

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 31 (1958)

**Heft:** VII

**Artikel:** Production directe de paires d'électrons par des électrons de grande énergie

**Autor:** Weill, R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112927>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Production directe de paires d'électrons par des électrons de grande énergie

par **R. Weill**

Laboratoire de Recherches Nucléaires, E.P.U.L., Lausanne

(3 VII 1958)

---

*Summary.* The methods of energy measurement of electron pairs discussed in previous publications<sup>10)42)</sup> have been improved: The limits of application of direct angle measurements have been recalculated; the three dimensional model of track formation, which accounts for the variation of ionisation on the initial track of electron pairs, has been perfected. These results, joined to our previous study of spurious scattering<sup>10)</sup> confirm the energy measurements we made for the determination of the mean free path  $\lambda$  of direct electron pairs production.

We have found that the KAPLON and KOSHIBA's factor  $f_i$  used for the calculation of the number of pseudotridents are too large. This can introduce an overestimation on  $\lambda$  up to four times at 100 GeV.

If the disagreement between BHABHA and RACAH's theoretical values and the experimental determination of  $\lambda$  seem to be established, the values deduced from STUECKELBERG's remark agree quite well with the experiment.

We calculated also the influence of 'anomalous' trident production on shower development.

### Introduction

La mesure du libre parcours moyen  $\lambda$  de production directe de paires d'électrons par les électrons a déjà fait l'objet d'un grand nombre de publications<sup>1-10)</sup>. Ce travail constitue une suite des études que nous avons publiées précédemment.

Nous y avons repris l'étude de la mesure directe de l'angle des paires d'électrons (§ I, 1). Nous avons poursuivi l'élaboration du modèle tridimensionnel de formation des traces initiales des paires en y introduisant le schéma de formation de l'image latente de DEMERS, modifié par DELLACORTE (II). Nous avons également étudié l'influence de la méthode approchée du calcul des faux tridents donnée par BLOCK et KING, sur les valeurs expérimentales de  $\lambda$  publiées par les divers auteurs. Nos résultats enfin ont été confrontés avec de nouvelles valeurs théoriques déduites des travaux de STUECKELBERG.

Comme précédemment, nous n'avons considéré que les cascades électrophototoniques où l'énergie mise en jeu est supérieure à 20 GeV, en suivant les traces sur des longueurs allant jusqu'à 4 cm. Celles-ci ont été groupées comme précédemment en 3 classes (2 à 8, 8 à 32 et 32 à 150 GeV). La largeur de chaque classe représente à peu près la perte d'énergie moyenne d'un électron ayant l'énergie supérieure de cette classe sur un parcours de 4 cm dans l'émulsion.

### I. Mesure de l'énergie des électrons

L'énergie des électrons producteurs de tridents a été mesurée par diffusion multiple relative chaque fois que l'on disposait, sur une longueur suffisante, de traces distantes de 1 à 20  $\mu\text{m}$ . Nous avions montré<sup>13)</sup>, en accord avec d'autres auteurs<sup>14)</sup><sup>15)</sup> que dans ces conditions, la diffusion parasite due aux dislocations (spurious scattering) était éliminée.

Un bon nombre des traces étudiées proviennent de paires d'électrons. Dans le cas de paires de grande énergie, les longueurs de trajectoires disponibles sont souvent insuffisantes pour permettre une mesure de diffusion multiple : d'une part les traces des deux électrons sont fréquemment indiscernables sur plusieurs mm, d'autre part le développement des gerbes qu'ils engendrent rend ambiguë l'identification de leurs trajectoires après quelques cm. Dans ce cas l'estimation de l'énergie d'une paire  $E$  peut être effectuée à partir de la mesure de son angle d'ouverture  $\omega$  dont la valeur la plus probable a été donnée par BORSELLINO :

$$\omega_a = \frac{4 m_e c^2}{E} \varphi(a) \quad (1)$$

l'énergie d'un des électrons =  $E \cdot a$ . (A l'équipartition  $a = 0,5$  et  $\varphi(a) = 1$ ) en pratique  $\varphi(a) \simeq 1$ .

La relation (1), vérifiée expérimentalement jusqu'à 10 GeV<sup>17)</sup><sup>18)</sup><sup>19)</sup><sup>20)</sup><sup>46)</sup> permet la détermination de l'énergie moyenne  $E/2$  de chacun des deux électrons de la paire, si l'on dispose de leur angle d'ouverture  $\omega$ .

#### 1. Mesure directe de l'angle des paires d'électrons

Considérons une paire d'électrons d'ouverture angulaire à l'origine donnée  $\omega_e$ ; soit  $\omega$  l'angle projeté dans le plan de l'émulsion; soit  $Y_0, Y_1 \dots Y_i \dots$  (en  $\mu\text{m}$ ) les séparations projetées des deux traces aux points  $x_0, x_1 \dots x_n$ , d'abscisse  $X_0, X_1, \dots X_i \dots X_n$  ( $S$  est la distance entre deux points consécutifs, mesurée en centaines de  $\mu\text{m}$ , comme  $X$ )

$$Y_0 = \omega \cdot 10^2 S N + (\beta'_0 + \beta''_0) 10^2 S N + y'_0 + y''_0$$

$$Y_1 = \omega \cdot 10^2 S(N+1) + (\beta'_0 + \beta''_0) 10^2 S(N+1) + (\beta'_1 + \beta''_1) 10^2 S + y'_1 + y''_1$$

.....

$$Y_i = \omega \cdot 10^2 S(N+i) + (\beta'_0 + \beta''_0) 10^2 S(N+i) + i(\beta'_1 + \beta''_1) 10^2 S + \dots \\ \dots + (\beta'_i + \beta''_i) 10^2 S + y'_i + y''_i$$

où:  $N = \frac{X_0}{S}$

$\beta'_i(\beta''_i)$  est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } i = 0: \text{l'angle entre la corde } x'_0 0(x''_0 0) \text{ et la tangente à} \\ \text{la trajectoire correspondante en } 0; \\ \text{pour } i \neq 0: \text{l'angle entre les cordes} \\ x'_i, x'_{i-1}(x''_i, x''_{i-1}) \text{ et } x'_{i-1}, x'_{i-2}(x''_{i-1}, x''_{i-2}); \end{array} \right.$

le déplacement angulaire  $\beta'_i(\beta''_i)$  considéré ici est dû exclusivement à la diffusion multiple coulombienne.  $y'_i(y''_i)$  est le déplacement latéral de la trace résultant de la dispersion des grains autour de la trajectoire (bruit de fond).

$\beta'_i(\beta''_i)$  et  $y'_i(y''_i)$  étant des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle, distribuées selon une loi de GAUSS, chacun des termes  $Y_i/10^2 S(N+i) = \omega + \Omega_i$  est également une variable gaussienne, de moyenne  $\omega$  et de variance:

$$\sum_i^2 = \sum_d^2 + \sum_g^2 \quad (2)$$

où  $\sum_d^2$  est la contribution de la diffusion multiple coulombienne et  $\sum_g^2$  celle de la dispersion des grains d'argent autour des trajectoires.

$$\sum_d^2 = S \left( K \frac{\pi}{180} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{N(N+i)^2 + \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}}{(N+i)^2} \right] \left( \frac{1}{E'^2} + \frac{1}{E''^2} \right)$$

$$k = 26 \frac{\text{MeV} \cdot \text{degré}}{\sqrt{100 \mu}}$$

est la constante de diffusion multiple utilisée dans les mesures sagittales.

$$\sum_g^2 = \left( \frac{0,17}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2$$

0,17  $\mu\text{m}$  est la diffusion parasite due à la dispersion des grains dans les mesures sagittales.

Nous prendrons comme valeurs mesurées de l'angle d'ouverture  $\omega$  celles données par

$$\omega = \frac{Y_i}{10^2 S(N+i)}$$

en posant  $\Omega_i = 0$ , cette valeur étant affectée d'une incertitude  $\pm \sum_i$  (formule (2)) intervalle de confiance à 68% sur  $\Omega_i$ . Le résultat n'a évidemment une signification que si  $\omega > \sum_i$ .

Le fait que dans l'expression donnant les  $Y_i$ , les facteurs multipliant  $\omega$  et  $\beta'_0 + \beta''_0$  soient les mêmes, montre qu'il n'existe pas de combinaison linéaire des  $Y_i$  permettant d'obtenir une variance sur  $\omega$  plus petite que celle correspondant à la mesure au point  $X_0$ . Contrairement à ce qui a été publié précédemment\*), il y a donc intérêt à effectuer les mesures d'angles d'ouverture le plus près possible de l'origine des paires. Il sera cependant nécessaire au point choisi de répéter deux ou trois fois les déterminations de  $Y_i$  à quelques  $\mu\text{m}$  d'intervalle, afin d'éliminer le bruit de fond des grains.

