeigen folgende Metalle ausgesprochenen Sättigungscharakter: Ag, Au, Zn, Al, In, Sn, Pb, Ni, Pt, ebenfalls auch Cu<sup>5)</sup>. Hingegen zeigen Li und Fe bis zu den bis heute gemessenen Feldern eine lineare Feldabhängigkeit.

Im transversalen Fall variiert die Feldabhängigkeit der magnetischen Widerstandsänderung in hohen Feldern für die verschiedenen Metalle sehr stark: Die drei einwertigen Metalle Cu, Ag, Au zeigen genau lineares Verhalten, einzig an Al und In beobachtet man ausgeprägte Sättigung.

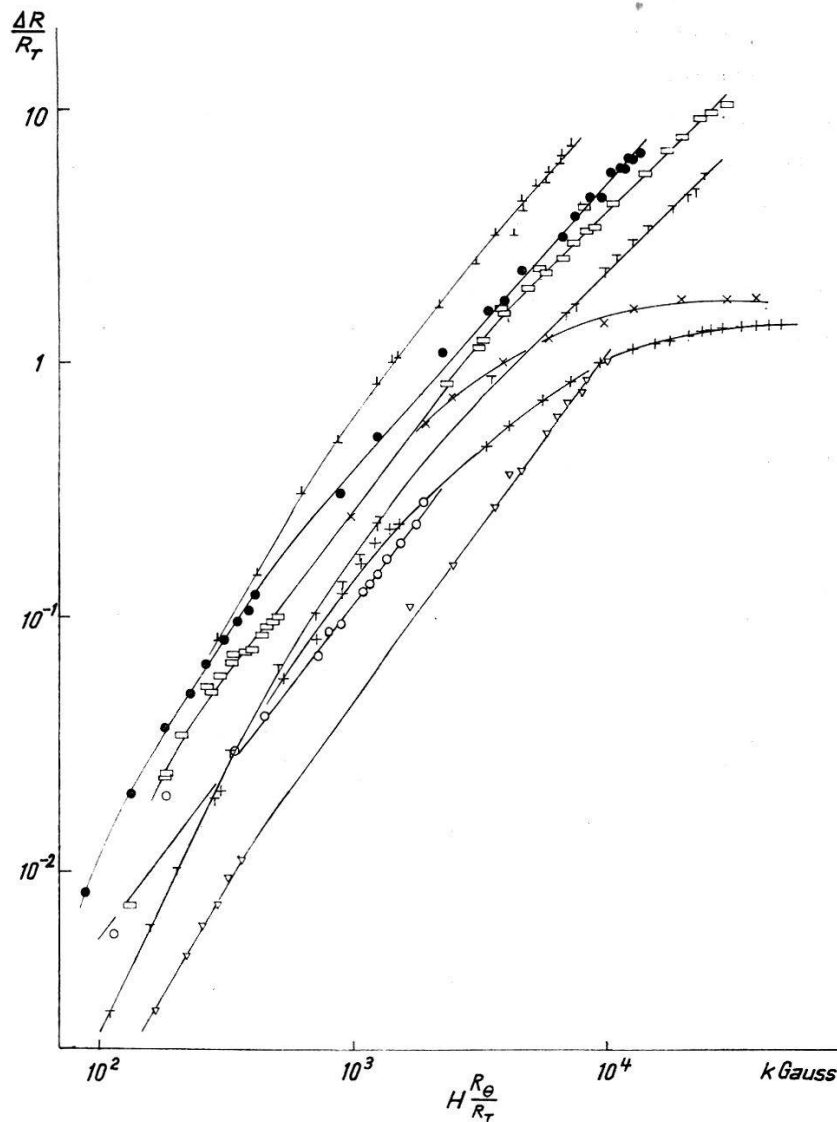


Fig. 3

Transversale magnetische Widerstandsänderung

$\top$  Cu (310)     $\square$  Ag (220)     $\bullet$  Au (320)     $\times$  In (100)  
 $+$  Al (410)     $\circ$  Ni (410)     $\nabla$  Pt (240)     $\perp$  Fe (355)

Die Zahlen in den Klammern geben die Debye-Temperatur des betreffenden Metalles an

Es soll nochmals darauf hingewiesen werden, dass eine früher publizierte Messung<sup>10)</sup> eines Wiederanstieges der Widerstandsänderung von Al auf einen Störeffekt zurückzuführen ist (s. III 3).

Die übrigen Metalle geben für die Feldabhängigkeit in hohen Feldern Exponenten in  $H$ , die zwischen 1 und 2 liegen. In Tabelle 3 sind die

Exponenten der Gleichung der transversalen Widerstandsänderung für hohe Felder dargestellt.

**Tabelle 3**

Cu	Ag	Au	Zn	Al	In	Sn	Pb	Fe	Ni	Pt
1	1	1	1,7	0,1	0	1,8	1,5	1,2	1,2	1,3

Für gewisse Metalle kamen schon andere Autoren<sup>2)3)4)</sup> mit reineren Proben und stationären Feldern in die Hochfeldregion. Mit Ausnahme von Au und Pb liegen jedoch ihre Messungen bei zum Teil doch beträchtlich niedrigeren Werten von  $H R_\theta/R_T$ , so dass wir uns für die Diskussion im wesentlichen nur auf unsere Resultate berufen müssen.

