Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 32 (1959)
Heft: III

Artikel: Hall-Effekt und Eigen-Hall-Effekt in Normal- und Supraleitern
Autor: Jaggi, R. / Sommerhalder, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113003

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Hall-Effekt und Eigen-Hall-Effekt in Normal- und Supraleitern

von **R. Jaggi** und **R. Sommerhalder**
Laboratorium für Festkörperphysik ETH, Zürich

(18. III. 1959)

Zusammenfassung. Der Hall-Effekt (im äusseren Transversalfeld) und der Eigen-Hall-Effekt (im Eigen-Magnetfeld des Primärstromes allein) wird phänomenologisch behandelt. Für die zylinderförmige Probe wird das Hall-Potential sowohl im Innen- als auch im Aussenraum berechnet. Sondenanordnungen für Platten und Zylinder, eine Schaltung zur Messung von Hall- und Eigen-Hall-Effekt sowie eine Wechselstrom-Kompensationsmethode zur Bestimmung von Widerstand, Hall-Effekt und magnetischer Widerstandsänderung werden angegeben. Bei Zimmertemperatur ausgeführte Messungen an einem zylindrischen p-InSb-Einkristall liefern für Hall- und Eigen-Hall-Effekt übereinstimmende Resultate. Bei Heliumtemperaturen wird der Eigen-Hall-Effekt an polykristallinen Kupfer- und Quecksilberproben untersucht.

Weiter wird das Problem des Hall-Effekts in Supraleitern diskutiert. Eigene Experimente über den Hall-Effekt mit Abschirmströmen an Blei und Zinn sowie über den Eigen-Hall-Effekt an Quecksilber ergeben bis herab zu 2° K im rein supraleitenden, isothermen Zustand keine Spannungen über $1 \cdot 10^{-9}$ V. Falls stationäre elektrische Felder im Innern von Supraleitern auftreten, so sind sie an deren Aussenfläche mit Hilfe von Sonden nicht beobachtbar.

I. Probenform und Anordnung der Potentialsonden bei der Messung des Hall-Effekts mit und ohne Aussenmagnetfeld

1. Einleitung

Der Hall-Effekt wird heute noch vorwiegend in derselben Weise gemessen, wie er im Jahre 1879 entdeckt wurde: An den Seiten einer rechteckigen Platte, durch die in Längsrichtung ein elektrischer Strom fliesst, wird nach Anlegen eines zur Plattenfläche senkrechten, homogenen Magnetfeldes die entstehende Hall-Spannung abgegriffen. Bei dieser konventionellen Methode können trotz ihrer Einfachheit gewisse Schwierigkeiten auftreten. Es hat daher nicht an Versuchen gefehlt, den Hall-Effekt in andersartigen Anordnungen zu untersuchen, bei denen die Probe meistens Zylindersymmetrie besitzt; der Primärstrom und entsprechend das Magnetfeld können axial, radial oder zirkular gerichtet

sein. (Betr. Einzelheiten sei auf die zusammenfassenden Artikel von MEISSNER 1935 und JAN 1957 verwiesen.)

Wir haben ein ballistisches Verfahren erprobt, bei dem in einer kreisförmigen Platte durch ein zeitlich veränderliches axiales Magnetfeld ein zirkularer Primärstrom induziert wurde, wodurch eine radiale Hall-Feldstärke auftrat (BUSCH, JAGGI und BRAUNSCHWEIG 1953). Im Anschluss an diese Arbeit stiessen wir darauf, dass der Hall-Effekt auch ohne äusseres Magnetfeld prinzipiell in jedem stromdurchflossenen Leiter als Folge des Eigen-Magnetfeldes auftreten muss. Erstmals hat ROBERTS 1924 auf diese Tatsache hingewiesen und bei Zimmertemperatur Experimente mit zylindrischen Proben aus Wismut durchgeführt, die in der Mitte eine Einschnürung aufwiesen (vgl. Fig. 1d); nach seinen Angaben betrugen die gemessenen Spannungen 10 bis 30% der für reines Wismut zu erwartenden Hall-Spannungen.

Während sich ROBERTS mit einer qualitativen Bestätigung seiner Überlegungen begnügte, schien es uns wert, den Hall-Effekt infolge des Eigen-Magnetfeldes – den wir «Eigen-Hall-Effekt» genannt haben – zu einer quantitativen Messmethode auszubauen, vor allem im Hinblick auf die Anwendung bei tiefen Temperaturen. Als erstes haben wir Messungen an Wismut-Hohlzylindern durchgeführt, deren Resultat mit den auf magnetische Induktion $B = 0$ extrapolierten Literaturwerten übereinstimmen (BUSCH und JAGGI 1953, vgl. JAGGI 1959 Seite 190–193).

Des weiteren stellten wir uns die Aufgabe, an *derselben* Probe zu zeigen, dass der Eigen-Hall-Effekt den gleichen Hall-Koeffizienten liefert wie der Hall-Effekt im äusseren Magnetfeld. Wir wählen für diesen Nachweis nicht die herkömmliche plattenförmige Probe, sondern den Kreiszylinder, da für diese Probenform hinsichtlich des Eigen-Hall-Effektes wegen der Zylindersymmetrie des Eigen-Magnetfeldes die einfachsten Verhältnisse vorliegen. Auch für die Messung des Hall-Effekts im äusseren Magnetfeld ist die Verwendung zylindrischer Proben vorteilhaft und findet immer weitere Verbreitung (vgl. z. B. MASON, HEWITT und WICK 1953, BOROVIK 1954, KOHNKE und EWALD 1956, KÖSTER und SCHÜLE 1957).

Die von der konventionellen Methode abweichende Probenform und Anordnung der Potentialsonden gab Anlass zu einer kurzen Bemerkung (JAGGI 1956), die wir im nachstehenden erweitern werden.

2. Definition des Hall-Koeffizienten

Unserer phänomenologischen Behandlung legen wir folgende Definition des Hall-Koeffizienten R zugrunde: Bedeutet $\boldsymbol{J}$ die Stromdichte und $\boldsymbol{B}$ die magnetische Induktion in der Probe, so setzen wir für die Hall-Feldstärke

$$\boldsymbol{E}_R = R\,\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{J}. \tag{2.1}$$

In anisotropen Substanzen hat R Tensorcharakter, das Hall-Feld steht aber immer senkrecht zur Stromdichte. Das Ohmsche Gesetz

$$\boldsymbol{E}_\varrho = \varrho \boldsymbol{J} \tag{2.2}$$

liefert mit einem tensoriellen spezifischen Widerstand ϱ ebenfalls transversale Feldstärke-Komponenten. Deren Trennung vom Hall-Feld kann im Experiment durch Umkehr der magnetischen Induktion erfolgen. Da die Komponenten von ϱ und R gerade Funktionen von $\boldsymbol{B}$ sind, so wechselt der Hall-Effekt nach Gleichung (2.1) mit $\boldsymbol{B}$ sein Vorzeichen, nicht aber das Ohmsche Feld (2.2).

3. Probenform und Hall-Potential

Auf der Grundlage unserer Definition (2.1) können wir das Hall-Potential für beliebige Geometrie von Probe und Magnetfeld berechnen. Wir führen einige praktisch wichtige Fälle vor; der Einfachheit halber beschränken wir uns auf homogene, isotrope und isotherme Körper der Permeabilität $\mu \approx 1$. Diese seien vorerst in Richtung einer Symmetrieachse, in die wir die Stromdichte legen, unendlich lang, so dass wir das Ohmsche Feld (2.2) in der Rechnung nicht mitzuführen brauchen.

3.1. Konventioneller Hall-Effekt in der rechteckigen Platte

Nach der konventionellen Methode wird der Hall-Effekt an einer rechteckigen Platte der Breite $2a$ und Dicke $2b = d$ in einem homogenen Magnetfeld gemessen. Führen wir ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) ein (Längskanten $x = \pm a$, $y = \pm b$), so wird mit $\boldsymbol{B} = (0, B_y, 0)$ und $\boldsymbol{J} = (0, 0, J_z)$ das Hall-Feld (2.1)

$$E_x = R B_y J_z \,. \tag{3.1}$$

Dieses lässt sich von einem Potential V ableiten

$$\begin{aligned} E &= -\operatorname{grad} V, \\ V &= -E_x x + C = -R B_y J_z x + C \,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

C ist eine Integrationskonstante. Die zwischen den Seitenflächen der Probe auftretende Hall-Spannung beträgt unabhängig von der Wahl des Integrations-Weges

$$V_R = 2\,V(a) = -2\,R B_y J_z a \,. \tag{3.3}$$

Mit dem Strom $I = J_z \cdot 2a \cdot d$ erhält man den bekannten Ausdruck

$$V_R = -R B_y I/d \,. \tag{3.4}$$

Das negative Vorzeichen besagt, dass bei *positivem* Hall-Koeffizienten die Probe bei $x = +a$ *negative* Ladungen trägt.

Es sei betont, dass sich bei Normalleitern das Hall-Feld in den Aussenraum der Platte fortsetzt, da in der Grenzfläche die Tangentialkomponente von $\boldsymbol{E}$ und damit das Potential V stetig sein muss. Die Oberflächenwerte des Potentials lassen sich nach Gleichung (3.2) angeben. Für den Aussenraum ist ein Randwertproblem zu lösen. Ist die Lösung gefunden, so können aus dem Sprung der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung die Oberflächenladungen auf den Seitenflächen der Hall-Probe ermittelt werden. Raumladungen sind wegen der Konstanz von E_x nicht vorhanden. Wie wir anschliessend zeigen, lässt sich die vollständige Lösung des Randwertproblems in einfacher Weise für den Kreisquerschnitt angeben. Durch konforme Abbildung kann dann jeder andere Querschnitt darauf zurückgeführt werden.

3.2. Hall-Effekt im Kreiszylinder

Wir führen Zylinderkoordinaten (r, ϑ, z) ein, wobei wir ϑ von unserer bisherigen x-Achse aus zählen; der Radius des Zylinders sei a. Wieder legen wir die magnetische Induktion in die y- und die Stromdichte in die z-Richtung.