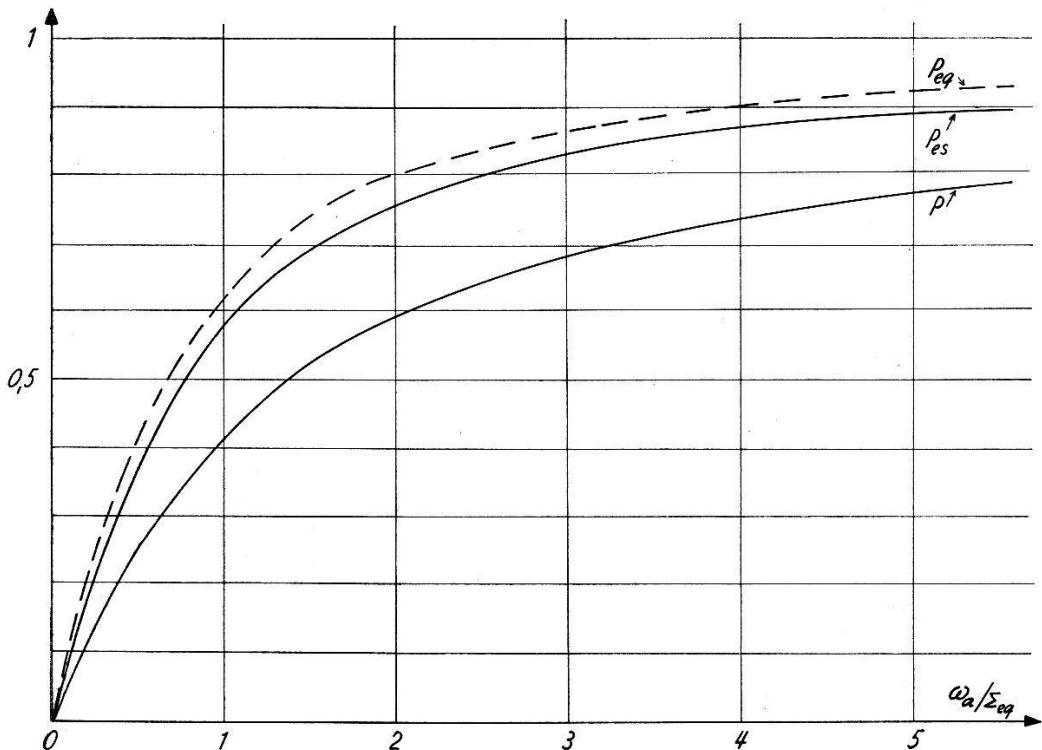


Fig. 1

Représentation de la probabilité pour que la contribution de la diffusion multiple soit inférieure à celle provenant de l'ouverture initiale en fonction de  $\omega_a/\Sigma_{eq}$ .  $P_{eq}$  (cas de l'équipartition) valable pour toutes valeurs de  $E$ .  $P$  (cas général) valable pour  $E > 300 \text{ MeV}$ .  $P_{es}$  est applicable lorsqu'on mesure l'angle dans l'espace.

## 2. Limites d'application de cette méthode

Le calcul détaillé donnant la probabilité  $P_{eq}$  pour que la contribution du bruit de fond soit inférieure à celle provenant de l'ouverture initiale d'une paire, lors de la mesure de son écartement projeté, a déjà été publié<sup>13)</sup>. Les résultats sont valables pour le cas de l'équipartition de

\*) Nous remercions Mademoiselle DI CORATO qui nous a signalé une erreur dans le calcul de  $\Sigma_d^2$ .

l'énergie du photon aux deux électrons (fig. 2 de<sup>13</sup>). On peut les généraliser en tenant compte de la distribution de probabilité  $f(a)$  de  $E'$  et  $E''$ , donnée par HEITLER<sup>21</sup>).

$$P = \int_0^1 f(a) P_{eq} da \quad (3)$$

$$\text{avec } E' = E a \quad E'' = E (1 - a)$$

Le calcul numérique a été conduit en faisant usage de la représentation graphique de  $f(a)$  donnée pour  $E = \infty$  (fig. XII, 11, p. 178 de<sup>22</sup>). Les erreurs de calculs pouvant résulter des méthodes d'intégration mises en

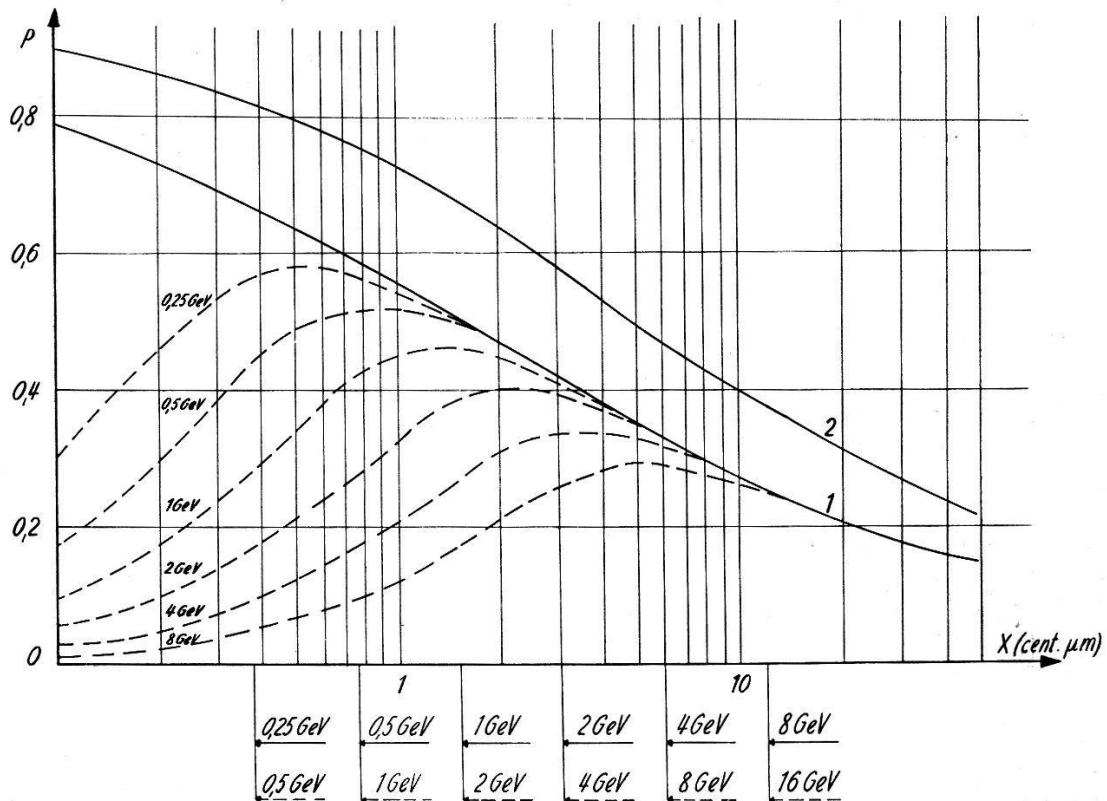


Fig. 2

Probabilité  $P$  pour que la contribution de la diffusion multiple soit inférieure à celle provenant de l'ouverture initiale, en fonction de la distance au sommet ( $X$  en cent. de  $\mu\text{m}$ ) à laquelle on mesure la séparation des trajectoires. 1: mesure de l'angle projeté. (Traits interrompus: sans élimination du bruit de fond des grains.) Les flèches en traits continus donnent pour diverses énergies les distances au sommet auxquelles on peut en moyenne commencer les mesures (pointillés: mesures de séparation à partir du profil de la trace). 2: mesure de l'angle dans l'espace.

(Variation de l'ionisation) ( $P_{es}$ ).

œuvre n'excèdent pas 5%. A la figure 1,  $P$  valable en fait pour  $E > 300 \text{ MeV}$ , à la précision des calculs, est représenté en fonction de  $\omega_a/\Sigma_{eq}$ ; on a également reporté  $P_{eq}$  pour  $E$  quelconque. (Pour  $E < 300 \text{ MeV}$ ,  $P$  se rapproche de  $P_{eq}$ .)

On en déduit le graphique donnant  $P$  en fonction de la distance au sommet ( $X$  en centaines de  $\mu\text{m}$ ) à laquelle on mesure la séparation  $Y$  (fig. 2). Les courbes en traits interrompus donnent pour diverses énergies les valeurs de  $P$  dans le cas où on n'élimine pas le bruit de fond des grains.