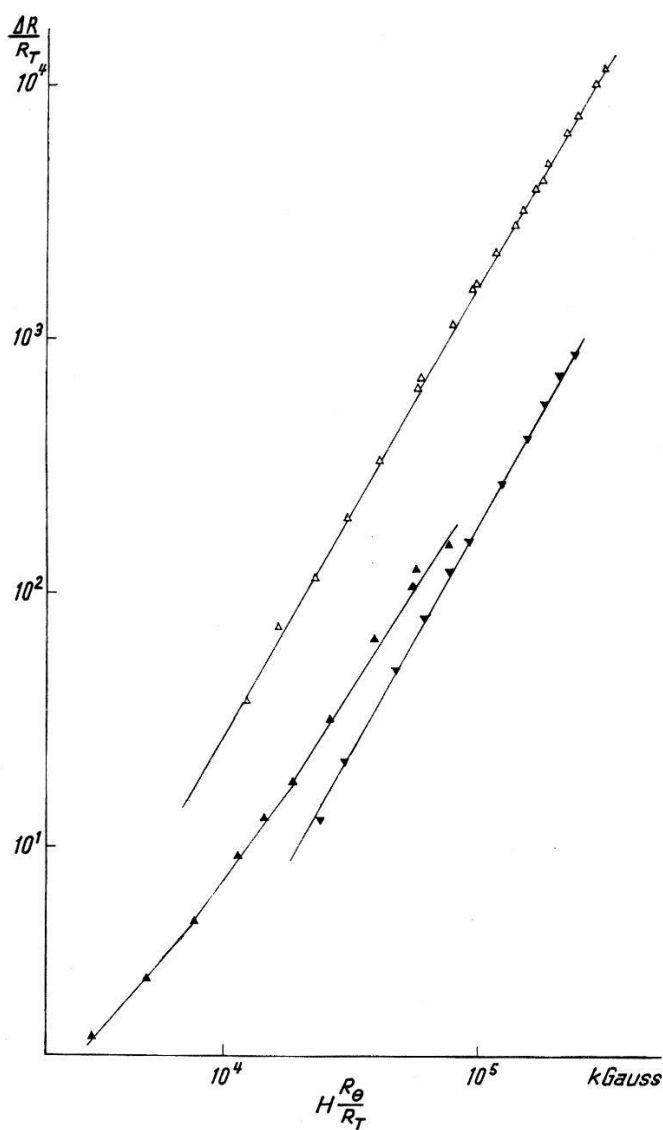


Fig. 4

Transversale magnetische Widerstandsänderung  
 $\Delta$  Zn (240)       $\nabla$  Sn (160)       $\blacktriangle$  Pb (90)



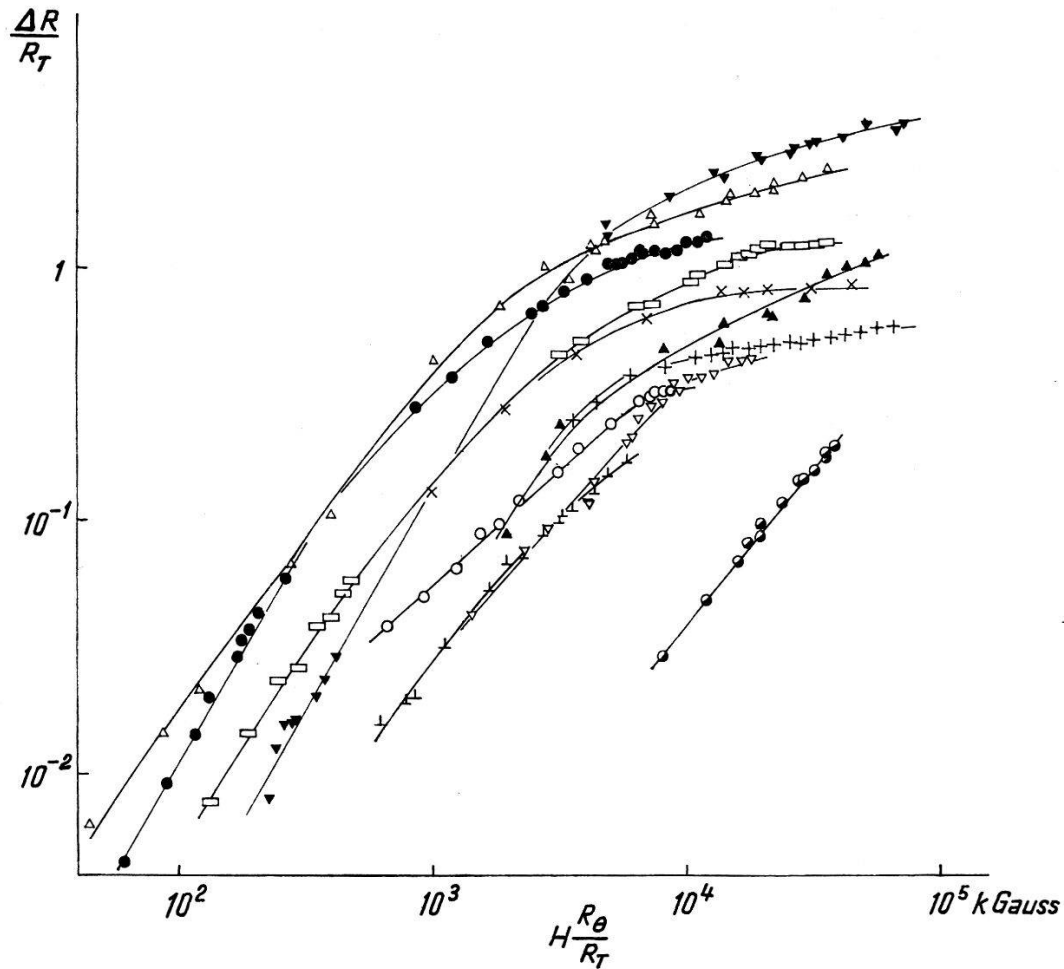


Fig. 5

Longitudinale magnetische Widerstandsänderung

• Li (430)	□ Ag (220)	• Au (320)
+ Al (410)	× In (100)	△ Zn (240)
▼ Sn (160)	▲ Pb (90)	⊥ Fe (355)
○ Ni (410)	▽ Pt (240)	

### V. Theorie

Ausgehend von der Boltzmanngleichung wird hier die Theorie der magnetischen Widerstandsänderung in hohen Feldern kurz skizziert. Eine solche Behandlung des Problems gibt zu verschiedenen ernsthaften Kritiken Anlass. Deshalb soll nach der Darlegung der Theorie in einem besonderen Abschnitt und bei der Diskussion der Resultate speziell auf diese Kritikpunkte eingegangen werden.

1. *Lösung der Boltzmanngleichung für grosse Magnetfelder.* Die Lösung der Boltzmanngleichung für grosse Magnetfelder wurde schon von verschiedenen Autoren<sup>4)16)17)</sup> angegeben. Die eleganteste und allgemeinste Darstellung ist wohl die von LIFSHITZ *et al.*<sup>17)</sup>.

Ein Kristallelektron wird bei Anwesenheit eines Magnetfeldes  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  an Stelle des Wellenzahlvektors  $\mathbf{k}$  zweckmässiger durch die drei Parameter  $E$  (Energie),  $k_z$  (Wellenzahlvektorkomponente in der