Im Innern der Probe für $r \leqq a$ ist die Hall-Feldstärke gleich wie bei der Platte nach Gleichung (3.1)

$$E_x = RB_y J_z = E = \text{const}$$

und das Potential

$$V = -Ex + C,$$

oder in Zylinderkoordinate ausgedrückt

$$V = -Er\cos\vartheta + C, \tag{3.5}$$

$$E_r = E\cos\vartheta, \tag{3.6}$$

$$E_\vartheta = -E\sin\vartheta. \tag{3.7}$$

Für die Oberfläche $r = a$ ist das Potential

$$V(a, \vartheta) = -Ea\cos\vartheta; \tag{3.8}$$

wir normieren so, dass $C = 0$. Die Hall-Spannung zwischen den Punkten $(a, 0)$ und (a, π) beträgt

$$2V(a, 0) = -2RB_y J_z a = -\frac{2RB_y I}{\pi a}. \tag{3.9}$$

Im Aussenraum für $r > a$ ist die Lösung der Laplaceschen Potentialgleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

mit der unsere Randbedingung, die Stetigkeit von $V(a, \vartheta)$, zu erfüllen ist

$$V = -\frac{a^2}{r} E \cos\vartheta, \tag{3.10}$$

$$E_r = -\frac{a^2}{r^2} E \cos\vartheta, \tag{3.11}$$

$$E_\vartheta = -\frac{a^2}{r^2} E \sin\vartheta. \tag{3.12}$$

Wie man sieht, verläuft in der Oberfläche die Tangentialkomponente E_ϑ stetig. Der Sprung der Normalkomponente E_r (die bei $r = a$ ihr Vorzeichen wechselt) liefert die Oberflächenladungsdichte

$$\omega_a = -(\varepsilon_i + \varepsilon_a)\, \varepsilon_0\, E \cos\vartheta, \tag{3.13}$$

wobei ε_i und ε_a die relativen Dielektrizitätskonstanten der Probe bzw. des Aussenraumes und ε_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums bedeuten. Die Gesamtladung der Probe ist Null.

3.3. Hall-Effekt im Hohlzylinder

Der Zylinder habe eine konzentrische Bohrung vom Radius b. *Im Probeninnern* $b \leqq r \leqq a$ ist das Hall-Feld E und das Potential V wie beim Vollzylinder mit der einen Änderung, dass in die Gleichungen die Stromdichte im Hohlzylinder

$$J_z = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)} \tag{3.14}$$

einzusetzen ist. So wird z. B. die Hall-Spannung zwischen den Punkten $(a, 0)$ und (a, π) an Stelle Gleichung (3.9)

$$2\, V(a, 0) = -2\, R B_y\, I \frac{a}{\pi\,(a^2 - b^2)}. \tag{3.15}$$

Für den Aussenraum $r > a$ können wir ebenfalls die Lösung für den Vollzylinder übernehmen. *Im Hohlraum* $r < b$ muss wegen der Stetigkeit von E_ϑ für $r = b$ das homogene Hall-Feld E auftreten. An der Innenfläche finden wir eine Oberflächenladungsdichte

$$\omega_b = (\varepsilon_i - \varepsilon_a)\, \varepsilon_0\, E \cos\vartheta. \tag{3.16}$$

3.4. Eigen-Hall-Effekt im Vollzylinder

Nun betrachten wir den Hall-Effekt, der durch das Eigen-Magnetfeld des Primärstromes entsteht. Der Radius der Probe sei a, die Stromdichte $J_z = I/\pi a^2$. Der Innenradius der konzentrischen Stromrückleitung sei c.

Im Innern der Probe für $r \leqq a$ beträgt das Eigen-Magnetfeld des Stromes

$$H_\vartheta = \frac{1}{2} J_z\, r. \tag{3.17}$$

Gemäss Gleichung (2.1) entsteht hier eine Hall-Feldstärke in radialer Richtung

$$E_r = RB_\vartheta J_z = \frac{1}{2}\mu_0 R J_z^2 r\,, \tag{3.18}$$

wenn wir die relative Permeabilität der Probe $\mu = 1$ setzen, und μ_0 die Induktionskonstante bedeutet.

Das zugehörige Potential ist unter Voraussetzung eines konstanten Hall-Koeffizienten

$$V = -\frac{1}{4}\mu_0 R J_z^2 r^2 + C\,. \tag{3.19}$$

Wir normieren wie üblich so, dass $C = 0$.

Für die Oberfläche $r = a$ ist das Potential

$$V(a) = -\frac{1}{4}\mu_0 R J_z^2 a^2 = -\mu_0 R \frac{I^2}{4\pi^2 a^2} = -\mu_0 R H_a^2\,, \tag{3.20}$$

wobei

$$H_a = \frac{I}{2\pi a} \tag{3.17a}$$

das Eigen-Magnetfeld in der Oberfläche ist. Die Feldstärke wird

$$E_r(a) = \frac{1}{2}\mu_0 R J_z^2 a = -2\frac{V(a)}{a}\,. \tag{3.21}$$

Im Aussenraum $a \leqq r \leqq c$ lautet für das vorliegende rotationssymmetrische Problem die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0\,;$$

deren allgemeine Lösung ist $V = A \ln r + B$.

Mit den Randbedingungen $V = V(a)$ für $r = a$ und $V = 0$ für $r = c$ wird das Potential

$$V = V(a) \ln\frac{c}{r} \Big/ \ln\frac{c}{a} \tag{3.22}$$

und die Feldstärke

$$E_r = V(a)\frac{1}{r} \Big/ \ln\frac{c}{a}\,. \tag{3.23}$$

Nun können wir aus den Flächendivergenzen der dielektrischen Verschiebung $\boldsymbol{D}$ die Oberflächenladungen pro Längeneinheit bestimmen

$$\text{für } r = a \qquad 2\pi a\,\omega_a = \left(2\varepsilon_i + \varepsilon_a / \ln\frac{c}{a}\right)\varepsilon_0\, 2\pi V(a)\,, \tag{3.24}$$

$$\text{für } r = c \qquad 2\pi c\,\omega_c = -\varepsilon_a \varepsilon_0\, 2\pi V(a) / \ln\frac{c}{a}\,. \tag{3.25}$$

Im Innern des Zylinders haben wir eine Raumladungsdichte

$$\varrho = \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \varepsilon_i \varepsilon_0 \frac{1}{r}\frac{dE_r}{dr} = -\varepsilon_i \varepsilon_0 \frac{4\,V(a)}{a^2} = \text{const.} \tag{3.26}$$

Die gesamte Raumladung pro Längeneinheit bestimmt sich zu

$$\varrho \pi a^2 = - \varepsilon_i \varepsilon_0 \, 4 \pi V(a) . \tag{3.27}$$

Auf der Probe sitzt also eine Ladung $\varepsilon_a \varepsilon_0 \, 2 \pi V(a)/\ln c/a$, der eine gleich grosse von entgegengesetztem Vorzeichen auf der Rückleitung gegenübersteht. Die Anordnung, Probe samt konzentrischer Rückleitung, stellt einen Zylinderkondensator dar mit der Kapazität pro Längeneinheit

$$C/l = 2 \pi \varepsilon_a \varepsilon_0 / \ln c/a . \tag{3.28}$$

Die Hall-Spannung $V(a)$ nach Gleichung (3.20) könnten wir im Prinzip abgreifen zwischen der Achse der Probe und ihrer Oberfläche, aber auch zwischen der Probenoberfläche und der Stromrückleitung. Gerade letzteres wird für unsere Überlegungen zur Anordnung der Hall-Potentialsonden wichtig werden.

3.5. Eigen-Hall-Effekt im Hohlzylinder

Für einen Hohlzylinder vom Aussenradius a und Innenradius b ist das Eigen-Magnetfeld

$$H_\vartheta = \frac{r^2 - b^2}{2 r} J_z \tag{3.29}$$

und die Eigen-Hall-Feldstärke

$$E_r = \mu_0 R \frac{r^2 - b^2}{2 r} J_z^2 \tag{3.30}$$

mit der Bedeutung von J_z nach Gleichung (3.14). Damit wird die Hall-Spannung zwischen Innen- und Aussenmantel (vgl. Busch und Jaggi 1953)

$$V = - \mu_0 R \frac{I^2}{4 \pi^2 a^2} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2 \left(\frac{b}{a}\right) \ln \frac{b}{a}}{\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2} . \tag{3.31}$$

Die weitere Diskussion des Potential- und Feldverlaufs gestaltet sich wie beim Vollzylinder. Es sei nur noch erwähnt, dass V nach Gleichung (3.31) bei wachsendem b/a monoton abnimmt; geht b/a gegen 1, so nähert sich die Eigen-Hall-Spannung dem Wert

$$V_S = - \frac{1}{2} \mu_0 R \frac{I^2}{4 \pi^2 a^2} = - \frac{1}{2} \mu_0 R H_a^2 , \tag{3.32}$$

also der Hälfte der Spannung nach Gleichung (3.20) im Vollzylinder. Gleichung (3.32) gilt für den Fall, dass der Strom I in einer sehr dünnen Zylinderschale (wie in einem Supraleiter) fliesst.

3.6. Eigen-Hall-Effekt in der rechteckigen Platte

Die Breite der Platte sei $2a$ und ihre Dicke $2b$. Das Eigen-Magnetfeld berechnen wir nach BIOT-SAVART und erhalten für die Komponente

$$H_y = \frac{J_z}{4\pi}\Big[(y+b)\ln\frac{(x+a)^2+(y+b)^2}{(x-a)^2+(y+b)^2} + (y-b)\ln\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x+a)^2+(y-b)^2}$$
$$+ 2(x+a)\left\{\operatorname{arctg}\frac{y+b}{x+a} - \operatorname{arctg}\frac{y-b}{x+a}\right\}$$
$$+ 2(x-a)\left\{\operatorname{arctg}\frac{y-b}{x-a} - \operatorname{arctg}\frac{y+b}{x-a}\right\}\Big]. \tag{3.33}$$

H_x ergibt sich aus (3.33), indem man x, y, a, b ersetzt durch $-y, -x, -b, -a$. Die Eigen-Hall-Spannung zwischen den Punkten (0, 0) und (a, 0) wird für $\mu = 1$ und $R = \text{const}$

$$V = -\mu_0 R J_z \int_0^a H_y(x, 0)\, dx$$
$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} R J_z^2 \Big[2ab\ln\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2} + 2a^2\Big(2\operatorname{arctg}\frac{b}{2a} - \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\Big)$$
$$+ b^2\Big(\operatorname{arctg}\frac{2a}{b} - 2\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\Big)\Big]. \tag{3.34}$$

Schliesslich ergibt sich unter der Voraussetzung $b \ll a$

$$V = -\frac{\ln 4}{4\pi}\mu_0 R \frac{I^2}{4ab}. \tag{3.35}$$

4. Anordnung der Potentialsonden

Die in Fig. 1 gezeigten Sondenanordnungen sind für Platten wie für Zylinder brauchbar. Bei der Messung des Hall-Effekts mit einem äusseren Magnetfeld ist ein Feld B_y senkrecht zur Zeichenebene angelegt zu denken.

4.1. Hall-Effekt. Gleichzeitig mit der Hall-Spannung tritt der primäre ohmsche Spannungsabfall längs der Probe auf. Damit dieser nicht mitgemessen wird, sollten zwei Hall-Sonden im Magnetfeld Null auf eine Äquipotentialfläche zu liegen kommen, was sich praktisch kaum realisieren lässt. Eine weit verbreitete Methode bedient sich der drei Sonden A', B und C' in Fig. 1a. Mit einem gegenüber dem Probenwiderstand hochohmigen Potentiometer P wird der sogenannte «isoelektrische Punkt» festgelegt, der sich auf demselben Primärpotential wie die Sonde B befindet. Diese Methode geht unseres Wissens auf KOLÁČEK 1912

zurück, der ferner darauf hinweist, dass die Hall-Spannung auf die Hälfte abnimmt, wenn die Sonden A' und C' aus der Mitte der Probe gegen die Stromzuführungen hin verschoben werden.