L'écartement minimum mesurable est de  $0,3 \mu\text{m}$  environ auquel correspond une abscisse moyenne  $X_{\min} \approx 0,3/\omega_a \cdot 10^{-2}$  (centaines de  $\mu\text{m}$ ). Les flèches en traits continus sur la figure donnent ces abscisses pour les énergies considérées.

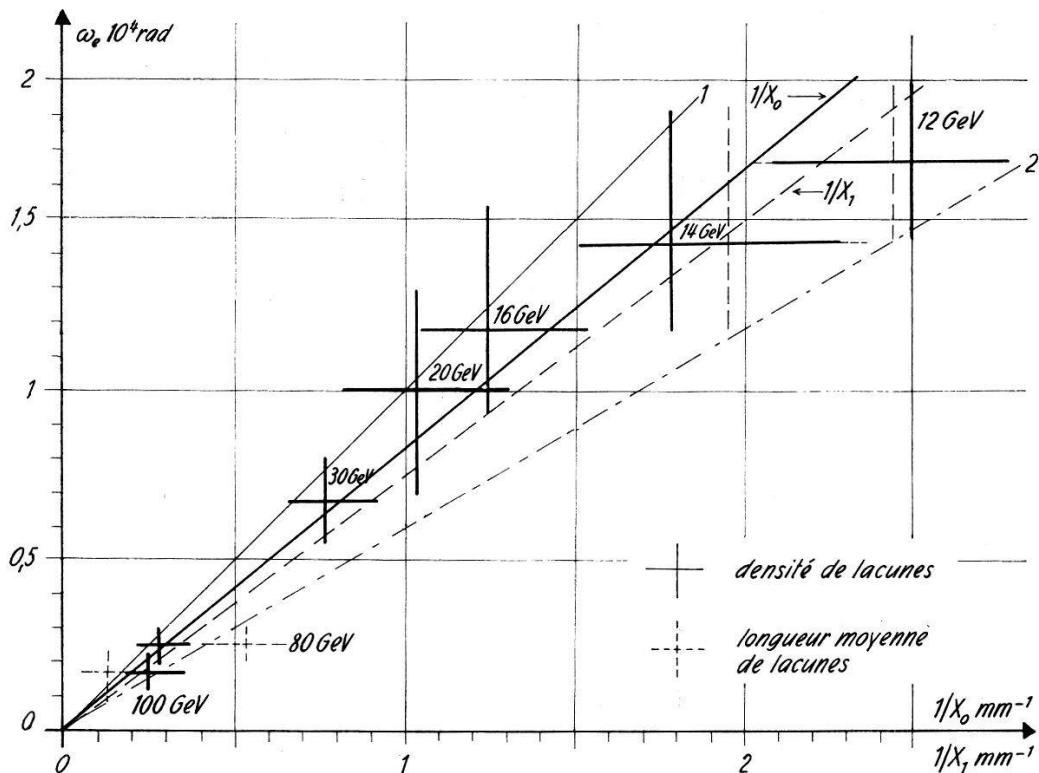


Fig. 3

Variation de  $1/X_0 \text{ mm}^{-1}$  (traits continus) et  $1/X_1 \text{ mm}^{-1}$  (traits interrompus) en fonction de  $\omega_a$ . Les chiffres relatifs à chaque point donnent l'énergie des paires utilisées. (1 et 2: modèle tridimensionnel.)

La mesure du profil de la trace permet d'atteindre des séparations d'environ  $0,15 \mu\text{m}$ . L'abscisse minimum est alors  $X_{\min} = 0,15/\omega_a \cdot 10^{-2}$  (en centaines de  $\mu\text{m}$ ). Elle est indiquée par les flèches pointillées pour les énergies données précédemment.

L'examen de la figure 2 (qui remplace les figures incorrectes 3 et 4 de <sup>13)</sup>) montre qu'avec la deuxième méthode la contribution de la diffusion multiple est inférieure à celle provenant de l'écartement initial dans plus de 50% des cas, pour des paires d'énergie inférieure à 2 GeV.

Nous considérerons cette valeur comme la limite d'application de la méthode.

Remarquons que selon DI CORATO<sup>23)\*</sup>, il conviendrait de prendre dans la relation de BORSELLINO (1)  $\varphi(a) = 1,5$ . Dans ce cas les valeurs de  $x$  données en abscisse à la figure 2 seraient à multiplier par 2, 3 et la limite d'application de la méthode serait alors reportée à 5 GeV.

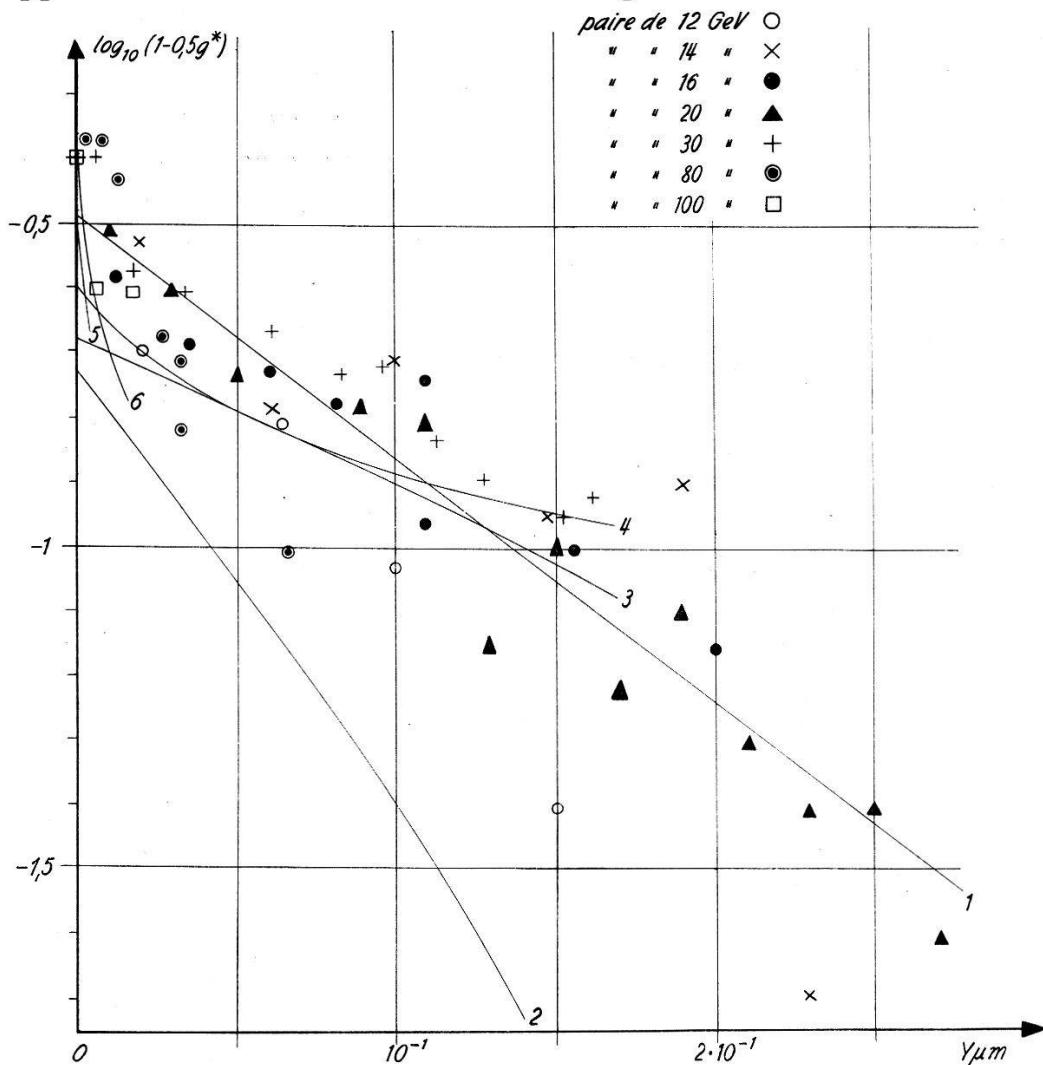


Fig. 4

Densité de lacunes relative au plateau  $g^*$  en fonction de l'écartement  $Y_{\mu m}$  des trajectoires. 1: droite des moindres carrés. Valeurs calculées sur la base du modèle tridimensionnel de formation des traces: 2:  $\delta = 0$ ; 3:  $\delta = 0,04$ ; 4:  $\delta = 0,12 \mu m$ ; 5: effet dipôle selon ČUDAKOV; 6: effet dipôle selon YEKUTIELLI.