Magnetfeldrichtung) und  $\varphi$  (Phasenvariable, die den Ort des Elektrons auf seiner Bahn im  $\mathbf{k}$ -Raum bestimmt) beschrieben. Die Boltzmann-Gleichung wird in diesen Koordinaten zu:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \gamma W(\chi) = \gamma \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial E}$$

wobei  $\chi$  gemäss dem üblichen Ansatz für die Verteilungsfunktion  $f = f_0 - e \tau (\chi \cdot \mathbf{E})$  die Abweichung von  $f$  von der stationären Verteilungsfunktion  $f_0$  darstellt. Ferner ist  $\tau$  die mittlere Stosszeit,  $\mathbf{E}$  der elektrische Feldvektor,  $W$  der lineare Stossoperator,  $\mathbf{v} = 1/\hbar \text{grad}_{\mathbf{k}} E$  die Geschwindigkeit des Elektrons.  $\gamma = (1/\omega \tau)$  stellt ein Mass für die effektive Stärke des Magnetfeldes dar; die Larmorfrequenz  $\omega$  ist für eine gegebene Bahn konstant und proportional zum Magnetfeld. Ein Elektron vollführt auf seiner Bahn um so mehr Umläufe ohne gestreut zu werden, je grösser  $\omega \tau$  ist. Man entwickelt deshalb für hohe Felder  $\chi$  nach Potenzen von  $\gamma$ . Die Rechnung zeigt, dass im wesentlichen zwei Faktoren das Verhalten von  $\chi$  (und damit auch der Widerstandstensor) in hohen Feldern bestimmen: 1. Die Bahn des Elektrons im  $\mathbf{k}$ -Raum ist geschlossen oder offen. Im Falle von offenen Bahnen wird  $\omega = 0$ , das heisst die Entwicklung nach Potenzen von  $\gamma$  ist nicht mehr gestattet. 2. Der Mittelwert der Geschwindigkeitskomponente  $v_i$  des Elektrons längs einer Bahn verschwindet oder verschwindet nicht. Im letzteren Fall beginnen die Komponenten des Leitfähigkeitstensors mit der nullten Potenz in  $\gamma$ .

2. *Fall geschlossener Bahnen.* Im Falle geschlossener Bahnen ergibt die Rechnung für den Leitfähigkeits- und den Widerstandstensor in hohen Magnetfeldern<sup>17)</sup>:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{xx} \gamma^2 & a_{xy} \gamma & a_{xz} \gamma \\ a_{yx} \gamma & a_{yy} \gamma^2 & a_{yz} \gamma \\ a_{zx} \gamma & a_{zy} \gamma & a_{zz} \end{pmatrix} \quad (\varrho_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} \gamma^{-1} & b_{xz} \\ b_{yx} \gamma^{-1} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{pmatrix}$$

Dabei stellen  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  Konstanten dar, die in erster Näherung unabhängig von  $\gamma$  sind.

Man kann diese Feldabhängigkeit wie folgt verstehen: Die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum Magnetfeld  $\bar{v}_x$  und  $\bar{v}_y$  verschwinden für den Fall geschlossener Bahnen; jedoch nicht  $\bar{v}_z$ . Deshalb gilt  $\sigma_{xx} \sim \gamma^2$ ,  $\sigma_{yy} \sim \gamma^2$ , aber  $\sigma_{zz} \sim \gamma^0$ . Die Widerstandskomponenten  $\varrho_{xx}$  und  $\varrho_{yy}$  werden jedoch nicht proportional zu  $\gamma^{-2}$ , sondern zeigen wegen dem entstehenden Hallfeld eine Sättigung. Die Hallkonstante  $R$  wird in hohen Feldern zu  $R = 1/e c (n_+ - n_-)$ , wobei  $n_+$  die Zahl der Löcher pro Atom und  $n_-$  die Zahl der Elektronen pro Atom bedeutet. Die Hallkonstante ist somit unabhängig von der Richtung des Magnetfeldes zu den Kristallachsen und auch unabhängig vom Stossoperator.

Falls die Zahl  $n_+$  der Löcher gleich der Zahl  $n_-$  der Elektronen ist, wird das Hallfeld unabhängig vom Magnetfeld, die transversalen Wider-

standskomponenten deshalb proportional zu  $\gamma^{-2}$ , während  $\varrho_{zz}$  weiterhin eine Sättigung zeigt.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass man die Metalle in zwei Gruppen einteilen kann, wenn die Fermifläche nur geschlossene Bahnen zulässt. Die eine Gruppe, für die  $n_+ \neq n_-$  gilt, zeigt sowohl im transversalen als auch im longitudinalen Fall eine Sättigung der magnetischen Widerstandsänderung, in der zweiten Gruppe, mit  $n_+ = n_-$ , steigt die transversale Widerstandsänderung quadratisch mit dem Magnetfelde an.

3. *Fall offener Bahnen.* Sobald die Fermifläche die Brillouinzone berührt oder sogar stark überlappt, können für gewisse Magnetfeldrichtungen und bestimmte Werte für  $k_z$  neben geschlossenen auch offene Bahnen auftreten. Offene Bahnen erstrecken sich kontinuierlich durch den  $\mathbf{k}$ -Raum, während geschlossene Bahnen sich nach Durchlaufen von einer oder mehreren Zonen wieder schliessen (s. Beispiel in Fig. 6). Offene

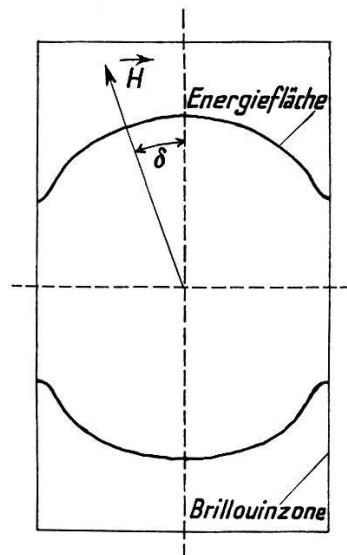


Fig. 6

Modell einer Energiefläche vom Typ des gewellten Zylinders

Bahnen bewirken, dass die Komponenten des Leitfähigkeits- und des Widerstandstensors in hohen Feldern eine vom Falle geschlossener Bahnen ganz verschiedene Feldabhängigkeit zeigen. Rechnungen mit offenen Bahnen wurden bis heute von ZIMAN<sup>18)</sup> für den speziellen Fall einer zylinderförmigen Fermifläche und von LIFSHITZ und PESCHANSKII<sup>19)</sup> für allgemeinere Typen von Energieflächen durchgeführt. Wir untersuchen hier den Fall des gewellten Zylinders<sup>19)</sup> (s. Fig. 6)

Für grosse Winkel  $\delta$  können nur geschlossene Bahnen auftreten; die Leitfähigkeits- und Widerstandskomponenten ergeben dann dasselbe asymptotische Verhalten wie bei geschlossenen Energieflächen. Wenn sich das Magnetfeld senkrecht zur Zylinderachse einstellt, das heisst, wenn

gilt  $\delta \ll 1$ , werden die Bahnen ausgedehnter. Für solche Bahnen wird die Umlauffrequenz  $\omega \approx \delta \omega_0$ , wobei  $\omega_0$  die Larmorfrequenz für geschlossene Bahnen bedeutet. Von den Geschwindigkeitskomponenten wird jetzt auch der Mittelwert von derjenigen von  $v_y$  von Null verschieden ( $y$ -Richtung senkrecht zur Magnetfeldachse und zur Zylinderachse). Für die Leitfähigkeitskomponenten folgt

$$\sigma_{xx} \sim \gamma^2, \sigma_{zz} \sim \gamma^0, \sigma_{xy} \sim \gamma$$

aber

$$\sigma_{yy} \sim \frac{a_1 \gamma^2}{\delta^2 + a_2 \gamma^2}$$

Dreht man das Koordinatensystem so um die  $z$ -Achse, dass die Stromrichtung mit der neuen  $x$ -Richtung zusammenfällt, so wird das Hallfeld  $\varepsilon_y$  zu