Im Abschnitt 3.1 haben wir für die Platte und im Abschnitt 3.2 für den Zylinder gezeigt, dass sich die Sonden A' und C' auf dem Hall-Potential $V(a) = -RB_y J_z a$ befinden. Aus Symmetriegründen haben die Stromzuführungen das Hall-Potential Null. Während man mit den Sonden $A'\,B\,C'$ in Fig. 1a die Hall-Spannung $2\,V(a)$ nach Gleichung (3.4) bzw. (3.9) misst, erhält man mit den Sonden $A\,B\,C$ sowie $A''\,B\,C''$ in Fig. 1b nur die Hälfte $V(a)$, jedoch mit dem Vorteil, dass man zwischen den Stromführungen lediglich eine einzige Sonde B benötigt.

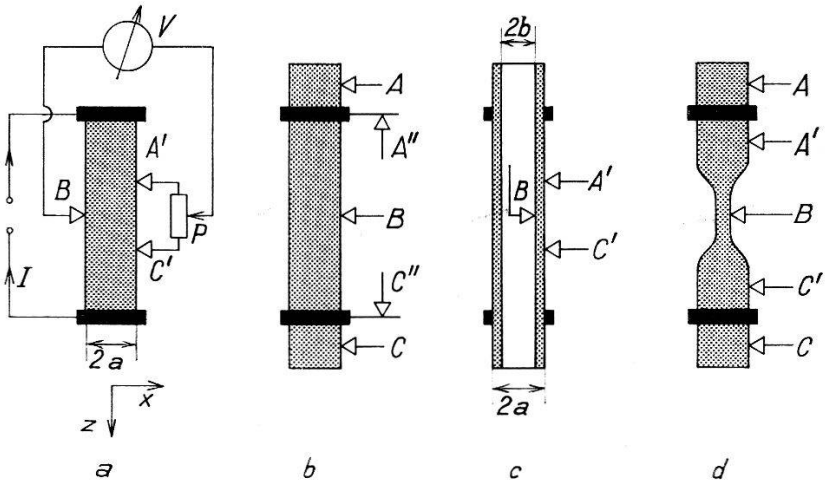

Fig. 1

Anordnung der Potentialsonden bei Hall-Effektsmessungen

Da das Hall-Potential an den Stromzuführungen Null ist, wird bei endlichem Abstand derselben das Hall-Potential in der Probenmitte kleiner als das für unendlich lange Proben berechnete Potential $V(a)$. Für Platten bleibt die Abweichung unter 1%, wenn das Verhältnis Länge: Breite > 4 ist. Zur Vermeidung von Korrekturen (vgl. die Zusammenstellung neuerer Publikationen bei JAN 1957) wird man also die Probe möglichst lang machen und die benötigten Sonden nahe der Mitte anbringen.

4.2. Eigen-Hall-Effekt. Bei einem Kreiszylinder ist der Mantel bezüglich der Eigen-Hall-Spannung eine Äquipotentialfläche, daher kann mit einer Sondenanordnung nach Fig. 1a kein Eigen-Hall-Effekt gemessen werden. ROBERTS 1924 verwendete eine rotationssymmetrische Probe nach Fig. 1d. Die Sonden A' und C' befanden sich auf je einem Zylinder von so grossem Radius, dass $V_{A'} = V_{C'} \ll V_B$. Wir arbeiteten bei unserer ersten Messung mit einem Hohlzylinder (Fig. 1c), gingen dann aber dazu über, die Sonden A und C einfach auf der Probe ausserhalb der

Stromzuführungen anzubringen (Fig. 1b). Mit den Sonden A'' und C'' auf den Stromzuführungen können sich dann Schwierigkeiten ergeben, wenn sich der Kontakt Zuführung-Probe nicht rein ohmisch verhält.

Bei der Platte könnte die Eigen-Hall-Spannung zwischen dem Mittelpunkt und dem Rand der Plattenfläche abgegriffen werden, doch ist auch hier eine Anordnung nach Fig. 1b vorzuziehen.

5. Wechselstrom als Primärstrom

5.1. Hall-Effekt. Die Hall-Spannung ist proportional dem Produkt $B \cdot I$, magnetische Induktion B und Primärstrom I können unabhängig voneinander gewählt werden. Die Verwendung von Gleich- und Wechselfeldern in Verbindung mit Gleich- und Wechselströmen wurde in vielen Abwandlungen untersucht. Reine Gleichstromverfahren sind wegen störender thermoelektrischer Effekte im Nachteil gegenüber Wechselstrommethoden; Wechselfelder wiederum erzeugen in der Probe unerwünschte Wirbelströme. Wir nehmen für unsere Experimente ein Gleichfeld sowie Wechselstrom mit einer vom Netz abweichenden Frequenz und streben an, die auftretende Hall-Wechselspannung durch Kompensation zu messen.

5.2. Eigen-Hall-Effekt. Die Eigen-Hall-Spannung ist proportional dem Quadrat des Primärstromes und daher unabhängig von der Stromrichtung. Gleichstrom kommt aus praktischen Gründen nicht in Betracht, da der ohmsche Spannungsabfall nicht von der Hall-Spannung getrennt werden kann. Wir sind daher auf die Verwendung von Wechselstrom angewiesen. Mit

$$I^2 = I_0^2 \cos^2 \omega t = I_{\text{eff}}^2 \, (1 + \cos 2\,\omega t)$$

erhalten wir z. B. beim Vollzylinder nach Gleichung (3.20) eine Gleichspannung

$$V_0 = -\mu_0 R \frac{I_{\text{eff}}^2}{4\,\pi^2 a^2} \tag{5.1}$$

und gleichzeitig eine Wechselspannung von der doppelten Frequenz des Primärstromes, deren Effektivwert beträgt

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mu_0 R \frac{I_{\text{eff}}^2}{4\,\pi^2 a^2} \,. \tag{5.2}$$

6. Schaltung zur Messung von Hall-Effekt und Eigen-Hall-Effekt

Für den Eigen-Hall-Effekt haben wir die in Fig. 2 gezeigte Schaltung entwickelt, die sich auch für Messungen nach der konventionellen Methode in einem äusseren Magnetfeld eignet.

6.1. Aufbau der Schaltung

Der Primärstrom wird von einem Niederfrequenz-Generator NF (30 Watt Leistung, Klirrfaktor $< 2\%$) geliefert, der über einen Anpassungstransformator an die Probe angeschlossen wird. Zur Einstellung des isoelektrischen Punktes dient ein Präzisions-Potentiometer P von 50 Ω Widerstand.

Als Anzeigeinstrumente G verwenden wir einen ständig angeschlossenen Kathodenstrahl-Oszillographen mit breitbandigem Vorverstärker (Empfindlichkeit einige μVolt) und wahlweise dazu parallel geschaltet je einen Galvanometer-Verstärker für Wechsel- und Gleichspannungen.

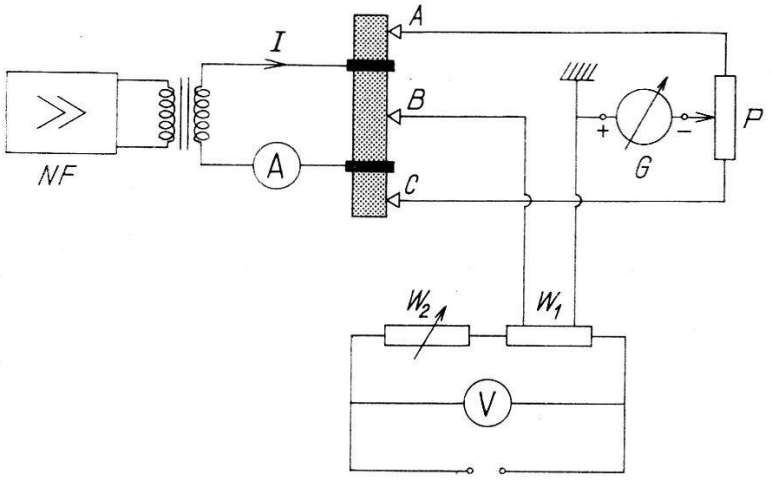

Fig. 2
Schaltung zur Messung von Hall-Effekt und Eigen-Hall-Effekt

Die volle Spannungsempfindlichkeit des Vibrationsgalvanometer-Verstärkers nach Busch 1954 ist besser als $1 \cdot 10^{-9}$ Volt/mm·m bei einer Bandbreite von 0,26 Hz, er ist fest auf 60 Hz abgestimmt. Die lichtelektrische Verstärkung erfolgt mit einem Photomultiplier, beim Gleichstromgalvanometer-Verstärker mit einer Silizium-Differentialphotozelle; Gleichspannungen von $1 \cdot 10^{-8}$ Volt sind mit Sicherheit nachweisbar.

Zwischen der Sonde B und der Plus-Klemme der Anzeigeinstrumente geben wir zur Eichung bzw. Kompensation eine durch die Widerstände $W_1 = 10^{-2}\,\Omega$ und $W_2 \leqq 10^5\,\Omega$ abgeschwächte Spannung.

Besondere Beachtung haben wir dem Problem der Erdung und der Einstreuung von Störspannungen geschenkt. Durch sorgfältige Verdrahtung mit abgeschirmten und verdrillten Leitungen unter Berücksichtigung der Symmetrie der Schaltung gelingt es, die Störspannungen so weit herabzusetzen, dass sie selbst bei unseren höchsten Empfindlichkeiten die Messung nicht beeinflussen.

6.2. Abgleich des isoelektrischen Punktes

6.21. Hall-Effekt. Der Primärstrom wird eingeschaltet und das Potentiometer P so eingestellt, dass das Instrument G keinen Ausschlag zeigt. Nach Anlegen des äusseren Magnetfeldes wird die auftretende Hall-Spannung abgelesen bzw. kompensiert. Dies wird wiederholt bei umgepoltem Magnetfeld, um eventuelle Unsymmetrien auszumitteln.

6.22. Eigen-Hall-Effekt. Messen wir die auftretende Gleichspannung nach Gleichung (5.1) mit unserem Gleichstromgalvanometer-Verstärker, so stellen wir den isoelektrischen Punkt mit Hilfe des Kathodenstrahl-Oszillographen grob und mit dem Vibrationsgalvanometer-Verstärker fein ein. Auf diese Weise können wir das Vorzeichen des Hall-Koeffizienten einfach bestimmen; dessen Betrag erhalten wir genauer durch Messung der Wechselspannung nach Gleichung (5.2). Da der Spannungsabfall längs der Probe wegen der unvermeidlichen Harmonischen des Primärstromes exakt kompensiert werden muss, sollten im Prinzip zwei Instrumente derselben hohen Empfindlichkeit von einigen 10^{-9} Volt zur Verfügung stehen. Mit dem ersten Instrument wäre bei der Frequenz des Primärstromes der isoelektrische Punkt abzugleichen, während das zweite die Eigen-Hall-Spannung messen würde, welche die doppelte Frequenz des Primärstromes aufweist. Wenn wir aber von dieser Frequenzverdopplung Gebrauch machen, so genügt ein einziges Instrument.