### 3. Détermination de l'angle d'ouverture dans l'espace d'une paire d'électrons Mesure relative d'angles à partir de l'ionisation

Au voisinage de l'origine, une paire d'électron de grande énergie se présente sous l'aspect d'une trace unique, tant que la séparation des deux

\*) Note ajoutée aux épreuves: Les résultats préliminaires relatifs à la matérialisation de photons d'énergie de 100 à 1000 MeV obtenus par E. HART à l'aide du synchrotron de CORNELL, permettent de déduire une valeur expérimentale  $\varphi(a) = 1,4$  en bon accord avec celle  $\varphi(a) = 1,5$  tirée des travaux de DI CORATO (E. HART, communication privée).

trajectoires ne dépasse pas le rayon d'un grain d'argent de l'émulsion développée. Ainsi que l'ont signalé divers auteurs<sup>24) 25)</sup> à la suite de PERKINS<sup>26)</sup> la densité de lacunes sur cette trace croît à partir du sommet de la paire pour n'atteindre deux fois la valeur au plateau qu'après un parcours de plusieurs centaines de microns.

La variation de structure de la trace ne dépend que de la variation de l'écartement des trajectoires. Deux paires présenteront même densité et même longueur moyenne de lacunes aux points d'égales séparations.

Utilisant des cellules de 200 à 300  $\mu\text{m}$ , nous avons mesuré la densité et la longueur de lacunes relatives au plateau  $g^*$  et  $G^*$  sur les traces initiales de 7 paires d'électrons dont les énergies supérieures à 10 GeV ont été déterminées par diffusion multiple relative;  $g^*$  peut être représenté en fonction de l'abscisse  $X$  par une relation du type:

$$g^* = 2 \left[ 1 - a \exp \left( -\frac{X}{X_0} \right) \right]$$

pour  $G^*$  on a:

$$G^* = \frac{1}{2} \left( 1 + b \exp \left( -\frac{X}{X_1} \right) \right)$$

A la figure 3, les paramètres  $1/X_0$  et  $1/X_1$ , déterminés par l'analyse des moindres carrés pour chacune des paires étudiées, ont été représentés en fonction de l'angle  $\omega_a$  de BORSELLINO. Mais les droites tracées sur le graphique, résultant d'une moyenne, donnent en fait les variations de  $1/X_0$  et  $1/X_1$  avec l'angle  $\omega_e$  dans l'espace.

Nous avons calculé la probabilité pour que la mesure ainsi effectuée ait une signification  $P_{es}$  ( $\omega_e > |\Omega|$ ) à l'aide de la relation (4)

$$P_{es} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\sum}} \int_{a=0}^1 f(a) da \int_{z=0}^{\infty} \exp \left( -\frac{z^2}{2 \cdot 2\sum^2} \right) \int_{\frac{\omega}{\omega_a} = \frac{z}{\omega_a}}^{\infty} B(\omega/\omega_a) d\omega/\omega_a \quad (4)$$

$B(\omega/\omega_a)$  est la distribution de l'angle d'ouverture dans l'espace de la paire rapportée à sa valeur la plus probable selon BORSELLINO.

La variance considérée ici est  $2\Sigma_{eq}^2$  où  $\Sigma_{eq}$  est donné par la formule (2) avec  $\Sigma_g = 0$ .  $P_{es}$  a été reporté en fonction de la distance au sommet  $X$ , à la figure 2 (courbe 2). (En fonction de  $\omega_a/\Sigma_{eq}$  à la figure 1.)

La probabilité pour que la contribution de la diffusion multiple soit inférieure à celle provenant de l'ouverture initiale est supérieure à 50% pour  $X$  inférieur à 5 (12 si l'on prend  $\bar{\varphi}(a) = 1,5$ ).

La méthode proposée est donc applicable à toutes les paires d'énergie supérieure à environ 5 GeV.

La figure 4 donne le  $\log_{10}(1-0,5 g^*)$  et la figure 5 le  $\log_{10}(G^*-0,5)$  en fonction de l'écartement  $Y_a$  le plus probable des trajectoires dans l'espace.

$$Y_a = \omega_a \cdot 10^2 \cdot X$$

Une partie des mesures de  $G^*$  a été effectuée au moyen d'un appareil semi-automatique (lacunomètre) construit pour cet usage<sup>27)</sup>.

## II. Interprétation de la variation de la structure des traces à l'origine des paires d'électrons

### Introduction

Nous avons dès le début de ces recherches<sup>13)</sup> indiqué que la variation de densité de lacunes à l'origine des paires devait être due à un effet géométrique: soit  $\bar{\pi}$  la probabilité moyenne pour un grain traversé par une particule au plateau d'être rendu développable. Cette probabilité sera

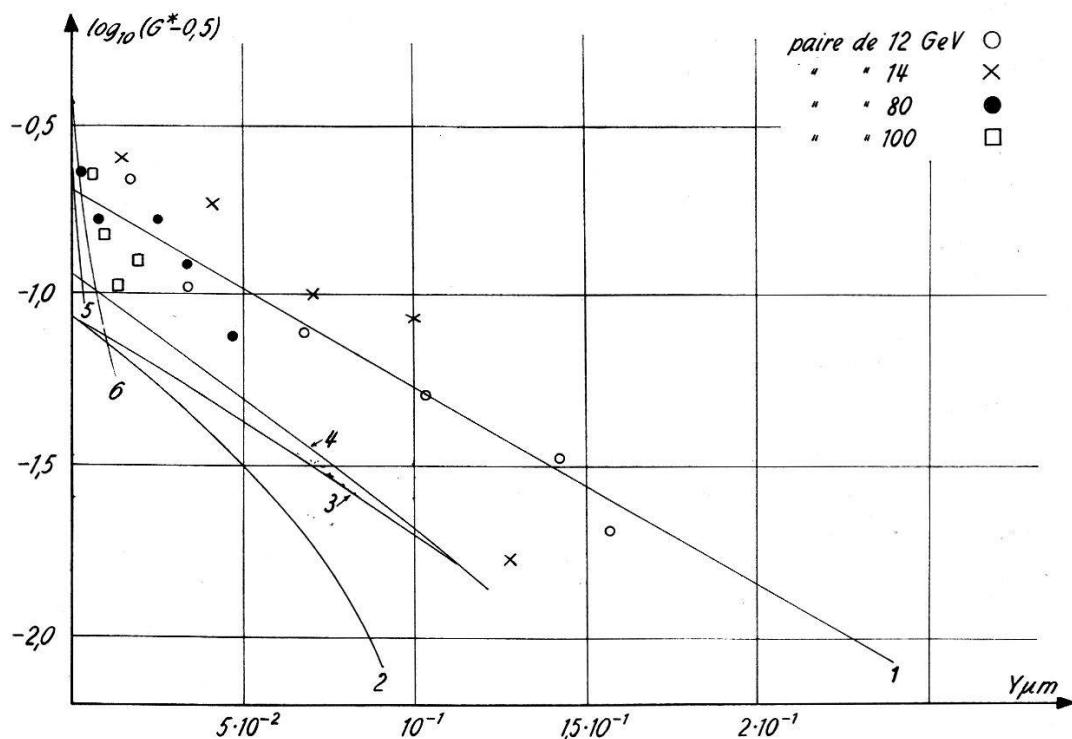


Fig. 5

Longueur moyenne de lacunes relative au plateau  $G^*$  en fonction de l'écartement  $Y \mu\text{m}$  des trajectoires. 1: droite des moindres carrés. Valeurs calculées sur la base du modèle tridimensionnel de formation des traces: courbe 2:  $\delta = 0$ ; courbe 3:  $\delta = 0,04 \mu\text{m}$ ; courbe 4:  $\delta = 0,12 \mu\text{m}$ ; courbe 5: effet dipôle selon ČUDAKOV; courbe 6: effet dipôle selon YEKUTIELLI.

$2\pi - \pi^2 < 2\bar{\pi}$ , lorsque ce grain sera traversé par deux particules indépendantes au plateau, séparées par une distance  $Y$  petite vis-à-vis du diamètre du grain d'AgBr. La densité de grains relative au plateau sera donc inférieure à 2 à l'origine; il en sera de même de la densité de lacunes. Une étude plus poussée de cet effet nécessite un modèle de formation des traces dans les émulsions nucléaires. La théorie de DELLACORTE et collaborateurs<sup>28) 29)</sup> permet, comme nous l'avons montré<sup>13)</sup> de rendre compte d'une valeur de  $g^* \approx 1,60$ , lorsque  $Y = 0$ . Mais les modèles

existants (principalement celui de DELLACORTE et celui d'O'CEALLAIGH<sup>30</sup>), tous unidimensionnels, ne permettent pas d'étendre les calculs aux cas  $Y \neq 0$ .