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{b_1 \delta^2 + b_2 \gamma}{\gamma}$$

und die transversale magnetische Widerstandskomponente  $\varrho_{\perp}$  zu

$$\varrho_{\perp} = \frac{c_1}{\delta^2 + c_2 \gamma^2} + c_3$$

Die longitudinale Komponente  $\varrho_{II}$  ist weiterhin unabhängig von  $\gamma$  ( $a_i, b_i, c_i$  sind Konstanten, die in erster Näherung von  $\gamma$  und  $\delta$  unabhängig sind). Für  $\delta = 0$  steigt somit  $\varrho_{\perp}$  quadratisch mit dem Felde an,  $\varepsilon_y/\varepsilon_x$  ist in diesem Falle feldunabhängig. Alle diese Gesetzmässigkeiten bleiben bei Vorhandensein von weiteren geschlossenen und offenen Bahnen bestehen, solange nicht für dieselbe Magnetfeldrichtung offene Bahnen auch in anderen Richtungen existieren.

4. *Zur Anwendbarkeit der Boltzmann-Gleichung.* Wir untersuchen hier, inwiefern die Voraussetzungen der Anwendbarkeit der Boltzmann-Gleichung für den Fall hoher Magnetfelder erfüllt sind:

Um den Begriff des Wellenpaketes anwenden zu können, muss die Wellenpaketausdehnung viel kleiner als die mittlere freie Weglänge sein, das heisst es muss gelten  $\hbar/\tau \ll \zeta$  ( $\tau$  mittlere Stosszeit,  $\zeta$  Fermienergie). Diese Bedingung ist für Metalle immer erfüllt, nicht aber für Legierungen.

Damit man aber auch von einem Teilchen auf einer im Magnetfeld gekrümmten Bahn sprechen kann, muss verlangt werden, dass die Wellenpaketausdehnung viel kleiner als der Bahnradius ist. Diese Voraussetzung lässt sich umformen zu  $\mu H \ll \zeta$  ( $\mu$  = magnetisches Moment des Kristallelektrons); sie ist bei unseren Feldern von etwa  $10^5$  Gauss für Metalle immer noch gut erfüllt. Die sogenannte Quanten Limite, bei der sich die Elektronen im wesentlichen im tiefsten Oszillatorniveau befinden, wird erst bei Feldern von ca.  $10^9$  Gauss erreicht.

Mit Hilfe des Ehrenfest-Theorems lässt sich zeigen, dass die Bewegung eines Wellenpaketes auch bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes der Bewegung eines klassischen Teilchens äquivalent ist<sup>20)</sup>. Dass dies sogar für ein Kristallelektron gilt, wurde von LUTTINGER<sup>21)</sup> nachgewiesen. Es stellt sich dabei heraus, dass keine Bedingung der Art  $\omega \tau \ll 1$  auftritt; diese beruht vielmehr auf einer unkorrekten Abschätzung<sup>22)</sup> (siehe dazu auch CHAMBERS<sup>4)</sup>).

Für die periodische Bewegung des Wellenpaketes im Magnetfeld lässt sich korrespondenzmässig die Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsregel anwenden, die die Oszillatorniveaus  $(n + \theta) \mu H$  beschreibt ( $0 < \theta < 1$ ). Diese Methode ist für  $n \gg 1$  gültig (in unserem Falle ist  $n \approx 10^3$ ). Sie ist nicht mehr anwendbar, wenn auch die Wellenpaketvorstellung nicht mehr richtig ist: das heisst im Falle der Quantenlimite. LIFSHITZ<sup>23)</sup> entwickelte auf dieser Grundlage eine quantenmechanische Theorie der magnetischen Widerstandsänderung. Er zeigte, dass die auftretenden Oszillationen in der magnetischen Widerstandsänderung, im Bereiche, wo  $\mu H \gtrsim k T$  gilt (de Haas-Shubnikov-Effekt), klein sind, verglichen mit der oben diskutierten gewöhnlichen magnetischen Widerstandsänderung. Dies ist in Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten<sup>24)</sup>.

## VI. Diskussion

Ein Vergleich zwischen unseren experimentellen Resultaten und den Ergebnissen der unter V skizzierten Theorie ergibt folgendes:

Bei der longitudinalen magnetischen Widerstandsänderung zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Ausser Li und Fe sättigt sich der Widerstand in einem Longitudinalfeld bei allen bis heute gemessenen Metallen (Fig. 5). Andererseits ergeben auch alle besprochenen Energieflächenmodelle eine Sättigung.

Nach der Theorie muss sich die transversale magnetische Widerstandsänderung in hohen Magnetfeldern entweder sättigen oder quadratisch vom Felde abhängen. Unsere Messungen zeigen jedoch eine viel kompliziertere Feldabhängigkeit (s. Tab. 3).

Wir untersuchen nun die Gründe, die möglicherweise diese Diskrepanz hervorrufen. Nach den Ausführungen in V 4 dürfte die dort dargelegte Theorie in ihren Grundzügen richtig sein. Die folgenden Punkte müssen aber noch eingehender besprochen werden: 1. Die Gültigkeit der Kohler-Regel. 2. Die Annahme einer magnetfeldunabhängigen Stosszeit. 3. Der Einfluss der verschiedenen Orientierungen der Mikrokristalle im polykristallinen Metall.

1. *Kohler-Regel.* Nach der sogenannten Kohler-Regel<sup>25)</sup> ist die magnetische Widerstandsänderung für ein Metall einzig eine Funktion von  $H/R_0$ , wobei  $R_0$  den Widerstand ohne Magnetfeld bedeutet. Damit lassen sich Messungen bei verschiedenen Temperaturen und von verschiedenen reinen



Metallen als Funktion von  $H/R_0$  allein darstellen. Aus der Boltzmann-Gleichung ist sofort ersichtlich, dass diese Regel bei Annahme einer isotropen Relaxationszeit erfüllt ist. Dies gilt auch für den Fall hoher Magnetfelder, wo alle Grössen nach  $1/\omega \tau$  entwickelt werden, also nur von  $\omega \tau$  abhängen. Unsere Messresultate in Fig. 3, 4, 5 zeigen, dass innerhalb der Messgenauigkeit diese Regel gültig zu sein scheint.