Unser Vibrationsgalvanometer-Verstärker ist unveränderlich auf die Frequenz 60 Hz abgestimmt. Zur Einstellung des isoelektrischen Punktes lassen wir einen Strom von 60 Hz durch die Probe fliessen und bringen mit Hilfe des Potentiometers P den Galvanometerausschlag auf Null. Erniedrigen wir nun die Frequenz des Primärstromes auf 30 Hz, so zeigt der Galvanometer-Verstärker die Eigen-Hall-Spannung von 60 Hz an.

7. Wechselstrom-Kompensationsmethode zur Messung von Widerstand und Hall-Effekt

7.1. Widerstandsmessung

Busch, Kern und Winkler 1953 haben eine Wechselstrom-Kompensationsmethode zur Messung von Halbleiter-Widerständen angegeben. Den in jener Schaltung zur Phasenumkehr der Kompensationsspannung dienenden Spannungswandler ersetzen wir durch einen Stromwandler der Klasse 0,1. Wie Fig. 3 zeigt, durchfliesst der Meßstrom I den Widerstand W_X und die Primärwicklung des Stromwandlers ($I_{\text{primär}}$: $I_{\text{sekundär}}$ = ü), dessen Sekundärseite durch einen kalibrierten und mit Nonius versehenen Manganin-Schleifdraht W_N von $10^{-2}\,\Omega$ Gesamtwiderstand kurzgeschlossen ist. Mit der am Schleifdraht abgegriffenen

Spannung $W_N\ I/ü$ wird die Spannung $W_X\ I$ am Widerstand kompensiert. Zeigt das Nullinstrument G den erfolgten Abgleich an, so ist unabhängig von I

$$W_X = \frac{1}{ü} W_N \,. \tag{7.1}$$

Das Übersetzungsverhältnis $ü$ lässt sich mit käuflichen Stromwandlern in weiten Grenzen verändern. Mit unserer Anordnung messen wir Widerstände zwischen 10^{-5} und $0{,}5\,\Omega$ mit einer Genauigkeit von einigen $^0/_{00}$. Als Anzeigeinstrumente verwenden wir die in Abschnitt 6.1 erwähnten. Die Kompensation kleiner Phasenverschiebungen erfolgt mit einer Widerstand-Kapazität-Spannungsteilung an W_N.

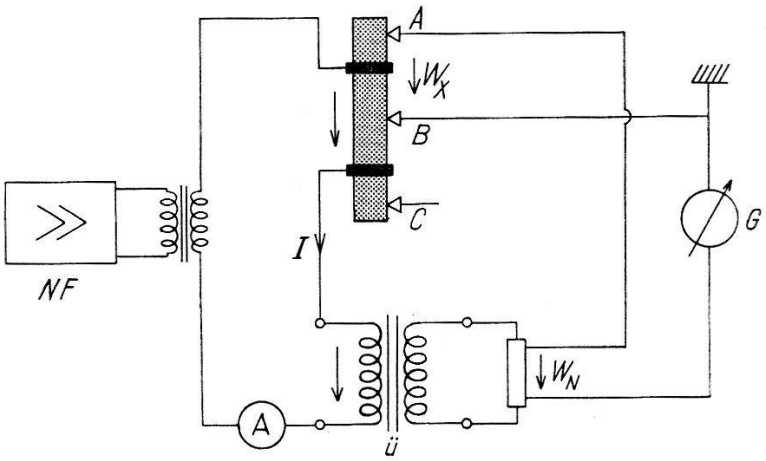

Fig. 3
Wechselstrom-Kompensations-Schaltung
zur Messung von Widerstand und Hall-Effekt

7.2. *Messung von Hall-Effekt und magnetischer Widerstandsänderung*

Die Schaltung nach Fig. 3 lässt sich weiter als Kompensationsmethode zur Messung von Hall-Effekt und magnetischer Widerstandsänderung benützen. Hier genügen zwei Sonden, beispielsweise A und B.

Wir bezeichnen die entsprechend Gleichung (7.1) ermittelten Ablesungen mit A. Ohne Magnetfeld messen wir den ohmschen Widerstand $A_0 = W(0)$ zwischen den beiden Sonden. Legen wir ein transversales Magnetfeld an die Probe, so erhalten wir die Summe von Widerstand $W(B)$ und dem Verhältnis Hall-Spannung V zu Meßstrom I:

$$A_\uparrow = W(B) + \frac{V}{I} \,. \tag{7.2}$$

Polen wir das Magnetfeld um, so kehrt nur die Hall-Spannung ihr Vorzeichen:

$$A_\downarrow = W(B) - \frac{V}{I} \,. \tag{7.3}$$

Aus der Differenz von (7.2) und (7.3) erhalten wir die Hall-Spannung:

$$A_{\uparrow} - A_{\downarrow} = 2\,\frac{V}{I}\,; \tag{7.4}$$

die Summe liefert die magnetische Widerstandsänderung:

$$\frac{A_{\uparrow} + A_{\downarrow} - 2\,A_0}{2\,A_0} = \frac{\varrho\,(B) - \varrho\,(0)}{\varrho\,(0)}\,. \tag{7.5}$$

Den bei obigen Messungen auftretenden Quotienten Hall-Spannung: Primärstrom kann man im Anschluss an PERRIER 1958 kurz als «Hall-Widerstand» bezeichnen.

8. Hinweis auf Fehlerquellen

Die Probe darf keine Inhomogenitäten (Konzentrationsunterschiede, Einschlüsse, Risse usw.) aufweisen. Die Probenform muss mit der nötigen Genauigkeit hergestellt werden, wobei die Länge möglichst gross zu wählen ist (vgl. Abschnitt 4.1). Beim Hall-Effekt haben die Sonden zwischen den Stromzuführungen in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld zu liegen, das homogen über die ganze Probe sein muss. Wegen ponderomotorischer Kräfte sind Probe und Zuleitungen starr zu befestigen. Auch wenn Wechselstrom als Primärstrom verwendet wird und damit thermoelektrische Effekte weitgehend eliminiert werden, so empfiehlt es sich, die Belastung unter 10^{-2} Watt zu halten und mit Temperaturbädern zu arbeiten. Auf induktiv und kapazitiv eingestreute Störspannungen ist zu achten. Eine hohe Symmetrisierung der Schaltung ist von grossem Nutzen.

Das Magnetfeld der Erde ist beim Hall-Effekt meist viel zu klein, um als Störung in Betracht zu kommen, andernfalls wird sein Einfluss beim Umpolen des angelegten Feldes ausgeschaltet. Beim Eigen-Hall-Effekt ruft das Erdfeld Spannungen mit der Frequenz ω des Primärstromes hervor, die beim Abgleich des isoelektrischen Punktes wegkompensiert werden, dessen Bedeutung in Abschnitt 6.2 betont wurde.

Beim Eigen-Hall-Effekt stellen insbesondere Magnetfelder der Stromzuführungen, Erwärmung der Probe und nicht-ohmsche Kontakte die gefährlichsten Fehlerquellen dar; wir verweisen auf die ausführliche Diskussion bei BUSCH und JAGGI 1953.

Eine Kontrolle der Kontakte gelingt einfach mit Hilfe des Kathodenstrahl-Oszillographen, dessen y-Platten wir ständig parallel zu unseren Galvanometern geschaltet haben. Geben wir auf die x-Platten die Primärspannung, so erhalten wir als Lissajous-Figur eine Art Parabel 3. Ordnung oder gar typische Gleichrichterkennlinien, wenn die Kontakte kein lineares Verhalten zeigen. Mit den Vibrationsgalvanometern beobachten wir dann grosse Spannungen mit der Frequenz $3\,\omega$.

9. Experimente

Aufbauend auf den bisherigen Überlegungen haben wir mit den in Abschnitt 6 und 7 erläuterten Schaltungen Experimente durchgeführt mit dem Ziel, Hall-Effekt und Eigen-Hall-Effekt an *derselben* Probe und Sondenanordnung zu vergleichen.

9.1. Zylinderförmige InSb-Probe

Wir teilen Resultate mit, die wir an einem zylindrischen p-Typ-InSb-Einkristall von 45 mm Länge und (4,89 $\pm$ 0,01) mm Durchmesser gewonnen haben (Achse || [111]).

Der Kristall war aus einer Schmelze von zonengereinigtem InSb gezogen. Nach dem Rundschleifen war er zum Homogenisieren 4 Wochen bei 475° C im Vakuum getempert und abschliessend in Eiswasser abgeschreckt worden. Der in verdünntem Königswasser geätzte Kristall

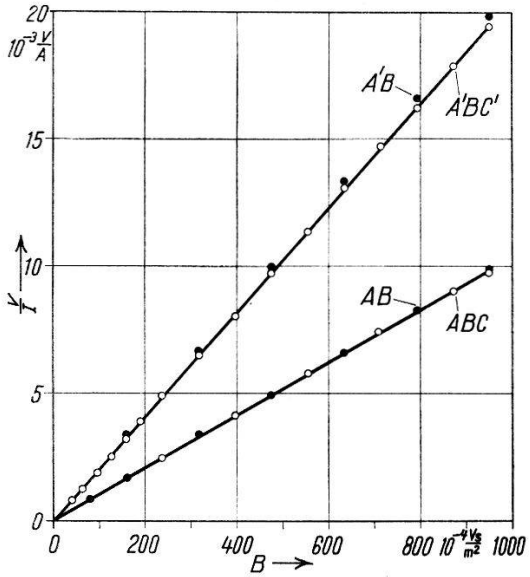

Fig. 4

Verhältnis Hall-Spannung V zu Primärstrom I als Funktion der magnetischen Induktion B für einen p-Typ-InSb-Einkristall bei $T = 290°$ K

wurde in die Kupfer-Stromzuführungen unseres symmetrisch gebauten Probenhalters mit Indium eingelötet. Die Stromzuführungen waren konzentrisch ausgebildet, so dass keine störenden Magnetfelder auftreten konnten. Die Spannungssonden aus Kupfer wurden mit Indium punktförmig angelötet; sie waren symmetrisch zur Probenmitte angebracht, wobei Induktionsflächen möglichst klein gehalten wurden.

Der Probenhalter war starr in einem mit destilliertem Wasser gefüllten Dewargefäss befestigt, das in einem Solenoid Platz fand, dessen Feld im Bereich der Probe besser als $1^0/_{00}$ homogen war. Bei unserer Messtempe-

ratur $T = (290{,}0 \pm 0{,}5)°\,\mathrm{K}$ betrug der spezifische Widerstand $\varrho(0) = (247 \pm 1)\cdot 10^{-6}\,\Omega\mathrm{m}$.