Nous avons alors été amenés à établir un modèle tridimensionnel simple (généralisation de celui d'O'CEALLAIGH) applicable au cas des paires d'électrons, dont la description a été donnée dans<sup>10</sup> et<sup>42</sup>: On supposait les grains cubiques de côté  $d = 2/3 d_0$ ,  $d_0$  étant le diamètre d'un grain d'AgBr. de l'émulsion réelle. On admettait que les centres de ces grains étaient distribués au hasard dans des plans perpendiculaires aux trajectoires, leur répartition étant caractérisée par une loi de POISSON tronquée; soit  $\bar{\pi}$  la probabilité moyenne pour un grain d'un plan d'être rendu développable et  $q$  sa probabilité de toucher la trajectoire considérée; posons  $P_{1d} = \bar{\pi} \cdot q$ . Appelons  $G$  la longueur moyenne de lacunes et  $g$  leur densité. On obtient:

$$(Pour P_{1d} < 0,2) \quad 1/G = a \cdot P_{1d} \quad (G \text{ est mesuré en unités } d_0)$$

$$g = \frac{P_{1d}}{\delta + d_0} \quad \text{exp. } [-f \cdot a \cdot P_{1d}] \quad (5)$$

$$\begin{array}{ll} \delta = 0,04 \text{ } \mu\text{m} & a = 1,00 \\ \delta = 0,12 \text{ } \mu\text{m} & a = 0,95 \end{array}$$

$f$  dépend du degré de développement, le diamètre  $D$  d'un grain d'argent étant égal à  $d_0 (1 + f)$ .

$\delta$  est une grandeur caractéristique de notre modèle, l'espace moyen entre deux plans supports de centre des grains étant  $\delta + d_0$ .

### 1. Application à l'étude de la formation de la trace à l'origine des paires d'électrons

Le problème dans le cas d'une paire d'électrons se traite formellement de la même façon; soient deux trajectoires parallèles à l'axe  $x$ , dans le plan  $xy$ , séparées par une distance  $Y$ . Il suffit de remplacer  $P_{1d}$  dans l'expression (5) par  $P_{2d}$ , probabilité pour qu'un plan traversé par deux trajectoires présente un ou deux grains développables. Soient  $A$  et  $B$  l'intersection des deux trajectoires avec un plan (les deux trajectoires sont parallèles à deux faces opposées de chaque grain).  $P_{2d}$  se calcule en considérant toutes les positions possibles de  $A$  et  $B$  pour lesquelles un ou deux grains sont rendus développables. (Ce calcul constitue un développement de celui indiqué dans<sup>10</sup>): (pour  $Y < d$ ).

a)  $A$  est dans un grain et le rend développable, alors que  $B$  est en dehors de tous grains ou vice versa.

b)  $A$  et  $B$  sont dans le même grain qui est rendu développable soit par  $A$  soit par  $B$  ou simultanément par  $A$  et  $B$ .

c)  $A$  et  $B$  sont chacun dans un grain différent, rendant l'un ou l'autre ou les deux développables.

Les parties géométriques de ces probabilités sont:

$$a) \quad P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+d} [1 - \exp(-Y/\lambda)]$$

$$b) \quad P_2 = \frac{d-Y}{\lambda+d}$$

$$c) \quad P_3 = \frac{1}{\lambda+d} [Y + \lambda \{ \exp[-Y/\lambda] - 1 \}]$$

$\lambda$  est l'espace moyen entre bords de grains (de côté  $d$ ) suivant une direction parallèle à  $y$  ou à  $z$ ;  $\lambda$  dépend de  $\delta$ . (Voir <sup>10</sup>), où  $\lambda = \varrho$ .

Pour tenir compte de la probabilité pour un grain touché d'être rendu développable, nous ferons appel au schéma de formation de l'image latente élaboré par DEMERS<sup>34</sup>).

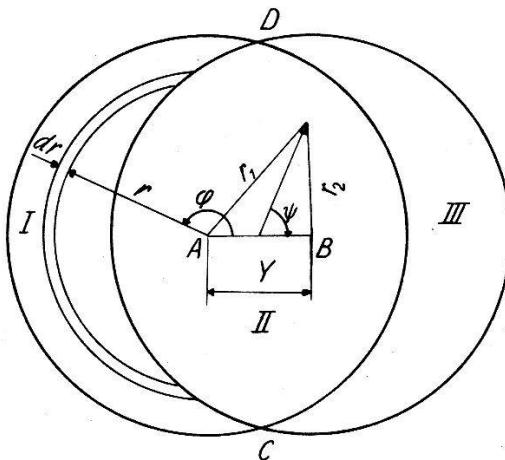


Fig. 6

Si  $l$  est le parcours de la particule dans un grain d'AgBr, la probabilité que ce grain soit impressionné est:

$$\pi(l) = 1 - \exp[-\beta \eta l] \quad (6)$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\alpha}{\varepsilon} dE/dR \quad \text{selon } ^{29})$$

$dE/dR$  = perte d'énergie unitaire de la particule.

$\varepsilon$  = potentiel d'ionisation moyen du cristal d'AgBr.

$\alpha$  = constante dépendant de l'émulsion.

$\eta$  = facteur de recombinaison dépendant de  $dE/dx$  calculé par DELLACORTE<sup>29</sup>).

Déterminons les probabilités moyennes de développement correspondant aux trois conditions géométriques définies sous a), b), c). Soit  $Y$  l'écartement des deux trajectoires  $A$  et  $B$  (fig. 6). Soient deux cercles de diamètres  $d_0$ , de centres  $A$  et  $B$ .

1. Les grains dont les centres sont situés dans le croissant I ou III ne sont touchés que par une des trajectoires. Leur probabilité moyenne d'être impressionnés est:

$$f_1(Y) = \frac{2}{S_I} \int_{R-Y}^R r dr \left\{ \pi - \arccos \frac{r^2 + Y^2 - R^2}{2rY} \right\} \pi \left( 2\sqrt{R^2 - r^2} \right)$$

$S_I$  = surface de la zone I.

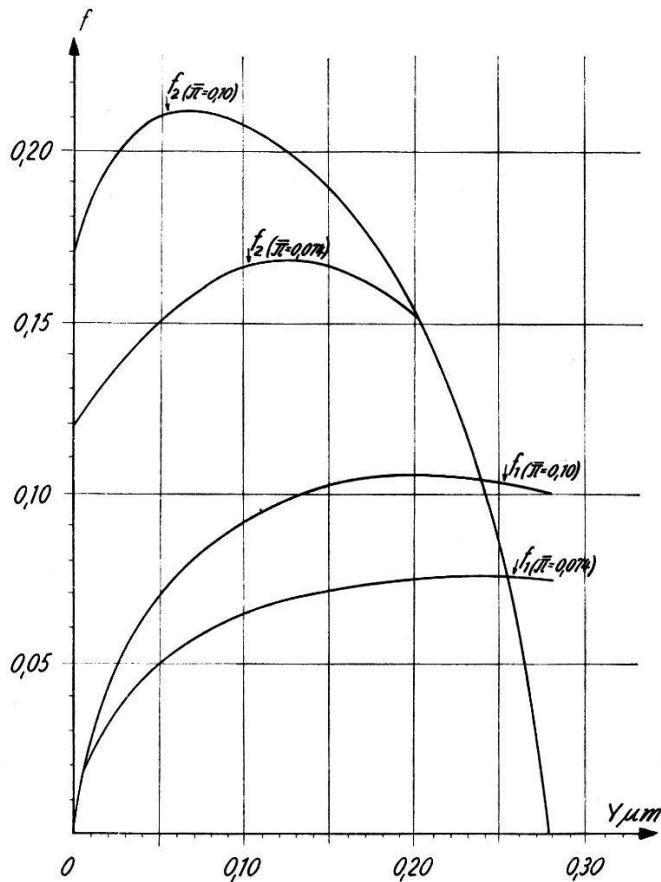


Fig. 7

2. Les grains dont les centres sont situés dans le domaine II touchent simultanément  $A$  et  $B$ . La probabilité pour un grain de centre en  $\varrho$ ,  $\psi$  d'être impressionné est:

$$\pi(l_1) [1 - \pi(l_2)] + \pi(l_2) [1 - \pi(l_1)] + \pi(l_1) \pi(l_2) =$$

$$= 1 - \exp [-\beta \eta (l_1 + l_2)] = \pi(l_1 + l_2)$$

$$\text{avec: } l_1 = 2 \sqrt{R^2 - Y^2/4 - \varrho^2 - \varrho Y \cos \psi}$$

$$l_2 = 2 \sqrt{R^2 - Y^2/4 - \varrho^2 + \varrho Y \cos \psi}$$

La probabilité moyenne pour un grain dont le centre est sur la zone II d'être impressionné sera :

$$f_2(Y) = \frac{1}{S_{II}} \iint_{II} \varrho \, d\varrho \, d\psi \, \pi(l_1 + l_2)$$

$S_{II}$  = surface de la zone II.