Eine Ausnahme bildet Li (s. Fig. 7). Hier ergibt die Kohler-Darstellung für Messungen bei 80° K und 4° K zwei sich nicht deckende Kurven.

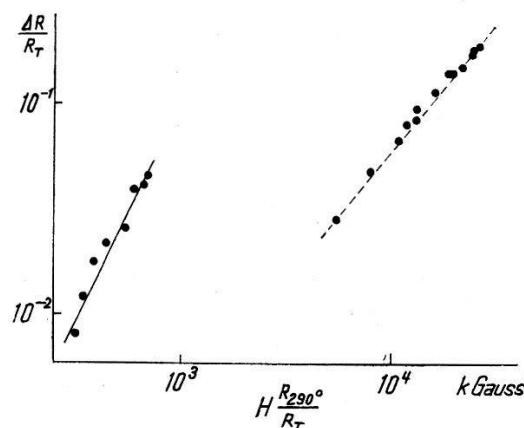


Fig. 7

Longitudinale magnetische Widerstandsänderung von Li

— Messungen bei 80° K  
 --- Messungen bei 4° K

Dieses Verhalten ist sehr wahrscheinlich auf die bei etwa 75° K stattfindende Phasentransformation zurückzuführen<sup>26)27)</sup>, bei der sich etwa 50% der kubisch raumzentrierten Struktur in die hexagonale Struktur umwandelt. Nach unseren Messungen muss dann die Fermifläche der hexagonalen Struktur viel sphärischer sein, als diejenige der Hochtemperatur-Struktur, verkleinert sich doch  $\Delta R/R_T$  bei gleichem  $H R_{290^\circ}/R_T$  beim Übergang von 80° K zu 4° K beträchtlich.

Eine weitere Verletzung der Kohler-Regel kann beim Size-Effekt auftreten. Wenn sich jedoch dieser nur in einer Änderung von  $R_0$  bemerkbar macht, nicht aber in  $\Delta R$ , kann sie durch Umrechnen von  $R_0$  auf den Wert eines dicken Drahtes leicht behoben werden, wie schon unter III 5 ausgeführt wurde.

Eine möglicherweise starke Verletzung der Kohler-Regel kann in Fällen, wo der Streumechanismus sehr anisotrop ist, auftreten. Offenbar wird aber dieser Effekt bei polykristallinem Material infolge der Mittelung über alle Raumrichtungen praktisch vollständig ausgeschmiert.

Für isotrope Stosszeiten sollte nach der Theorie die Kohler-Regel für alle Komponenten des Widerstandstensors gültig sein, im Speziellen auch für die Hallkonstante  $R$ . Wegen der grossen Streuung in den experimen-



tell bestimmten Hallkoeffizienten  $R$  ist es jedoch schwierig, die Kohler-Regel auch für  $R$  nachzuprüfen. Für Al scheint sie gut erfüllt zu sein<sup>28)</sup>.

Zusammenfassend darf man sagen, dass die Kohler-Regel innerhalb der Grenzen ihrer Anwendbarkeit durch das Experiment bestätigt zu sein scheint.

2. *Feldabhängigkeit der Stosszeit.* In der unter V dargelegten Theorie der magnetischen Widerstandsänderung wurde das in der Boltzmann-Gleichung auftretende Stossintegral als von äusseren Feldern unabhängig angenommen. Ist diese Annahme gerechtfertigt? Theoretische Untersuchungen<sup>29)30)</sup>, allerdings mit einschränkenden Voraussetzungen, ergeben für die Relaxationszeit  $\tau_H$  in Anwesenheit eines zum Strome senkrechten Magnetfeldes folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{\tau_H} = \frac{1}{\tau_0} \left( 1 + \alpha \frac{\mu H}{\zeta} + \text{oszillatorische Glieder} \right)$$

( $\tau_0$  = Relaxationszeit ohne Feld,  $\alpha$  = Konstante, nur abhängig vom Streumechanismus,  $\alpha \approx 1$ ). Diese Form gilt sowohl für die Elektron-Phonon-Streuung, wie auch für die Streuung von Elektronen an Kristalldefekten. Auch für unsere höchsten Felder gilt immer noch  $\mu H \ll \zeta$ . Es ist deshalb aus rein theoretischen Gründen sehr unwahrscheinlich, dass die Feldabhängigkeit des Stossintegrals mitberücksichtigt werden muss.

Zur Prüfung dieser Frage wurde folgendes Experiment durchgeführt: Man misst in der Hochfeldregion (das heisst, wo  $\omega \tau \gg 1$  gilt) die magnetische Widerstandsänderung in Fällen von reiner Elektron-Phonon- und reiner Elektron-Kristalldefekt-Streuung. Falls die Feldabhängigkeit des Streumechanismus einen Einfluss hat, sollte dies in einer verschiedenen Feldabhängigkeit der magnetischen Widerstandsänderung für die beiden Fälle, oder mindestens in einer starken Verletzung der Kohler-Regel zum Ausdruck kommen. Fig. 8 zeigt Messungen der transversalen magnetischen Widerstandsänderung von Cu, Ag und Au bei 80° K und 4° K, also in Bereichen mit praktisch reiner Elektron-Phonon- und reiner Restwiderstands-Streuung. Mit Messungen bei 80° K erreicht man mit unseren Feldern noch nicht den eigentlichen Hochfeldbereich, jedoch ist die Feldabhängigkeit schon dieselbe wie für die Messungen bei 4° K. Ausserdem ist die Kohler-Regel innerhalb der Messgenauigkeit gut erfüllt. Man darf also sagen, dass auch die experimentellen Resultate keinerlei Hinweise für eine feldabhängige Stosszeit geben.

3. *Widerstandsänderung eines polykristallinen Metalls.* Die unter V skizzierte Theorie gilt nur für Einkristalle. Wie in V 3 gezeigt wurde, kann wegen des Auftretens von offenen Bahnen die magnetische Widerstandsänderung sehr empfindlich von der Richtung des Magnetfeldes zu den Kristallachsen abhängen. Für ein polykristallines Metall hat man bei gegebenem äusseren Magnetfeld eine Mittelung über alle möglichen

Kristallorientierungen auszuführen. Es ist jedoch schwierig zu entscheiden, wie man zu mitteln hat. Bis heute ist es noch nicht gelungen, ein richtiges Mittelungsverfahren anzugeben. Man muss bedenken, dass der Leitfähigkeitstensor eines Einkristalles bei Anwesenheit eines Magnet-