9.11. Hall-Effekt. Fig. 4 zeigt die Messung des Hall-Effekts. Die Messpunkte, die durch leere Kreise dargestellt sind, erhielten wir mit der Schaltung nach Fig. 2 als Mittel von mehreren Spannungsmessungen bei Umpolen des jeweiligen Magnetfeldes. Wir tragen die Quotienten Hall-Spannung V: Primärstrom I auf; diese vergleichen wir mit den «Hall-Widerständen» V/I, die sich gemäss Gleichung (7.4) mit der Kompensationsschaltung nach Fig. 3 direkt ergeben (schwarz ausgefüllte Messpunkte).

Die über der magnetischen Induktion B aufgetragenen Messwerte liegen innerhalb der Fehlergrenzen auf Geraden; der Hall-Koeffizient R ist also in diesem Fall für $B \leqq 0{,}1\ \mathrm{Vs/m^2}$ ($1\ \mathrm{Vs/m^2} \triangleq 10^4$ Gauss) von B unabhängig, ebenso vom Primärstrom zwischen 5 und 150 mA. Die obere Gerade haben wir mit den Sondensystemen $A'\,B\,C'$ (vgl. Fig. 3a) bzw. $A'\,B$ bestimmt (die kleine systematische Abweichung der schwarzen

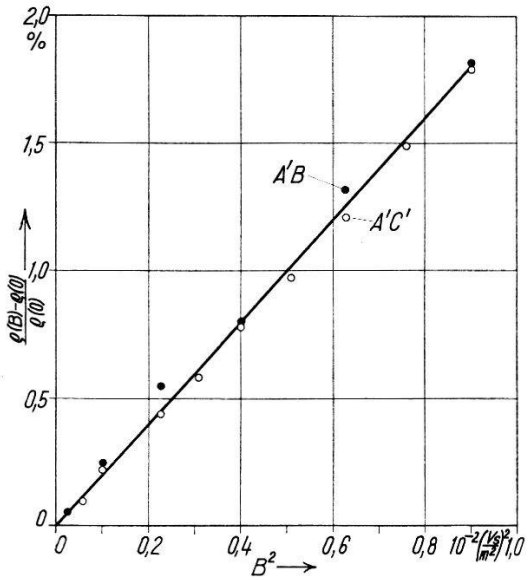

Fig. 5

Magnetische Widerstandsänderung $[\varrho\,(B) - \varrho\,(0)]/\varrho\,(0)$ als Funktion von B^2 für einen p-Typ-InSb-Einkristall bei $T = 290°$ K

Messpunkte rührt von einer Temperaturschwankung her). Die untere Gerade wurde mit den Sonden $A\ B\ C$ (vgl. Fig. 1b und 2) bzw. $A\,B$ (vgl. Fig. 3) gemessen. Wir sehen, dass unsere beiden Schaltungen übereinstimmende Resultate liefern, und dass die Hall-Spannung $2\,V(a, 0)$ nach Gleichung (3.9) auf die Hälfte abnimmt, wenn die Sonden A' und C' auf das Hall-Potential Null gebracht werden. Der Hall-Koeffizient wird

mit den Sonden $A'B\,C'$	$R = -\,(791 \pm 9)\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3/As}$,
mit den Sonden $A\ B\ C$ und AB	$R = -\,(798 \pm 17)\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^3/As}$.

9.12. Magnetische Widerstandsänderung. In Fig. 5 ist die mit unserer Wechselstrom-Kompensationsschaltung nach Gleichung (7.5) mit den Sonden $A'B$ und $A'C'$ gemessene magnetische Widerstandsänderung als Funktion von B^2 aufgetragen. Für $B \leqq 0{,}1$ Vs/m² ist in guter Näherung ein quadratisches Gesetz erfüllt

$$\frac{\varrho(B) - \varrho(0)}{\varrho(0)} = A\,B^2,$$

wir erhalten für die Konstante $A = 2{,}0$ (m²/Vs)² in grössenordnungsmässiger Übereinstimmung mit Beweglichkeitswerten.

9.13. Eigen-Hall-Effekt. In Fig. 6 ist die in der Schaltung nach Fig. 2 mit den Sonden $A\,B\,C$ gemessene Eigen-Hall-Spannung V_{eff} als Funktion von I_{eff}^2 aufgetragen. Durch die Messpunkte kann eine Gerade gelegt werden, damit ist die quadratische Abhängigkeit der Eigen-Hall-Spannung vom Primärstrom gemäss Gleichung (3.20) bzw. (5.2) erfüllt. Das Vorzeichen des Effekts wurde mit dem Gleichstromgalvanometer-Verstärker bestimmt. Die Auswertung ergibt einen Hall-Koeffizienten

$$R = -(768 \pm 31) \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{As},$$

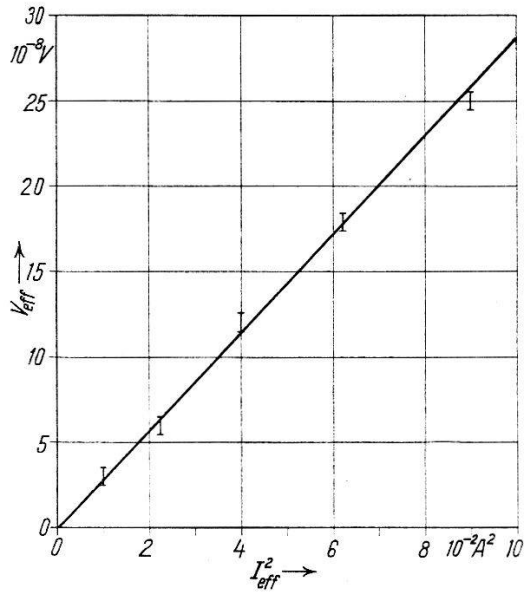

Fig. 6
Eigen-Hall-Spannung V_{eff} als Funktion von I_{eff}^2 für einen p-Typ-InSb-Einkristall bei $T = 290°$ K

innerhalb der Fehlergrenzen finden wir Übereinstimmung mit den Messungen in einem äusseren Magnetfeld. Dabei möchten wir darauf hinweisen, dass die Eigen-Hall-Spannungen von max. einigen 10^{-7} Volt mit magnetischen Induktionen $B \leqq 0{,}25 \cdot 10^{-4}$ Vs/m², also in der Grösse des Erdfeldes, erzeugt wurden. Im Vergleich hierzu waren beim Hall-Effekt die Felder und damit die Hall-Spannungen um mehr als 3 Grössenordnungen höher.

9.14. Kompensation des Hall-Effekts mit dem Eigen-Hall-Effekt

Einen weiteren Beweis, dass Hall-Effekt und Eigen-Hall-Effekt äquivalent sind, können wir in einem einzigen Experiment führen. Die an den Sonden $A\ B\ C$ auftretende Hall-Spannung $V(a, 0)$ nach Gleichung (3.9) wird durch die Eigen-Hall-Spannung $V(a)$ nach Gleichung (3.20) kompensiert, wenn das äussere Magnetfeld $H_y = -I/4\pi a = -H_a/2$ ist. Wir fanden dies bei einem Versuch bestätigt, bei dem das Magnetfeld H_y in einer Helmholtz-Spule durch den Primärstrom von 30 Hz erzeugt wurde.

9.2. Eigen-Hall-Effekt in einer Kupferplatte

Wir können den Eigen-Hall-Effekt auch in Metallen mit kleinen Hall-Koeffizienten nachweisen; als Beispiel erwähnen wir Kupfer. Die Probe samt Sonden $A\ B\ C$ war aus einer Folie (Cu technisch rein, Dicke $2b = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ m, Breite $2a = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ m, Entfernung der Stromzuführungen $l = 2 \cdot 10^{-2}$ m) geschnitten. Zu diesem Versuch stand nur der Gleichstromgalvanometer-Verstärker zur Verfügung. Um messbare Ausschläge zu erhalten, mussten wir die Probe ungewöhnlich hoch belasten. Deshalb leiteten wir die Joulesche Wärme mit einem Bad von He II ab. Bei $T = 2{,}0°$ K bestimmten wir für $I_{\text{eff}} = 50$ A eine Gleichspannung $V = +(3{,}4 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-8}$ Volt und damit nach Gleichung (3.35) einen Hall-Koeffizienten $R = -(0{,}51 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-10}$ m³/As, der sich innerhalb der Fehlergrenzen mit den Angaben anderer Autoren deckt.

10. Folgerungen

Im voranstehenden haben wir gezeigt, dass sich die angegebenen Probenformen, Sondenanordnungen und Schaltungen zur Messung des Hall-Effektes eignen.

Der Eigen-Hall-Effekt lässt sich für quantitative Untersuchungen mit dem Vorteil verwenden, dass man ohne ein äusseres Magnetfeld auskommt. Die Einschränkung, dass die Belastung der Probe durch den Primärstrom niedrig zu halten ist, bringt keine Nachteile, wenn man darauf angewiesen ist, mit kleinen Magnetfeldern zu arbeiten, wie z. B. bei Abhängigkeit des Hall-Effekts von der magnetischen Induktion und der Bestimmung des Hall-Koeffizienten $R_{B=0}$ (Busch, Jaggi und Kern 1955; Jaggi 1957). Von Bedeutung ist der Eigen-Hall-Effekt für das Problem des Hall-Effekts in Supraleitern.

II. Der Hall-Effekt in Supraleitern

11. Historische Entwicklung

Seit der Entdeckung der Supraleitung wurde immer wieder die Frage aufgeworfen, ob unterhalb der kritischen Temperatur der Hall-Effekt auftritt, oder ob er wie der elektrische Widerstand und die thermoelektrischen Effekte sprunghaft gegen Null geht.

Die ersten Versuche, den Hall-Effekt in Supraleitern nachzuweisen, wurden von KAMERLINGH ONNES und HOF 1914 ausgeführt. Sie arbeiteten mit einer Gleichstrommethode an runden Platten (ca. 10 mm ∅) aus Zinn und Blei in einem transversalen Magnetfeld. Bei 2,8 und 4,2° K konnte in einem Feld von 0,03 Vs/m² bei einer Empfindlichkeit von $5 \cdot 10^{-8}$ V an beiden Substanzen keine Hall-Spannung beobachtet werden. Für supraleitendes Blei wird als obere Grenze des Hall-Koeffizienten $R_S < 6 \cdot 10^{-12}$ m³/As angegeben. In überkritischen Feldern von 0,5 und 1,13 Vs/m² war ein Hall-Effekt messbar. ONNES und HOF erklären: «Solange das Feld so klein ist, dass das Metall supraleitend bleibt, verschwindet der Hall-Effekt gleich wie der gewöhnliche Widerstand.»