A la figure 7,  $f_1$  et  $f_2$  sont représentés en fonction de  $Y$  pour  $\bar{\pi} = 0,074$  et  $\bar{\pi} = 0,10$ .

Alors :

$$P_{2d} = \frac{2 \lambda (1 - \exp [-Y/\lambda]) f_1 + (d - Y) f_2 + [Y - \lambda (1 - \exp [-Y/\lambda])] (2 f_1 - f_1^2)}{\lambda + d} \quad (7)$$

Dans les émulsions G5 utilisées pour ce travail  $G = 4 \mu\text{m}$ . La relation (5) permet d'en déduire les grandeurs suivantes, correspondant aux 3 valeurs de  $\delta$  choisies :

$\delta \mu\text{m}$	$q$	$P_{1d}$	$\pi$
0	0,70	0,070	0,100
0,04	0,80	0,070	0,088
0,12	1,00	0,074	0,074

(La relation (6) donne les valeurs de  $\beta \eta$ .) On peut alors construire les courbes représentant la variation de  $G^*$  et  $g^*$  en fonction de  $Y$  (courbes 2, 3, 4 des figures 4 et 5). A la figure 3 on a également reporté les variations de  $1/X_0$  et  $1/X_1$  moyens (droites 1 et 2) que l'on peut déduire des valeurs calculées de  $g^*$  et  $G^*$ .

Les grandeurs ainsi obtenues s'accordent qualitativement avec les résultats expérimentaux. On voit en particulier qu'avec notre modèle  $g^*$  tend bien vers  $\sim 2$  pour des écartements de l'ordre de  $2$  à  $3 \cdot 10^{-1} \mu\text{m}$ ;  $G^*$  tend vers  $\sim 0,45$  pour ces mêmes valeurs.

La variation de l'ionisation sur la trace initiale des paires, mesurée par des cellules d'environ  $200 \mu\text{m}$ , peut donc être interprétée comme provenant de la structure géométrique du détecteur utilisé.

Ainsi que nous l'avons déjà montré<sup>10) 42)</sup>, un phénomène du type dipôle (proposé par PERKINS) ne permet de rendre compte de la variation de structure de la trace initiale des paires que pour des tronçons limités à 100 ou  $200 \mu\text{m}$  du sommet, c'est-à-dire pour des distances 10 fois plus courtes que celles considérées.

Il en résulte que l'application inconsidérée des théories de l'Effet dipôle<sup>36) 37) 38)</sup> peut conduire à des surestimations sur les énergies des paires allant jusqu'à 100 fois.

Remarquons enfin que les valeurs de  $\bar{\pi}$  que nous avons obtenues, supérieures à celles que l'on déduit de la théorie de DELLACORTE ( $\bar{\pi} = 0,045$ ), sont en bon accord avec celles données par DODD et WALLER<sup>35)</sup> d'une part ( $\bar{\pi}$  compris entre 0,11 et 0,13), et BAILLARD<sup>31)</sup> d'autre part ( $\bar{\pi} = 0,09$ ).

### III. Mesure du libre parcours moyen de production directe de paires

#### 1. Détermination du nombre de faux tridents

Rappelons qu'une paire créée directement par l'électron primaire (vrai trident) apparaît comme une paire dont le sommet est situé sur la trace de cet électron. Ce phénomène est indiscernable de la production parasite de faux tridents, résultant de la matérialisation de photons de freinage à une distance de la trajectoire inférieure au diamètre d'un grain d'argent.

Soit alors  $N_i$  le nombre de tridents observés sur un tronçon de longueur  $l_i$ , pour une classe d'énergie donnée. Le principe du maximum de vraisemblance nous indique que la valeur de  $\lambda$  à adopter comme résultat des mesures est :

$$\lambda = \frac{\sum_i l_i}{\sum_i (N_i - \nu_{fi})}$$

$\nu_{fi}$  étant le nombre moyen de faux tridents sur le tronçon de longueur  $l_i$ .

Jusqu'à maintenant les différents expérimentateurs utilisaient la méthode proposée par BLOCK et al.<sup>39)</sup> : Ils mesuraient le nombre de tridents  $N_i$  et le nombre total de paires  $n_{vi}$  (tridents compris) observées sur la trajectoire et dans son voisinage. La connaissance du facteur  $f_i = \nu_{fi}/n_i$ , leur permettait d'en déduire :

$$N_i - \nu_{fi} = \frac{N_i - n_{vi} \cdot f_i}{1 - f_i} = \text{nombre de vrais tridents}$$

( $n_i$  est le nombre total de photons de rayonnement convertis sur la longueur  $l_i$ ).

Les facteurs  $f_i$  ont été calculés par KAPLON et KOSHIBA<sup>19) 40)</sup> après BLOCK et al.<sup>39)</sup>. Remarquons que cette méthode peut conduire dans le cas d'électrons de grande énergie à des valeurs erronées de  $\lambda$ , une certaine fraction non négligeable des paires dénombrées provenant d'électrons secondaires, ce qui entraîne à une surestimation de  $n_{vi}$ .

Les travaux de ROSSI<sup>41)</sup> (fig. 5. 13. 2) sur l'évolution statistique des cascades, nous permettent de calculer que l'utilisation de la méthode de BLOCK et al. amène à compter environ 1,3 fois trop de faux tridents. Cette erreur sans influence notable jusqu'à 10 GeV, entraîne par contre à une surestimation de  $\lambda$  d'environ 1,7 fois à 100 GeV.

Nous avons éliminé cet inconvénient par une méthode plus homogène en calculant sur la seule base des sections efficaces de radiation et de conversion données par BETHE-HEITLER, le nombre de faux tridents

$$v_{fi} = n_i \cdot f_i$$

pour des énergies de l'électron allant jusqu'à 100 GeV et des longueurs de trajectoires comprises entre 0 et une longueur de rayonnement<sup>10) 42)</sup>; nous avons également calculé les facteurs  $f_i$  pour les mêmes conditions; ceux-ci sont inférieurs aux valeurs données par KAPLON et KOSHIBA. Nous avons déjà indiqué<sup>10) 42)</sup> les raisons qui nous font considérer nos résultats comme plus corrects que ceux publiés par ces derniers auteurs. Cette nouvelle erreur s'ajoute évidemment à l'erreur de méthode déjà signalée.

Il en résulte que l'ensemble des expérimentateurs ayant utilisés les facteurs  $f_i$  de KAPLON et KOSHIBA ont surestimé jusqu'à 3 à 4 fois les valeurs mesurées de  $\lambda$ , pour des énergies comprises entre 30 et 100 GeV, et jusqu'à 1,8 fois à 10 GeV.

## 2. Résultats

La figure 8 réunit les principales valeurs publiées de  $\lambda$  (rectangles blancs) ainsi que nos résultats expérimentaux (rectangles hachurés). Les courbes théoriques ont été établies sur la base des sections efficaces avec (courbe 2) et sans effet d'écran (courbe 1), calculées par BLOCK et al.<sup>7)</sup> d'après BHABHA et RACAH<sup>11) 12)</sup>. La courbe 3 s'obtient à partir de la relation (n° 2) donnée par STUECKELBERG<sup>45)</sup> (sans effet d'écran). 4 représente la droite des moindres carrés pour l'ensemble des résultats expérimentaux. Les coefficients  $\alpha$  et  $\gamma$  relatifs à la droite 5, d'équation  $\lambda = \alpha E^\gamma$  ( $\lambda$  en longueur de rayonnement,  $E$  en GeV) ont été déterminés pour nos mesures sur la base du principe du maximum de vraisemblance, tenant compte de la perte moyenne d'énergie par Bremsstrahlung pour chaque tronçon.  $\alpha = 17$ ;  $\gamma = -0,7$ .

On admet actuellement que le méson  $\mu$  doit être considéré comme un électron lourd<sup>20) 44)</sup>. C'est pourquoi nous avons également reporté sur ce graphique les valeurs de  $\lambda$  relatives à la production directe de paires d'électrons par des mésons  $\mu$  de 60 et 120 GeV, données par M. AVAN<sup>20)</sup>. (Les abscisses 0,5 et 0,6 GeV correspondent aux énergies d'électrons de même vitesse.)