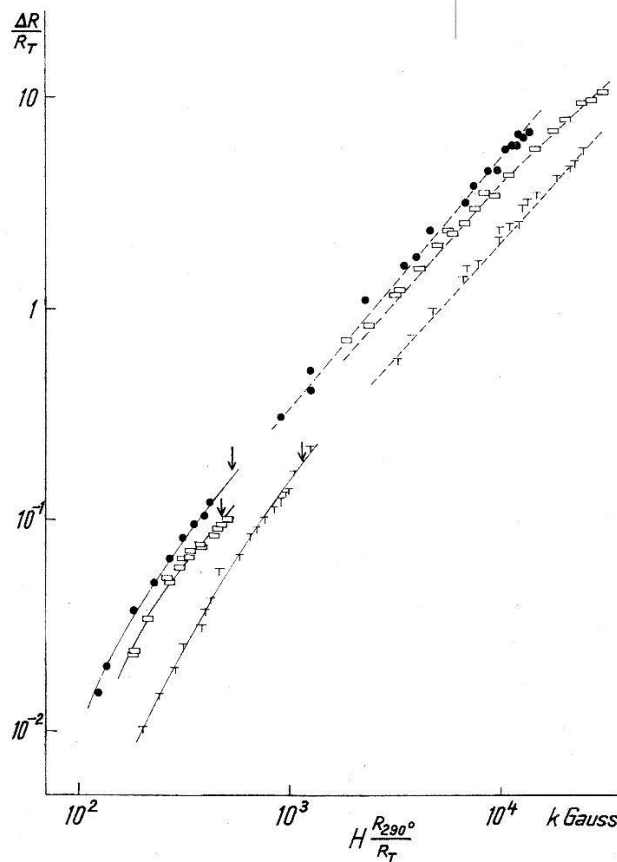


Fig. 8

Transversale magnetische Widerstandsänderung der einwertigen Metalle

△ Cu   □ Ag   ● Au

— Messungen bei  $80^\circ \text{ K}$

--- Messungen bei  $4^\circ \text{ K}$

Die Pfeile ↓ geben die Stelle  $\omega\tau = 1$  an

feldes nicht symmetrisch ist; zudem sind die Tensorkomponenten komplizierte Funktionen des Winkels zwischen der Magnetfeldrichtung und den Kristallachsen. Deshalb untersuchen wir im folgenden für gewisse Energieflächenstrukturen verschiedene Arten von Mittelungen, die nicht weiter begründet werden können. Wenn diese Mittelungsprozesse auch im besten Falle nur eine Approximation des wirklichen Verhaltens eines polykristallinen Metalles geben, kann trotzdem wenigstens abgeschätzt werden, wie stark sich die Widerstandsänderung eines polykristallinen Metalles von der eines Einkristalles unterscheidet.

a) Energieflächen, bei denen nur geschlossene Bahnen auftreten: Falls  $n_+ \neq n_-$  gilt, das heisst, wenn die Anzahl Löcher pro Atom verschieden

ist von der Anzahl Elektronen pro Atom und wenn zudem für alle Magnetfeldrichtungen nur geschlossene Bahnen möglich sind, dann sättigen sich im Einkristall die Transversalkomponenten des Widerstandstensors in hohen Magnetfeldern für alle Feldrichtungen. Eine Mittelung über alle Kristallorientierungen für das polykristalline Metall muss dann unabhängig vom Mittelungsverfahren ebenfalls eine Sättigung der magnetischen Widerstandsänderung ergeben. Dieser Fall dürfte für die Metalle Al und In zutreffen, deren Widerstand in hohen Feldern ausgeprägte Sättigung zeigt. Für Al ist dies in Übereinstimmung mit anderen experimentellen Daten und dem heute als richtig anerkannten Modell der Fermifläche<sup>28)</sup>.

Falls  $n_+ = n_-$  gilt und weiterhin nur geschlossene Bahnen auftreten, hängt die transversale Widerstandskomponente für einen Einkristall quadratisch vom Magnetfeld ab. Sowohl die Mittelung des Leitfähigkeits- als auch des Widerstandstensors ergibt ebenfalls eine quadratische Feldabhängigkeit. Nach Tabelle 3 befolgt keines unserer Metalle diese Gesetzmässigkeit. Sie wäre aber zu erwarten für Metalle, deren Energiebänder nur sehr wenig überlappen und die ohne eine solche Überlappung zu Isolatoren würden. Nach Messungen von JUSTI *et al.*<sup>2)</sup> könnten die Metalle Cd und Be sich so verhalten.

b) Energieflächen vom Typus des gewellten Zylinders: Diesen Fall haben wir schon in V 3 untersucht. Das Besondere dieser Energiefläche ist das singuläre Verhalten der transversalen magnetischen Widerstandsänderung für Feldrichtungen senkrecht zur Zylinderachse. Mittelt man den Leitfähigkeitstensor<sup>18)</sup> oder den Widerstandstensor<sup>19)</sup> über alle Raumrichtungen, so erhält man für die transversale magnetische Widerstandsänderung eine lineare Feldabhängigkeit. Dies rührt davon her (s. V 3), dass der Winkelbereich, in welchem der Widerstand quadratisch vom Felde abhängt, umgekehrt proportional zum Feld kleiner wird.

Man könnte versuchen, damit die transversale magnetische Widerstandsänderung der einwertigen Metalle Cu, Ag und Au zu erklären. Dazu muss die Fermifläche die Brillouinzone in der (111)-Richtung berühren oder überlappen. Messungen des anomalen Skin-Effektes haben für Cu eine solche Fermifläche wahrscheinlich gemacht<sup>31)</sup>. Nach kürzlich erfolgten Messungen der transversalen magnetischen Widerstandsänderung von Au-Einkristallen in hohen stationären Feldern<sup>32)</sup> muss auch die Fermifläche von Au dasselbe Verhalten zeigen. Die Mittelung der Komponenten des Widerstandstensors entspricht experimentell dem Fall, bei dem die Mikrokristallgrösse von der Grössenordnung des Drahtdurchmessers ist. Bei unseren Drähten sind die Mikrokristalldurchmesser etwa 0,04 mm, der Drahtdurchmesser 0,2 mm, diese Bedingung ist also nicht ganz realisiert.