Nun war zu jener Zeit noch nicht bekannt, dass ein Transversalfeld der Grössenordnung 0,01 Vs/m² genügt, um das Hall-Plättchen in den *Zwischenzustand* zu bringen. Daher erlauben diese Untersuchungen keine sicheren Schlüsse auf den *rein supraleitenden Zustand.*

LORENTZ äusserte 1924 die Ansicht, dass in Supraleitern ebenso wie in Normalleitern ein elektrisches Feld der Lorentz-Kraft das Gleichgewicht hält.

Wir formulieren diese Aussage für den Fall freier Elektronen:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{ne} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{J} = R\, \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{J}. \tag{11.1}$$

$\boldsymbol{E}$ = Elektrisches Feld, $\boldsymbol{B}$ = Magnetische Induktion,
$\boldsymbol{J}$ = Stromdichte, n = Elektronenkonzentration,
$\boldsymbol{v}$ = Driftgeschwindigkeit, $e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ As,
$R = 1/ne$ = Hall-Koeffizient.

Demnach bestünde auch in Supraleitern trotz der hohen Leitfähigkeit ein Hall-Feld senkrecht zur Stromdichte.

HALL, der Entdecker des nach ihm benannten Effekts, hält 1933 in einer Diskussion der Messungen von ONNES und HOF das Auftreten eines Hall-Effekts in Supraleitern durchaus für möglich.

Auch bei Beachtung des Meissner-Effekts und Zugrundelegung der London-von-Laue-Theorie finden wir innerhalb einer Schicht von der Dicke der Eindringtiefe sowohl Strom als auch Magnetfeld und damit Voraussetzungen für den Hall-Effekt.

London 1950, S. 70, bemerkt demgegenüber, dass die Lorentz-Kraft durch die Londonschen Spannungen kompensiert wird; seine Theorie verbietet jedes elektrostatische Feld im Supraleiter. Darauf werden wir am Schluss bei der Diskussion der Theorie von Bopp 1937 zurückkommen, der die Londonschen Gleichungen aus dem Modell einer reibungsfreien Elektronenflüssigkeit entwickelt und dabei ein elektrisches Feld im stationären Zustand ableitet. Cook 1940 zeigt, dass ein Variationsprinzip die Londonschen Gleichungen liefert, wobei sich zusätzlich dasselbe stationäre Potential wie bei Bopp ergibt, das auch Ginsburg 1951 beibehält.

Pippard (s. Shoenberg 1952, S. 49) führt folgendes Argument an: Beim Anlegen eines homogenen Magnetfeldes an eine supraleitende Kugel treten die Londonschen Abschirmströme auf. Gibt es eine Hall-Spannung, so ist sie proportional zum Quadrat des Feldes (s. Gl. 12.4); ihr Betrag ist am grössten am Äquator und Null am Pol. Verbindet man diese Gebiete über einen ohmschen Widerstand, so könnte ein Strom fliessen und dadurch dem statischen Magnetfeld ununterbrochen Energie entzogen werden. Dies ist unvereinbar mit dem Energiesatz, und man muss ein derart feldabhängiges Kontaktpotential annehmen, dass die Hall-Spannung exakt kompensiert wird.

Lewis 1953 machte Experimente an einem verlängerten Sphäroid aus duktilem, polykristallinem Vanadium von 99,7% Reinheit in longitudinalen Wechselfeldern von 80 bis 800 Hz bei Temperaturen von 1,5 bis 4,2° K. Zwischen Pol und Äquator war in unterkritischen Feldern bei einer Empfindlichkeit $< 10^{-8}$ V keine Hall-Spannung nachweisbar; für supraleitendes Vanadium wird als obere Grenze des Hall-Koeffizienten $R_S < 15 \cdot 10^{-12}$ m³/As festgelegt. In einer weiteren Arbeit befasst sich Lewis 1955 mit den bisher gegen den Hall-Effekt in Supraleitern angeführten Argumenten, von denen er keines überzeugend findet. U. a. macht er die Bemerkung, dass beim Auftreten eines Hall-Stromes in einem Aussenwiderstand das angelegte Magnetfeld vollständig in den Supraleiter eindringt; demnach wäre der Meissner-Effekt metastabil, jedoch mit einer Lebensdauer von ca. 10^{14} sec. Er vertritt ferner die Meinung, dass bei einem Zwei-Fluida-Modell die normalleitenden Elektronen den Hall-Effekt nicht zum Verschwinden bringen.

Bardeen 1956, S. 290 erwähnt, dass in einem einfach zusammenhängenden Supraleiter kein Hall-Feld auftritt, wenn die diamagnetische Näherung Londons als richtig vorausgesetzt wird. Da in einem statischen Magnetfeld die Verteilung der diamagnetischen Abschirmströme eindeutig ist, so können sie nicht unter Energieabgabe an einen äusseren Kreis absterben. Dieses Argument gilt nicht für den metastabilen Strom in einem Ring ohne Fremdfeld.

12. Eigene Experimente

Bei der geschilderten Situation schien es uns möglich, einen experimentellen Beitrag zu leisten. Dank des hochempfindlichen Vibrationsgalvanometer-Verstärkers nach BUSCH 1954 sind wir in der Lage, mit einer um ca. eine Zehnerpotenz gesteigerten Empfindlichkeit noch Spannungen von $1 \cdot 10^{-9}$ V nachzuweisen.

Der Hall-Effekt infolge Abschirmströmen ist dem PIPPARD-Argument ausgesetzt. Dieses macht keine zwingende Aussage bei der Erzeugung des Hall-Effekts mit Hilfe von Leitungsströmen; die gebräuchliche Anordnung von Platten in einem Transversalfeld scheidet wegen der Gefahr des Zwischenzustandes aus.

Für das vorliegende Problem ist aber der ohne ein äusseres Magnetfeld durch das Eigen-Magnetfeld des Primärstromes entstehende Eigen-Hall-Effekt besonders geeignet. In Zylindern ist die Strom- und Feldverteilung wohldefiniert und von hoher Symmetrie. Die Eigen-Magnetfelder können im Supraleiter ohne Schwierigkeiten bis zu den kritischen Feldstärken gesteigert werden; ein unkontrolliert einsetzender Zwischenzustand kann mit Sicherheit vermieden werden. Tritt eine Hall-Spannung und ihr zufolge ein Hall-Strom in einem äusseren Widerstand auf, so wird die Leistung von der Primärstromquelle nachgeliefert. Im Prinzip könnte eine Batterie durch einen supraleitenden Kurzschluss und damit der Leitungsstrom durch den Dauerstrom in dem so entstandenen Ring ersetzt werden; doch ist der Dauerstrom als metastabil anzusehen.

12.1. Abschätzung der zu erwartenden Hall-Spannungen

Wir setzen voraus, dass im Supraleiter unter stationären Bedingungen ein Hall-Feld nach Gleichung (11.1) vorhanden ist. Sowohl für Abschirm- wie für Leitungsströme gilt die Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} . \tag{12.1}$$

Es ist

$$\boldsymbol{H} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \boldsymbol{H}^2 - (\boldsymbol{H} \operatorname{grad}) \boldsymbol{H} ; \tag{12.2}$$

für dicke Supraleiter fällt das letzte Glied weg. Mit der Permeabilität $\mu = 1$ wird das Hall-Feld

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \mu_0 R_S \operatorname{grad} \boldsymbol{H}^2 . \tag{12.3}$$

Die Hall-Spannung zwischen zwei Punkten, an denen das Magnetfeld seine Extremwerte H_a bzw. Null besitzt, ergibt sich unabhängig von der gewählten Versuchsanordnung zu

$$V_S = -\frac{1}{2} \mu_0 R_S H_a^2 . \tag{12.4}$$

Dasselbe Resultat haben wir mit Gleichung (3.32) beim Eigen-Hall-Effekt im Hohlzylinder durch den Grenzübergang zur Zylinderschale erhalten. Mit einem Wechselfeld $H_a(t) = H_a \cos\omega t$ erwarten wir eine Gleichspannung $V_S/2$ und eine Wechselspannung der doppelten Frequenz $2\,\omega$ vom Effektivwert

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} V_S = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \mu_0 R_S H_a^2 = -\frac{1}{4\sqrt{2}\,\mu_0} R_S B_a^2 . \tag{12.5}$$

Den Hall-Koeffizienten R_S schätzen wir mit der Eindringtiefe λ ab. Die Supraleitkonstante Λ ist einerseits phänomenologisch nach London

$$\Lambda = \mu_0 \lambda^2 , \tag{12.6}$$

anderseits nach modellmässigen Beschleunigungstheorien von Becker, Heller und Sauter 1933 sowie Bopp 1937

$$\Lambda = \frac{m}{n_S e^2} . \qquad m = \text{Elektronenmasse} \tag{12.7}$$

Mit Gleichung (12.6) und (12.7) erhält man die Konzentration der supraleitenden Elektronen im Giorgi-System

$$n_S = \frac{m}{e^2 \mu_0 \lambda^2} = \frac{28{,}3 \cdot 10^{12}}{\lambda^2} \tag{12.8}$$

und für den Hall-Koeffizienten

$$R_S = \frac{1}{n_S e} = \frac{e\,\mu_0 \lambda^2}{m} = -0{,}221 \cdot 10^6 \lambda^2 . \tag{12.9}$$

Nun sind Eindringtiefe und kritisches Magnetfeld stark temperaturabhängig. Übernehmen wir für unsere Abschätzung

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda(T)^2} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \quad \text{und} \quad \frac{H(T)}{H_0} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 , \tag{12.10}$$

so bekommen wir als kritische Hall-Spannung $V(T)$, die im supraleitenden Zustand nicht überschritten werden kann

$$\frac{V(T)}{V_{S_0}} = \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]^{-1} . \tag{12.11}$$

$V(T)$ ist Null bei der kritischen Temperatur T_c und erreicht bei $T = 0$ seinen grössten Wert V_{S_0}; wir müssen also bei möglichst tiefen Temperaturen experimentieren.

In Tabelle 1 haben wir von einigen Supraleitern die Zahlenwerte für $T = 0$ zusammengestellt. B_0 und λ_0 entnahmen wir aus SHOENBERG 1952, S. 226 und 188. Die mit Gleichung (12.8) berechnete Zahl der supraleitenden Elektronen pro Atom ist immer < 1. Die nach Gleichung (12.9) abgeschätzten Hall-Koeffizienten nehmen relativ hohe Werte an, die

Tabelle 1

Erwartete Zahlenwerte für $T = 0$

Supraleiter	Kritisches Magnetfeld B_0	Eindringtiefe λ_0	Supraleitkonst. Λ_0	Elektronenkonz. n_S	Elektronen pro Atom n_S/n_A	Hall-Koeffizient R_S	Hall-Spannung V_{S_0}	Hall-Feldstärke E_a
	$10^{-4}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$	10^{-8} m	$10^{-21}\ \frac{\mathrm{Vms}}{\mathrm{A}}$	$10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$		$10^{-12}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{As}}$	10^{-9}	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
Pb	805	3,9	1,91	1,86	0,55	– 336	867	– 44,5
Hg	413	4,1	2,11	1,68	0,38	– 372	253	– 12,3
Sn	305	5,2	3,39	1,05	0,28	– 596	221	– 8,5
In	269	6,4	5,15	0,69	0,18	– 907	261	– 8,2

zugehörigen Hall-Spannungen wären von feststellbarer Grösse. In der letzten Reihe steht die Hall-Feldstärke an der Oberfläche des Supraleiters

$$E_a = -\frac{2\,V_{S_0}}{\lambda_0}\,. \tag{12.12}$$

Auffallend ist der systematische Gang in allen Spalten ausgenommen bei der Hall-Spannung.