## 3. Discussion

L'examen de la figure 8 montre que le désaccord entre l'ensemble des résultats expérimentaux et les courbes calculées d'après RACAH et BHABHA s'accentue au fur et à mesure que l'énergie croît. (La différence est significative pour nos résultats, ainsi que nous l'indiquions dans le

tableau I de <sup>10</sup>.) Par contre les valeurs obtenues par PIRON sur la base de l'article de STUECKELBERG <sup>45</sup>) sont en bon accord avec nos résultats et ceux des autres expérimentateurs, ceux obtenus par NAUGLE à 70 GeV exceptés. Dans ce dernier cas, la différence peut provenir comme on l'a vu d'une surestimation d'environ 3 fois sur  $\lambda$  inhérente à la méthode de correction utilisée pour les faux tridents.

On peut donc admettre que les mesures de  $\lambda$ , dont la détermination nécessite l'utilisation des sections efficaces de rayonnement et de conversion de BETHE-HEITLER, ne rendent pas compte des résultats théoriques déduits des travaux de BHABHA et RACAH au-dessus de 1 GeV, mais semblent justifier les arguments avancés par STUECKELBERG.

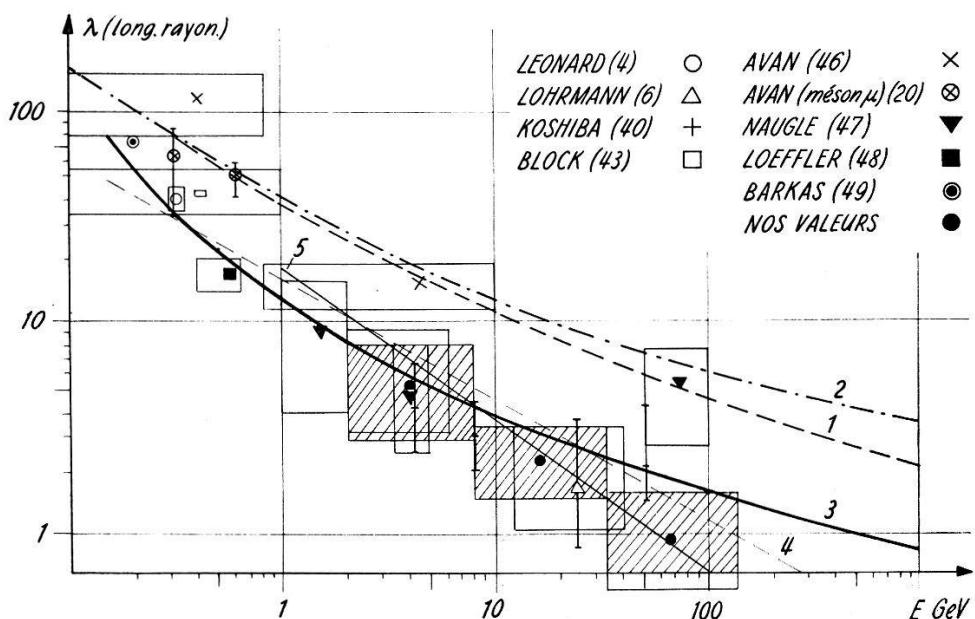


Fig. 8

Libre parcours moyen  $\lambda$  (en unités  $X_0$ ) de création de paires d'électrons par des électrons. Théorie de BHABHA et RACAH: 1: sans effet d'écran; 2: Effet d'écran total; 3: théorie de STUECKELBERG; 4: droite des moindres carrés pour l'ensemble des résultats expérimentaux; 5: forme exponentielle  $\lambda = a E^\gamma$  ( $\lambda$  en unités  $X_0$ ,  $E$  en GeV), ajustée à nos résultats, sur la base du principe du maximum de vraisemblance;  $a = 17$ ;  $\gamma = -0,7$ .

#### IV. Influence de la production de vrais tridents sur l'évolution des cascades électrophotoniques

Les diverses études effectuées jusqu'à maintenant ne tiennent pas compte de ce mode de production de paires d'électrons. Nous avons essayé d'estimer son importance en calculant le facteur  $C$  par lequel il faut multiplier les résultats de ROSSI (approximation  $B$ ) pour tenir compte de l'influence des vrais tridents sur le développement des gerbes engendrées par un électron.

Nous considérons 3 énergies du primaire (40, 60 et 100 GeV) et nous admettons que la production de tridents a lieu en moyenne de la façon suivante:

40 GeV: 1 vrai trident est produit après 0,5 longueur de rayonnement.

60 GeV: 1 vrai trident est produit à 0,29 longueur de rayonnement et un demi trident apparaît à 1,8 longueur de rayonnement.

100 GeV: 1 vrai trident apparaît à 0,16 longueur de rayonnement et un second à 1,38 longueur de rayonnement.

Ces valeurs se calculent à partir de la relation exponentielle  $\lambda = a E^\gamma$ , qui tient compte de la perte d'énergie par Bremsstrahlung de l'électron primaire. Nous admettons d'autre part, sur la base de nos observations

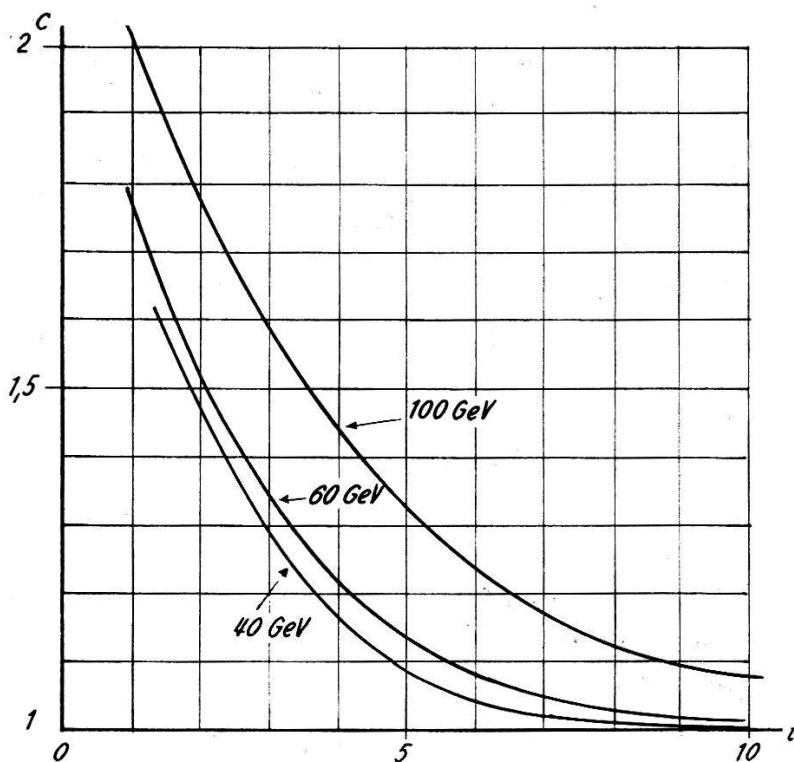


Fig. 9

Facteur  $C$  (en fonction de  $t$ ) par lequel il faut multiplier le nombre d'électrons d'une cascade (calculé par Rossi), pour tenir compte de la production de vrais tridents; en paramètre énergie de l'électron primaire.

et celles de BLOCK et al.<sup>43</sup>), que chaque trident ainsi créé a le dixième de l'énergie de l'électron initial en ce point. On ajoute alors à la cascade produite par l'électron primaire selon Rossi, celle résultant des deux électrons de chaque trident, en admettant l'équipartition de l'énergie pour la paire ainsi créée. (Nous avons fait usage du graphique 5.13.2 de Rossi<sup>41</sup>).  $C$  est donné à la figure 9 en fonction de la distance  $t$  (longueur de rayonnement) et pour les 3 énergies indiquées.

\*

Ces courbes sont valables dans le cas de cascades produites par des photons d'énergies doubles de celles indiquées, à condition de déplacer l'origine de  $9/7$  vers la gauche (parcours moyen du photon avant sa matérialisation).

On constate que l'influence de la production de vrais tridents, grande entre une et 4 longueurs de rayonnement, disparaît pratiquement pour  $t$  égal à environ 6 à 8, c'est-à-dire un peu avant le développement maximum de chaque gerbe.

*Les tables et graphiques relatifs à l'évolution statistique des cascades seront donc utilisables*, à condition d'effectuer les observations à plus de cinq longueurs de rayonnement de l'origine jusqu'à 80 GeV et à plus de  $8 X_0$  pour 100 GeV; il y aura toujours intérêt à se placer à l'endroit du maximum de développement prévu par la théorie. Ces conclusions sont en désaccord avec celles préliminaires de GARDNER<sup>56)</sup> qui ne tient pas compte de la variation de  $\lambda$  due au Bremsstrahlung le long d'une trajectoire.

### Conclusion

Les méthodes de mesure d'énergie que nous avons étudiées montrent que le désaccord entre nos résultats expérimentaux et les valeurs théoriques de  $\lambda$  données par BHABHA et RACAH n'est pas dû à une sous-estimation systématique des énergies des électrons primaires, ainsi que l'avaient NAUGLE et FREIER.