In den obenstehenden Ausführungen hat man die Durchdringung der vier gewellten Zylinder, die die Fermifläche eines einwertigen kubisch flächenzentrierten Metalles bestimmen, vernachlässigt. Berücksichtigt man sie, dann existiert ein endliches Raumwinkelgebiet von Magnetfeldrichtungen, für die weitere offene Bahnen existieren. Diese haben wiederum eine quadratische Feldabhängigkeit der transversalen magnetischen Widerstandskomponenten zur Folge<sup>19)</sup>. Die Mittelungen des Leitfähigkeits- und des Widerstandstensors ergeben nun wegen dem endlichen Raumwinkelgebiet keine lineare, sondern eine quadratische Feldabhängigkeit. Die schon erwähnten Messungen von ALEKSEEVSKII und GAIDUKOV<sup>32)</sup> an Au-Einkristallen bestätigen die in V gezeigten theoretischen Ergebnisse für Einkristalle sehr schön, weshalb sehr wahrscheinlich ein richtiges Mittelungsverfahren die lineare Feldabhängigkeit der transversalen magnetischen Widerstandsänderung erklären würde.

c) Energieflächen für mehrwertige Metalle: Wir versuchen die Feldabhängigkeit der Widerstandsänderung der Metalle Zn, Sn und Pb zu interpretieren (s. Tab. 3). Die Tatsache, dass die Widerstandsänderung weder quadratisch vom Felde abhängt, noch sich sättigt, kann durch die Existenz offener Bahnen erklärt werden. Diese Annahme ist kürzlich durch Messung der magnetischen Widerstandsänderung von Sn- und Pb-Einkristallen bestätigt worden<sup>33)</sup>. Für diese Metalle sollte die Fermifläche topologisch nicht von den unter b) besprochenen Fällen verschieden sein; jedoch kann das Auftreten von zwei Sorten von Ladungsträgern das Hallfeld und damit auch den Widerstand beeinflussen. Für den unter a) besprochenen Fall, wo  $n_+ = n_-$  gilt (nur geschlossene Bahnen), hängt der Widerstand quadratisch vom Felde ab. Falls nur eine Sorte von Ladungsträgern offene Bahnen aufweist, kann als eine Folge von  $\int S(\varphi, k_z) dk_z = \pm (V_B - V_i)$  ( $S$  Querschnittfläche der Fermifläche senkrecht zum Magnetfeld,  $V_B$  Volumen der Brillouinzone,  $V_i$  Volumen des von der Fermifläche und der Brillouinzone begrenzten Körpers) wieder ein Hallfeld aufgebaut werden. Die Mittelungen des Leitfähigkeits- und des Widerstandstensors ergeben dann die in b) diskutierten Resultate. Wenn andererseits bei beiden Sorten von Ladungsträgern offene Bahnen möglich sind, verschwindet das Hallfeld wiederum, die Mittelungen ergeben eine quadratische Feldabhängigkeit für den Widerstand. Diese einfachen Mittelungsverfahren ergeben also auch hier nicht die beobachteten Feldabhängigkeiten.

d) Übergangsmetalle: Der Widerstand der Metalle Fe, Ni und Pt zeigt eine etwas weniger starke Feldabhängigkeit als der der übrigen mehrwertigen Metalle. Infolge der etwas geringeren Reinheit der von uns verwendeten Proben konnten wir mit den Messungen nicht sehr tief ins Hochfeldgebiet vordringen. Theoretisch erwarten wir bei den ferromagne-

tischen Metallen in der Hochfeldregion kein von den anderen Metallen prinzipiell verschiedenes Verhalten, da das innere Feld schon sehr klein verglichen mit dem äusseren ist.

e) Longitudinale magnetische Widerstandsänderung: Bei allen diskutierten Typen von geschlossenen und offenen Bahnen zeigt die longitudinale Komponente des Leitfähigkeits- und des Widerstandstensors eines Einkristalles eine Sättigung in hohen Feldern. Eine Mittelung über die Kristallorientierungen muss dann auch für ein polykristallines Metall immer eine Sättigung der longitudinalen magnetischen Widerstandsänderung geben. Dieses Verhalten wird sehr schön durch unsere Messungen (Fig. 5) bestätigt. Eine Ausnahme bilden Fe und Li. Bei Fe ist dies wahrscheinlich auf die ungenügende Reinheit des Metalles zurückzuführen, eine Sättigung wird vielleicht bei noch höheren Feldern auftreten. Im Falle von Li hingegen befinden wir uns im Hochfeldgebiet; die Widerstandsänderung erfüllt ein streng lineares Gesetz. In diesem Zusammenhang ist die Tatsache erwähnenswert, dass für eine exakte zylindrische Fermifläche der longitudinale Widerstand bei Mittelung über den Leitfähigkeitstensor linear, bei Mittelung über den Widerstandstensor sogar quadratisch vom Felde abhängt<sup>18)</sup>. Es ist jedoch unrealistisch anzunehmen, dass die Fermifläche von Li, obwohl sehr anisotrop<sup>34)</sup>, aus vier sich durchdringenden exakten Zylindern bestehen soll. Man könnte vielleicht folgende Erklärung geben: Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Feldabhängigkeit der longitudinalen Widerstandsänderung sei durch folgenden Ausdruck gegeben:  $\alpha (\omega \tau)^2 / (1 + \beta (\omega \tau)^2)$ . Es ist denkbar, dass die Konstante  $\beta$  wegen der Fermiflächenstruktur oder wegen des Mittelungsverfahrens viel kleiner als 1 ist. Deshalb werden Anzeichen einer Sättigung erst bei höheren Werten von  $\omega \tau$  bemerkbar.

Die Sättigungswerte der gemessenen Metalle schwanken zwischen den Werten 0,3 und 4. Dies kann sehr gut mit Hilfe der Anisotropie der Energieflächen erklärt werden. So ergeben zum Beispiel Rechnungen an Fermiflächen, die aus einzelnen Rotationsellipsoidstücken zusammengesetzt sind, einen asymptotischen Wert der longitudinalen magnetischen Widerstandsänderung von  $\Delta R/R_0 \approx 1$ <sup>28)</sup>.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Berechnung der magnetischen Widerstandsänderung eines polykristallinen Metalles noch nicht durchführbar ist, selbst wenn man das Verhalten eines Einkristalles genau kennt. Andererseits scheint es aber nur noch an diesem schwierigen Mittelungsverfahren zu liegen, dass man heute die experimentellen Resultate noch nicht eindeutig interpretieren kann.

4. *Schlussbemerkungen.* Wir haben versucht, allein auf Grund des topologischen Verhaltens der Fermifläche unsere Resultate von Messungen der magnetischen Widerstandsänderung polykristalliner Metalle in hohen



Feldern zu erklären. Dies ist für die longitudinale und auch für einige Fälle der transversalen Widerstandsänderung geglückt. Für die restlichen Metalle wissen wir wenigstens, dass die Voraussetzungen zur Erklärung der Effekte im wesentlichen die richtigen sein müssen, obschon die Rechnung, das Mittelungsverfahren, bis heute noch undurchführbar erscheint.