12.2. Hall-Effekt mit Abschirmströmen

Als Fortsetzung einer Untersuchung des Hall-Effekts mit induzierten Strömen in normalleitenden Kreisscheiben (BUSCH, JAGGI und BRAUNSCHWEIG 1953) führten wir einige Experimente über den Hall-Effekt mit Abschirmströmen aus. In beiden Fällen müssen wir lediglich ein Magnetfeld an die Probe anlegen, ohne einen Primärstrom zuzuführen. Daher sind die Versuche einfach, sie dienten der Verbesserung unserer Apparaturen, insbesondere zum Senken des Störpegels unter $1 \cdot 10^{-9}$ V.

Das Magnetfeld erzeugten wir mit einer kurzen Zylinderspule, die sich ausserhalb des Helium-Dewargefässes befand. (Spulen im Heliumbad können thermische Effekte verursachen.)

Wir verwendeten polykristallines, spektroskopisch reines Blei und Zinn. Die Blei-Probe hatte die Form eines Rotationsellipsoids (5 mm ∅,

15 mm lang); eine Potentialsonde war am Äquator angebracht, eine zweite war bis zum Mittelpunkt durch eine enge Bohrung in der langen Achse geführt, die in der Spulenachse lag. Dieselbe Stellung im Magnetfeld hatte die zylinderförmige Zinn-Probe (2 mm ∅, 200 mm lang, abgerundete Enden); ein Kontakt befand sich 50 mm ausserhalb der Probenmitte am Ort des maximalen Magnetfeldes, der zweite am entfernteren Probenende, wo das Feld praktisch auf Null abgenommen hat.

Die Leitungen wurden mit kleinstmöglicher Induktionsfläche zum BUSCH-Vibrationsgalvanometer-Verstärker verlegt. Bei dessen fester Resonanzfrequenz von 60 Hz erzeugten wir ein Wechselfeld an der supraleitenden Probe und kompensierten die restliche Induktionsspannung mit Hilfe eines Variometers auf wenige 10^{-9} V, so dass die vom Klirr (total $< 2\%$) des Generators herrührenden Oberschwingungen die weiteren Messungen nicht beeinflussen. Beim Übergang zur Feldfrequenz 30 Hz sollte unser Messinstrument die gesuchte Hall-Spannung anzeigen. Weiter haben wir das Magnetfeld noch mit $\omega = 20$ bzw. 15 Hz erregt, um die Harmonischen mit $3\,\omega$ bzw. $4\,\omega$ aufzunehmen. In Fig. 7 ist eine Messung an dem Zinnzylinder dargestellt. Erst beim Erreichen der kritischen Feldstärke beobachteten wir ein sprunghaftes Einsetzen von Spannungen, die durch die Phasenumwandlung bedingt sind.

Mit den beschriebenen Anordnungen wurden unter isothermen Bedingungen im supraleitenden Zustand bis herab zu 2° K weder bei der Blei- noch bei der Zinn-Probe Hall-Spannungen über 10^{-9} V angezeigt. Gemäss Gleichung (12.5) können wir eine experimentelle obere Grenze des Hall-Koeffizienten definieren. Diese wird mit max. Feldern $B_a = 750 \cdot 10^{-4}$ Vs/m² bzw. $210 \cdot 10^{-4}$ Vs/m² für Pb $R'_S < 2 \cdot 10^{-12}$ m³/As bzw. für Sn $R'_S < 16 \cdot 10^{-12}$ m³/As.

12.3. Eigen-Hall-Effekt mit Leitungsströmen

Der Eigen-Hall-Effekt erfordert grössere Sorgfalt in messtechnischer Hinsicht, insbesondere weil wir der Probe im Heliumbad einen Strom zuführen müssen. Doch erhalten wir einwandfreie Resultate, wenn wir den Strom durch kleine Probenradien niedrig halten, auf gute elektrische und thermische Kontakte achten, hohe Symmetrie von Probe und Schaltung anstreben sowie Störfelder vermeiden.

Wir haben eine Probenform nach Fig. 1d gewählt, um sicher zu sein, dass die Zerstörung der Supraleitung nicht an den Stromzuführungen beginnt. Nach Vorversuchen mit Zinn arbeiteten wir mit Quecksilber in einer rotationssymmetrischen Form aus Plexiglas. Eine enge axiale Bohrung (0,44 mm ∅, 10 mm lang) ging nach beiden Seiten in zwei weite Hohlräume (4 mm ∅, 8 mm lang) über. Deren Stirnseiten waren durch

(40 mm) lange abnehmbare Messingzylinder verschlossen, die zusammen mit einem koaxialen Hohlzylinder (28 mm ∅) der Hin- und Rückleitung des Stromes dienten. Die Sonden A', B und C' (sowie zwei weitere Sonden zur Widerstandsmessung in 3,5 mm Entfernung von B) wurden durch Kupferstifte (0,9 mm ∅) gebildet, die senkrecht zur Probenachse eingesetzt und gemeinsam mit dem Plexiglas ausgebohrt worden waren. A und C befanden sich ausserhalb der Probe auf den Stromzuführungen.

Nach dem Amalgamieren der Kontakte füllten wir mehrfach destilliertes Quecksilber in die Form und ermittelten mit Hilfe der Kompensationsschaltung nach Fig. 3 aus dem Zimmertemperatur-Widerstand und einem spezifischen Widerstand $\varrho_{20\,°C} = 0{,}959 \cdot 10^{-6}\ \Omega\,\mathrm{m}$ den Probenquerschnitt. Innerhalb 15 min wurde das Quecksilber unter seinen Erstarrungspunkt abgekühlt und dabei das Widerstandsverhalten verfolgt.

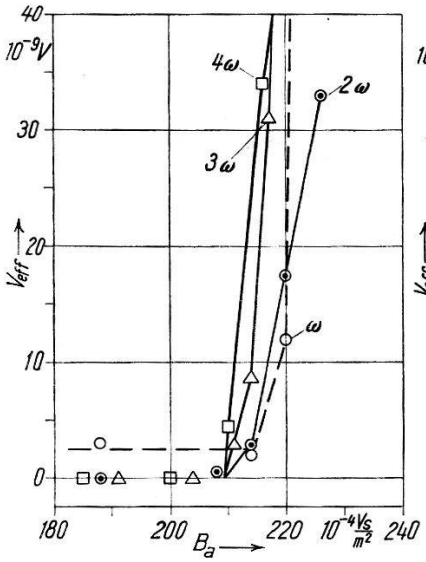

Fig. 7

Spannung V_{eff} an einem Zinn-Zylinder in einem inhomogenen Wechselfeld vom Scheitelwert B_a bei $T = 2{,}00°\,\mathrm{K}$

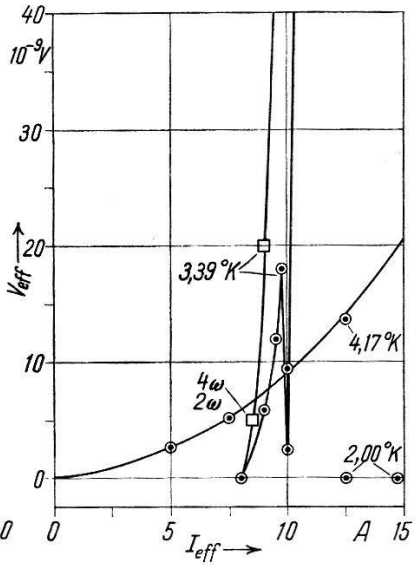

Fig. 8

Spannung V_{eff} als Funktion des Stromes I_{eff} für polykristallines Quecksilber im normal- und supraleitenden Zustand

Mit dem auf 0° C extrapolierten Widerstand des festen Quecksilbers ergab sich für verschiedene Proben in engen Grenzen derselbe Restwiderstand $W_{4{,}17°\mathrm{K}}/W_{273{,}2°\mathrm{K}} = (1{,}50 \div 1{,}75) \cdot 10^{-3}$.

In Fig. 8 ist eine Messung des Eigen-Hall-Effektes mit der Schaltung nach Fig. 2 im normalleitenden Zustand bei 4,17° K wiedergegeben. Wie gewohnt ist die Hall-Spannung proportional I_{eff}^2. Wir erhalten mit den Sondensystemen $A'\,B\,C'$ und $A\,B\,C$ den Hall-Koeffizienten $R = -\,2{,}0 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m^3/As}$. Ein Effekt vergleichbarer Grösse wäre nach Tab. 1 auch im supraleitenden Zustand zu erwarten. Für $T = 3{,}39°\,\mathrm{K}$ ist das Verhalten gezeigt, wie es unterhalb des Sprungpunktes typisch ist. Wir

beobachteten keine Spannungen der doppelten Frequenz $2\,\omega$ des Primärstromes, solange $I_{\text{eff}} < 8\,A$ blieb; darüber traten solche Spannungen auf, wobei der isoelektrische Punkt noch abgeglichen werden konnte. Nach Durchlaufen eines Maximums wurden die Galvanometer durch einige 10^{-7} V übersteuert; der Scheitelwert des Stromes hat hier den kritischen Wert I_c erreicht, der durch die Silsbee-Hypothese gefordert wird.

Bei $I_{\text{eff}} = 8\,A$ setzten aber auch Spannungen der Frequenzen $3\,\omega$ und $4\,\omega$ ähnlich wie in Fig. 7 ein. Ergänzende Gleich- und Wechselstrommessungen zeigten, dass sie von einem nichtlinearen Spannungsabfall längs der Probe begleitet sind, der max. $3^0/_{00}$ des normalen bei 4,17° K betrug, ehe er bei $10\,A$ steil anstieg. Bei $8\,A$ beginnt also bereits die Phasenumwandlung; die auftretenden Effekte sind für den Zwischenzustand von Interesse.

Im rein supraleitenden, isothermen Zustand bei 2,00° K konnten mit Gleichstrom an den Sonden A', B und C' keine Spannungen über $1 \cdot 10^{-8}$ V festgestellt werden; mit Wechselströmen $I_{\text{eff}} \leqq 17\,A$ waren an den Sondensystemen $A'\,B\,C'$ und $A\,B\,C$ die Spannungen der doppelten Frequenz $V_{\text{eff}} < 1 \cdot 10^{-9}$ V. Bei einem Eigen-Magnetfeld $B_a \leqq 220 \cdot 10^{-4}$ Vs/m² ergibt sich nach Gleichung (12.5) eine experimentelle obere Grenze des Hall-Koeffizienten für Hg $R'_S < 15 \cdot 10^{-12}$ m³/As.