Nos travaux montrent au contraire qu'un tel accord (obtenu par quelques auteurs) peut résulter d'une surestimation de  $\lambda$  liée à la méthode d'élimination des faux tridents utilisée, et d'une surestimation systématique des énergies des électrons primaires provenant d'une interprétation erronée de la variation de la trace initiale des paires d'électrons.

Remarquons que selon KAPLON et KOSHIBA<sup>19)</sup> il serait nécessaire de diminuer de 1,5 fois les longueurs de rayonnement calculées par BETHE-HEITLER pour amener les résultats de RACAH à coïncider avec les valeurs expérimentales. Or, les mesures de longueurs de rayonnement disponibles actuellement au-dessus de 100 MeV montrent que celles-ci sont environ 1,1 fois plus grandes que les valeurs asymptotiques prévues<sup>22) 50)</sup>. Il en va de même pour les libres parcours moyens de matérialisation de photons de plus de 1 GeV<sup>51) 52)</sup>. Les travaux théoriques effectués après LANDAU indiquent même que ce facteur devrait encore croître avec l'énergie, rendant les photons et électrons beaucoup plus «pénétrants» qu'on ne l'admettait jusqu'à maintenant<sup>53) 54) 55)</sup>.

Le désaccord avec les théories de RACAH et BHABHA semble donc établi dans le cas de primaires de nature électronique.

Au contraire les valeurs déduites de la publication préliminaire de STUECKELBERG, valables uniquement pour les électrons, rendent bien compte de l'ensemble des résultats expérimentaux connus actuellement.

Remarquons que les valeurs de  $\lambda$  relatives à la production directe de paires d'électrons par les mésons  $\mu$ , mesurées par AVAN<sup>20)</sup> sont elles compatibles avec la théorie déduite de BHABHA.

Nous avons enfin montré que la production de tridents est sans influence sur le développement des cascades électrophotoniques (dans le domaine d'énergie considéré) pour autant que l'on se place au voisinage du maximum de développement de ces gerbes.

J'exprime ma vive gratitude à Monsieur le Professeur CH. HAENNY pour ses encouragements et l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie mes collègues MM. M. GAILLOUD, PH. ROSSELET et C. PIRON de l'aide qu'ils m'ont fournie tant dans les mesures que dans les discussions. L'équipe de dépouillement du laboratoire a participé activement à ces travaux. Ma reconnaissance va également au Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique pour son aide financière.

### Bibliographie

- 1) W. H. BARKAS, R. W. DEUTSCH, F. C. GILBERT et C. E. VIOLET, *Physical Review* 86, 59 (1952).
- 2) M. AVAN et L. AVAN, *Compt. rend. Acad. Sc. Paris* 241, 1284 (1955).
- 3) M. F. KAPLON et M. KOSHIBA, *Physical Review* 97, 193 (1955).
- 4) S. L. LEONARD, *Bull. Am. Phys. Soc.* 1, 167 (1956).
- 5) J. E. NAUGLE et P. S. FREIER, *Physical Review* 92, 1086 (1953).
- 6) E. LOHRMANN, *Nuovo Cimento* 2, 1029 (1955).
- 7) M.M. BLOCK, D. T. KING et W. W. WADA, *Physical Review* 96, 1627 (1954).
- 8) A. DEBENEDETTI, C. M. GARELLI, L. TALLONE et M. VIGONE, *Nuovo Cimento* 4, 1151 (1956).
- 9) F. J. LOEFFLER, *Physical Review* 108, 1058 (1957).
- 10) R. WEILL, M. GAILLOUD et PH. ROSSELET, *Nuovo Cimento* 6, 1430 (1957).
- 11) H. J. BHABHA, *Proceeding of the Royal Society A* 152, 559 (1935).
- 12) G. RACAH, *Nuovo Cimento* 14, 93 (1937).
- 13) R. WEILL, M. GAILLOUD et PH. ROSSELET, *Nuovo Cimento* 6, 413 (1957).
- 14) A. DEBENEDETTI, C. M. GARELLI, L. TALLONE et M. VIGONE, *Nuovo Cimento* 4, 1142 (1956).
- 15) E. LOHRMANN, *Nuovo Cimento* 5, 1074 (1957).
- 16) A. BORSELLINO, *Physical Review* 89, 1023 (1953).
- 17) G. BARONI, A. BORSELLINO, L. SCARSI et G. VANDERHAEGHE, *Nuovo Cimento* 10, 1653 (1953).
- 18) K. HINTERMANN, *Physical Review* 93, 898 (1954).
- 19) M. KOSHIBA et M. F. KAPLON, *Physical Review* 100, 327 (1955).
- 20) M. AVAN, *Thèse*.
- 21) W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation*. Clarendon Press 1954.
- 22) A. BERTHELOT, *Rayonnement de particules atomiques électrons et photons*. Masson & Cie, Paris 1956.

- 23) M. DI CORATO, Communication privée.
- 24) R. WEILL, M. GAILLOUD et PH. ROSSELET, *Helv. Phys. Acta* 29, 437 (1956).
- 25) W. WOLTER et M. MIESOWICZ, *Nuovo Cimento* 4, 648 (1956).
- 26) D. H. PERKINS, *Philosophical Magazine* 46, 1146 (1955).
- 27) R. WEILL, C. JOSEPH, M. GAILLOUD et PH. ROSSELET, *Sous presse aux Helv. Phys. Acta*.
- 28) M. DELLACORTE, M. RAMAT et L. RONCHI, JR., *Nuovo Cimento* 10, 509 (1953).
- 29) M. DELLACORTE, M. RAMAT et L. RONCHI, JR., *Nuovo Cimento* 10, 958 (1953).
- 30) C. O'CEALLAIGH, C. R. Congrès de Bagnère, p. 71, 1953; Congrès de Padoue, suppl.; *Nuovo Cimento*, p. 412, 1954.
- 31) J. P. BAILLARD, Communication privée.
- 32) J. H. WEBB, *Physical Review* 74, 511 (1948).
- 33) G. FATZER, R. WEILL, M. GAILLOUD et CH. HAENNY, C. R. 1er Colloque International de Photographie Corpusculaire, Strasbourg 1957; G. FATZER, Thèse.
- 34) P. DEMERS, *Canadian Journal of Research A* 25, 223 (1947).
- 35) E. C. DODD et C. WALLER, *Photographic sensitivity*. Butterworth Scientific Publication, p. 266 (1951).
- 36) A. E. CUDAKOV, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences d'URSS* 19, 651 (1955).
- 37) G. YEKUTIELLI, *Nuovo Cimento* 5, 1381 (1957).
- 38) I. MITO et H. EZAWA, *Progress of Theoretical Physics* 18, 437 (1957).
- 39) M. N. BLOCK et D. T. KING, *Physical Review* 95, 171 (1954).
- 40) M. F. KAPLON et M. KOSHIBA, *Physical Review* 97, 193 (1955).
- 41) B. ROSSI, *High-Energy particles*. «Prentice Hall» inc. 1952.
- 42) R. WEILL, Thèse.
- 43) M. N. BLOCK, D. T. KING et W. W. WADA, *Physical Review* 96, 1627 (1954).
- 44) H. L. ANDERSON et G. M. G. LATTÈS, *Nuovo Cimento* 6, 1356 (1957).
- 45) E. C. G. STUECKELBERG, *Helv. Phys. Acta* 8, 324 (1935).
- 46) M. AVAN et L. AVAN, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris* 241, 1284 (1955).
- 47) J. E. NAUGLE et P. S. FREIER, *Physical Review* 92, 1086 (1953).
- 48) F. J. LOEFFLER, *Bulletin of the American Physical Society* 1, 350 (1956).
- 49) W. H. BARKAS, R. W. DEUTSCH, F. C. GILBERT et C. E. VIOLET, *Physical Review* 86, 59 (1952).
- 50) A. G. EKSPONG, *Arkiv for Fysik* 9, 546 (1955).
- 51) J. M. BRABANT, W. ROBERT, W. KENNEY et R. W. WALLACE, *Physical Review* 107, 604 (1957).
- 52) K. PINKAU, *Nuovo Cimento* 3, 1156 (1956).
- 53) L. LANDAU et J. POMERANCHUK, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences d'URSS* 92, N° 3 (1953); 92, 735 (1952).
- 54) F. DYSON, *Proceedings Sixtnh annual Rochester conference*, 0, IX-29 (1956).
- 55) A. B. MIGDAL, *Physical Review* 103, 1811 (1956).
- 56) J. W. GARDNER, *Nuovo Cimento* 7, 14 (1958).