Falls diese Interpretation unserer Resultate zutrifft, hat man folgende bemerkenswerte Tatsachen anzunehmen: Bei den drei einwertigen Metallen Cu, Ag und Au berührt die Fermifläche die Brillouinzone. Dies widerspricht den bisherigen Vorstellungen teilweise<sup>34)</sup>. Andererseits bestätigen weitere experimentelle Daten diesen Sachverhalt<sup>31)32)</sup>. Die Fermiflächen der mehrwertigen Metalle Zn, Sn und Pb haben solche Strukturen, dass offene Bahnen für gewisse Magnetfeldrichtungen möglich sind. Für Sn und Pb kommt man mit anderen Messungen zum gleichen Schluss<sup>33)</sup>, hingegen ergibt eine, aus de-Haas-van-Alphen-Effekt-Daten konstruierte Fermifläche von Pb, keine offenen Bahnen<sup>35)</sup>. Bei Al und In schliesslich ist das Auftreten offener Bahnen nicht anzunehmen; dies ist vor allem bei Al in guter Übereinstimmung mit verschiedenen anderen Effekten<sup>28)</sup>.

Unsere Ausführungen über die Magnetfeldabhängigkeit des elektrischen Widerstandes in hohen Feldern können auch übertragen werden auf den Fall der thermischen magnetischen Widerstandsänderung. Leider liegen nur wenige experimentelle Resultate vor, jedoch zeigen die bisherigen Messungen an Zn, Pb, Tl, Sn und Ga<sup>36)</sup> eine sehr schöne Übereinstimmung des Feldverhaltens des thermischen Widerstandes mit unseren Resultaten des elektrischen Widerstandes. Insbesondere zeigen auch die longitudinalen Messungen alle eine Sättigung in hohen Feldern. Schliesslich sei noch eine Arbeit über die thermische magnetische Widerstandsänderung an Zn-Einkristallen erwähnt<sup>37)</sup>. In Übereinstimmung mit unseren Befunden macht auch diese Arbeit die Existenz von offenen Bahnen für die Fermifläche dieses Metalles deutlich.

Herrn Professor Dr. P. GRASSMANN, dem Leiter dieses Institutes, möchte ich für sein wohlwollendes Interesse an dieser Arbeit herzlich danken. Vor allem liegt mir daran, Herrn Dr. J. L. OLSEN für die grosse Hilfe, die er durch kritische Bemerkungen, aber auch durch Rat und Tat, dieser Arbeit schenkte, meinen tiefen Dank auszusprechen. Herrn Dr. W. BALTENSPERGER sowie meinen Kollegen, den Herren P. COTTI, S. GYGAX, H. ROHRER und P. WYDER danke ich für viele anregende Diskussionen. Diese Arbeit wurde durch den Arbeitsbeschaffungskredit des Bundes finanziell unterstützt.



### Literaturverzeichnis

- 1) P. KAPITZA, Proc. Roy. Soc. [A] 123, 292 (1929).
- 2) E. JUSTI, Leitfähigkeit und Leitungsmechanismus fester Stoffe, Vandenhoeck und Ruprecht, 64, Göttingen (1948).
- 3) E. S. BOROVIK, J. Exp. Theor. Phys. USSR 27, 355 (1954).
- 4) R. G. CHAMBERS, Proc. Roy. Soc. [A] 238, 344 (1956).
- 5) J. DE LAUNAY, R. L. DOLECEK, R. T. WEBBER, J. Phys. Chem. Solids 11, 37 (1959).
- 6) J. L. OLSEN, Helv. Phys. Acta 26, 798 (1953).
- 7) P. COTTI, ZAMP 11, 17 (1960).
- 8) J. L. OLSEN, L. RINDERER, Nature 173, 686 (1954).
- 9) D. K. C. MAC DONALD, J. Sci. Inst. 24, 232 (1947).
- 10) B. LÜTHI, J. L. OLSEN, Nuovo Cimento 3, 840 (1956).  
B. LÜTHI, Helv. Phys. Acta 29, 217 (1956).  
B. LÜTHI, J. L. OLSEN, Proc. 5th Int. Conf. Low Temp. Phys. 479, Madison (1957).
- 11) R. G. CHAMBERS, Proc. Roy. Soc. [A] 202, 378 (1950).
- 12) J. L. OLSEN, Helv. Phys. Acta 31, 713 (1958).
- 13) B. LÜTHI, Phys. Rev. Letters 2, 503 (1959).
- 14) T. H. K. BARRON, D. K. C. MAC DONALD, Physica 24, 102 (1958).
- 15) B. LÜTHI, Kamerlingh Onnes Conference on Low Temperature Physics, Leiden 1958.
- 16) M. KOHLER, Ann. Phys. Lpz. 5, 89 (1949).
- 17) I. M. LIFSHITZ, M. Y. AZBEL, M. I. KAGANOV, J. Exp. Theor. Phys. USSR 31, 63 (1956). Übersetzung: JETP 4, 41 (1957).
- 18) J. M. ZIMAN, Phil. Mag. 3, 1117 (1958).
- 19) I. M. LIFSHITZ, V. G. PESCHANSKII, J. Exp. Theor. Phys. USSR 35, 1251 (1958). Übersetzung: JETP 8, 875 (1959).
- 20) L. I. SCHIFF, Quantum Mechanics, 137, Mac Graw Hill Book Comp. Inc., London (1949).
- 21) J. M. LUTTINGER, Phys. Rev. 84, 814 (1951).
- 22) H. JONES, C. ZENER, Proc. Roy. Soc. [A] 144, 101 (1934).
- 23) I. M. LIFSHITZ, J. Phys. Chem. Solids 4, 11 (1958).
- 24) J. P. JAN, Solid State Physics, F. Seitz und D. Turnbull ed., Vol. 5, 87 (1957).
- 25) M. KOHLER, Ann. Phys. Lpz. 32, 211 (1938).
- 26) D. L. MARTIN, Phys. Rev. Letters 1, 447 (1958).
- 27) J. S. DUGDALE (private Mitteilung).
- 28) B. LÜTHI, Helv. Phys. Acta 32, 470 (1959).
- 29) G. E. ZILBERMAN, J. Exp. Theor. Phys. USSR 29, 762 (1955). Übersetzung: JETP 2, 650 (1956).
- 30) P. N. ARGYRES, Phys. Rev. 109, 1115 (1958).
- 31) A. B. PIPPARD, Phil. Trans. [A] 250, 325 (1957).
- 32) N. I. ALEKSEEVSKII, Y. P. GAIDUKOV, J. Exp. Theor. Phys. USSR 35, 554 (1958). Übersetzung: JETP 8, 383 (1959).
- 33) N. I. ALEKSEEVSKII, Y. P. GAIDUKOV, J. Exp. Theor. Phys. USSR 36, 447 (1959). Übersetzung: JETP 9, 311 (1959).
- 34) M. H. COHEN, V. HEINE, Adv. in Phys. 7, 395 (1958).
- 35) A. V. GOLD, Phil. Trans. [A] 257, 85 (1958).
- 36) K. MENDELSSOHN, H. M. ROSENBERG, Proc. Roy. Soc. [A] 278, 190 (1953).
- 37) R. T. WEBBER, P. B. ALERS, D. A. SPOHR, Report of NRL Progress, Oktober 1955.