Tabelle 2

Messungen des Hall-Effekts in Supraleitern

Supraleiter	Temp. T	Max. Magnetfeld B_a	Spannungsempfindlichkeit ΔV	Hall-Koeffizient R'_S	Messmethode	Literatur
	°K	$10^{-4}\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	10^{-9} V	$10^{-12}\,\frac{\text{m}^3}{\text{As}}$		
Pb	2,8 u. 4,2	300	50	< 6	konventionell mit Strom und Magnetfeld	Onnes und Hof 1914
V	1,5 ÷ 4,2	ca. 1000	ca. 10	<15	mit Abschirmströmen	Lewis 1953
Pb	2,0 ÷ 4,2	750	1	< 2	mit Abschirmströmen	diese Arbeit
Sn	2,0	210	1	<16		
Hg	2,0 ÷ 4,1	220	1	<15	Eigen-Hall-Effekt	diese Arbeit

Die Resultate der Messungen des Hall-Effekts in Supraleitern sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Beim Vergleich mit Tabelle 1 erkennt man, dass die abgeschätzten Koeffizienten um 1 bis 2 Grössenordnungen unterschritten wurden.

Dauerstromversuche zum Nachweis des Hall-Effekts wurden nicht ausgeführt; sie lassen wohl nur eine weitere Tieferlegung der Messgrenze erwarten.

13. Diskussion

Als Grundlage unserer Diskussion nehmen wir die Theorie von Bopp 1937, die im Supraleiter im stationären Fall ein elektrisches Feld voraussagt. Ausführliche Erwähnung findet diese Theorie bei London 1950 und Lewis 1955; wir beschränken uns hier auf das für den Hall-Effekt wesentliche.

Bopp behandelt die supraleitenden Elektronen als reibungsfreie Flüssigkeit, für deren Bewegungsgleichung er ansetzt

$$m\, n_S \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad})\, \boldsymbol{v} \right) = n_S\, e\, (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,. \tag{13.1}$$

Unter Verwendung von $\boldsymbol{J} = ne\boldsymbol{v}$, Gleichung (12.2) und (12.7) erhält man

$$-\boldsymbol{E} + \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \frac{\Lambda}{2\, n_S\, e}\, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{J}^2 = \frac{\boldsymbol{J}}{n_S\, e} \times [\boldsymbol{B} + \Lambda\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{J}]\,. \tag{13.2}$$

Bezeichnet man die eckige Klammer mit $\boldsymbol{W}$ und bildet auf beiden Seiten von Gleichung (13.2) die Rotation, so wird

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} = \mathrm{rot} \left(\frac{\boldsymbol{J}}{n_S\, e} \times \boldsymbol{W} \right)\,. \tag{13.3}$$

Ist $\boldsymbol{W} = 0$ zur Zeit $t = 0$, so ist auch $\partial \boldsymbol{W}/\partial t = 0$ und $\boldsymbol{W}$ bleibt Null für alle Zeiten. Da sich der Meissner-Effekt unabhängig von den Anfangsbedingungen einstellt, muss man setzen

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B} + \Lambda\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{J} = 0\,. \tag{13.4}$$

Dies ist die 1. Londonsche Gleichung. Dann gilt aber weiter

$$\boldsymbol{E} = \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \frac{\Lambda}{2\, n_S\, e}\, \mathrm{grad}\, \boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{E}_L + \boldsymbol{E}_B\,, \tag{13.5}$$

was der 2. Londonschen Gleichung $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_L$ mit einem zusätzlichen Feld $\boldsymbol{E}_B$ entspricht.

Wenn wir diese Ableitung verfolgen, so sehen wir, dass die mit Λ verknüpften Terme von der Beschleunigung in Gleichung (13.1) herrühren. Mit Gleichung (13.4) bedeutet die rechte Seite von Gleichung (13.2), dass die Lorentz-Kraft durch eine Trägheitskraft kompensiert wird – ganz im Sinne von London –, was einen Hall-Effekt im üblichen Sinne ausschliessen würde. Doch zeigt die linke Seite von Gleichung (13.2), dass noch ein elektrisches Feld analogen Trägheitskräften das Gleichgewicht hält, das im stationären Fall für dicke Supraleiter genau gleich dem Hall-Feld nach Gleichung (12.3) ist

$$\boldsymbol{E}_B = \frac{m}{2e} \operatorname{grad} \boldsymbol{v}^2 = \frac{\Lambda}{2 n_S e} \operatorname{grad} \boldsymbol{J}^2 = \frac{\mu_0}{2 n_S e} \operatorname{grad} \boldsymbol{H}^2 . \tag{13.6}$$

Wie wir in Tabelle 1 zeigen, kann dieses Feld hohe Werte erreichen. Das Londonsche Feld $\boldsymbol{E}_L$ in der Oberfläche wird von gleicher Grösse erst bei der Zyklotronfrequenz $\omega = e/m \cdot B_a$, die sich für Zinn mit dem kritischen Feld bei $T = 0$ berechnet zu $\omega = 5{,}36 \cdot 10^9\ \mathrm{sec}^{-1}$. Bei solchen Frequenzen macht sich dann auch das Ohmsche Feld bemerkbar.

Bopp zeigt weiter, dass seine Theorie im Gegensatz zur Londonschen relativistisch invariant ist, was eine starke Stütze für das Feld $\boldsymbol{E}_B$ darstellt. London 1950 (vgl. 1938) hält es für möglich, dass die Theorie, die durch $\boldsymbol{E}_B$ nichtlinear wird, eine konsequentere Elektrodynamik des Supraleiters darstellen könnte. Doch erklärt Bopp, dass das Feld $\boldsymbol{E}_B$ nicht im Aussenraum beobachtbar ist. Er führt ausser Oberflächen- und Raumladungen wie im Normalleiter (vgl. Abschnitt 3) in der Oberfläche des Supraleiters noch eine elektrische Doppelschicht ein, in der das Potential von V_S auf Null springt. Diesem Potentialsprung entspricht das Pippardsche Kontaktpotential.

Unsere Versuche ergaben im rein supraleitenden, isothermen Zustand keine Spannungen über $1 \cdot 10^{-9}$ V, während solche der Grössenordnung 10^{-7} V zu erwarten wären, wenn der Hall-Effekt wie in den normalleitenden Proben mit unseren Anordnungen messbar wäre. Dieses Resultat lässt für den stationären Fall zwei Deutungen zu:

a) Ein elektrisches Feld ist im Innern des Supraleiters vorhanden, es kann aber nicht an der Aussenfläche des Supraleiters mit Hilfe von Sonden nachgewiesen werden. Man müsste weitere Konsequenzen eines derartigen Feldes experimentell überprüfen.

b) Im Innern des Supraleiters besteht kein elektrisches Feld. Dies sollte theoretisch näher begründet werden.

Aus unserer experimentellen oberen Grenze des Hall-Koeffizienten R_S' schliessen wir keinenfalls auf die Konzentration der supraleitenden Elektronen n_S. Um über n_S Aussagen machen zu können, sind wir weiterhin auf indirekte Bestimmungsmethoden angewiesen. Wir erwähnen die absolute Messung der Eindringtiefe; eine solche führen wir an Hohlkörpern durch (vgl. JAGGI und SOMMERHALDER 1958).

Unserem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. G. BUSCH, möchten wir auch an dieser Stelle für seine vielen wertvollen Anregungen und sein förderndes Interesse herzlich danken, ebenso Herrn Dr. J.-P. JAN für nützliche Diskussionen und Literaturhinweise. Dem Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung danken wir bestens für finanzielle Unterstützung dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

J. BARDEEN in S. FLUEGGE, Hdb. Physik *15*, 274 (1956); Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg.

R. BECKER, G. HELLER und F. SAUTER, Z. Physik *85*, 772 (1933).

F. BOPP, Z. Physik *107*, 623 (1937).

E. S. BOROVIK, Doklady Akad. Nauk S.S.S.R. *95*, 485 (1954).

G. BUSCH, Helv. Phys. Acta *27*, 204 (1954).

G. BUSCH und R. JAGGI, Z. angew. Math. Phys. *4*, 425 (1953); vgl. Helv. Phys. Acta *26*, 577 (1953).

G. BUSCH, R. JAGGI und P. BRAUNSCHWEIG, Helv. Phys. Acta *26*, 391 (1953).

G. BUSCH, R. JAGGI und R. KERN, Helv. Phys. Acta *28*, 452 (1955).

G. BUSCH, R. KERN und U. WINKLER, Helv. Phys. Acta *26*, 390 (1953).

E. COOK, Phys. Rev. *58*, 357 (1940).

W. L. GINSBURG, Abhandlungen aus der sowjetischen Physik *2*, 135 (1951).

E. H. HALL, Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. *19*, 619 (1933).

R. JAGGI, Helv. Phys. Acta *29*, 201 (1956).

R. JAGGI, Helv. Phys. Acta *30*, 228 (1957).

R. JAGGI in Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen, 6. Aufl., Bd. *II/6*, 161 (1959); Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg.

R. JAGGI und R. SOMMERHALDER, Helv. Phys. Acta *31*, 292 (1958).

J.-P. JAN in F. SEITZ und D. TURNBULL, Solid State Physics *5*, 1 (1957); Academic Press Inc. New York.

E. E. KOHNKE und A. W. EWALD, Phys. Rev. *102*, 1481 (1956).

F. KOLÁČEK, Ann. Physik *39*, 1491 (1912).

W. KÖSTER und W. SCHÜLE, Z. Metallkde. *48*, 628 (1957).

M. VON LAUE, Theorie der Supraleitung, 2. Aufl. 1949; Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg.

H. W. LEWIS, Phys. Rev. *92*, 1149 (1953).

H. W. LEWIS, Phys. Rev. *100*, 641 (1955).

F. LONDON, Z. Physik *108*, 542 (1938).

F. London, Superfluids Vol. I (1950); Wiley New York.

H. A. Lorentz, Comm. Leiden Suppl. No. 50 (1924).

W. P. Mason, W. H. Hewitt und R. F. Wick, J. Appl. Phys. *24*, 166 (1953).

W. Meissner in W. Wien und F. Harms, Hdb. Experimentalphysik *11. 2* (1935); Akad. Verlagsges. Leipzig.

H. Kamerlingh Onnes und K. Hof, Proc. Amsterdam *17*, 520 (1914) (Comm. Leiden Nr. 142b).

A. L. Perrier, Helv. Phys. Acta *31*, 558 (1958).

W. van B. Roberts, Phys. Rev. *24*, 532 (1924).

D. Shoenberg, Superconductivity, 2nd Ed. 1952; Cambridge Univ. Press.