Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 31 (1958)

Heft: VI

Artikel: Die Anzahl der mit Hilfe von 2l Dirac'schen Spinoren zu bildenden Invarianten

Autor: Fierz, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112921

Die Anzahl der mit Hilfe von $2\,l$ Dirac'schen Spinoren zu bildenden Invarianten

von **M. Fierz**, Basel

(1.VI.1958)

Zusammenfassung. Es wird elementar bewiesen, dass sich mit Hilfe von 4 Diracschen Spinoren 10 Invarianten (Skalare und Pseudoskalare) bilden lassen. Ferner wird gezeigt, dass die Anzahl der Invarianten, die aus $2\,l$ Spinoren gebildet werden können,

$$N_l = \frac{(2\,l)!\;2^{l+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\,l+1)}{l!\;(l+1)!\;(l+2)!}$$

beträgt.

W. Pauli[1]) hat bewiesen, dass mit Hilfe von vier Diracschen Spinoren genau fünf linear unabhängige Skalare gebildet werden können. Sein Beweis stützt sich auf die Darstellungstheorie des durch die Diracschen Matrizen γ_ν erzeugten Matrix-Ringes.

Ich möchte hier zeigen, wie man dasselbe elementar, mittelst des van der Waerdenschen Spinorkalküls leisten kann. Ferner werden wir die Anzahl der Invarianten bestimmen, die aus $2\,l$ verschiedenen Diracschen Spinoren gebildet werden können.

Der van der Waerdensche Kalkül scheint mir in Theorien, die nicht spiegelvariant sind, natürlich zu sein, weil in ihm die Spiegelungen explizit dargestellt sind. Er ist darum, in wenig veränderter Gestalt, erneut in Gebrauch gekommen[2]). Man nimmt in diesem Kalkül an, $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ sei diagonal. Ist ψ ein Diracscher, vierkomponentiger Spinor, so sind jetzt

$$u = \frac{1}{2}\,(1+\gamma_5)\,\psi \quad ; \quad v = \frac{1}{2}\,(1-\gamma_5)\,\psi$$

zwei zweikomponentige Grössen, deren Komponenten mit

$$u_\alpha,\; v_{\dot\beta}\;;\; \alpha, \dot\beta = 1, 2$$

bezeichnet werden. Bei eigentlichen Lorentztransformationen werden die Komponenten von u und v je unter sich unimodular transformiert. Dabei transformiert sich v wie u^*.

Bei Raumspiegelungen (P) wird u mit v vertauscht. Die Ladungskonjugation (C) wird durch die Abbildung

$$u \rightarrow v^*, \; v \rightarrow u^*$$

dargestellt. Darum lautet die Reellitätsbedingung der Majorana-Theorie

$$u^* = v.$$

Die vier Komponenten von $u \times v$ entsprechen denjenigen eines Vierervektors. Die Produkte $u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)}$, wo $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ verschiedene Spinoren sind, können in einen symmetrischen und einen schiefen Teil gespalten werden. Es ist

$$u_1^{(1)} u_2^{(2)} - u_2^{(1)} u_1^{(2)} \equiv u_\alpha^{(1)} u^{(2)\alpha}$$

eine Invariante, während die drei Grössen

$$u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} + u_\beta^{(1)} u_\alpha^{(2)} \equiv (u^{(1)} u^{(2)})_{\alpha\beta}$$

den Komponenten eines Flächentensors entsprechen.

Aus einem Produkt von vier Spinoren kann man nur dann eine Invariante bilden, wenn die Anzahl der darin enthaltenen $u^{(k)}$ gerade ist. Es gibt acht derartige Produkte, die paarweise durch Spiegelung, das heisst durch Vertauschen der $u^{(k)}$ mit den $v^{(k)}$ auseinander hervorgehen. Darum genügt es, die eine Hälfte zu betrachten:

$$a = u^{(1)} u^{(2)} u^{(3)} u^{(4)} \;, \quad c = u^{(1)} v^{(2)} u^{(3)} v^{(4)}$$

$$b = u^{(1)} u^{(2)} v^{(3)} v^{(4)} \;, \quad d = u^{(1)} v^{(2)} v^{(3)} u^{(4)}$$

Aus a kann man zwei Invarianten, aus den übrigen je eine bilden:

$$A_1 = u_\alpha^{(1)} u^{(2)\alpha} \cdot u_\beta^{(3)} u^{(4)\beta} \qquad C = u_\alpha^{(1)} u^{(3)\alpha} \cdot v_{\dot\beta}^{(2)} v^{(4)\dot\beta}$$

$$A_2 = (u^{(1)} u^{(2)})_{\alpha\beta} \cdot (u^{(3)} u^{(4)})^{\alpha\beta} \qquad D = u_\alpha^{(1)} u^{(4)\alpha} \cdot v_{\dot\beta}^{(2)} v^{(3)\dot\beta}$$

$$B = u_\alpha^{(1)} u^{(2)\alpha} \cdot v_{\dot\beta}^{(3)} v^{(4)\dot\beta}$$

Es gibt somit 10 Invarianten: fünf Skalare $X + \overline{X}$ und fünf Pseudoskalare $X - \overline{X}$, wobei $\overline{X}$ das gespiegelte von X bedeutet ($X = A, B, C, D$). Die $\psi^{(k)} = \begin{pmatrix} u^{(k)} \\ v^{(k)} \end{pmatrix}$ sind quantisierte Felder. Wenn daher $\psi^{(1)} = \psi^{(2)}$ gesetzt wird, so gilt wegen $\{\psi, \psi\} = 0$:

$$u_\alpha^{(k)} u_\beta^{(k)} = - u_\beta^{(k)} u_\alpha^{(k)}.$$

Darum verschwindet in diesem Falle A_2, das heisst die Tensorkopplung. D ist das gespiegelte von C. Also gibt es hier noch sechs unabhängige Invarianten: drei Skalare und drei Pseudoskalare. Nimmt man an, das

Neutrino sei ein Majorana-Teilchen, so ist die Kopplung, welche den Zerfall des μ-Mesons beschreibt, von dieser Art. Setzt man überdies noch $\psi^{(3)} = \psi^{(4)}$, so wird $C = D$ und man hat fünf Invarianten: Drei Skalare und zwei Pseudoskalare.

Wir fragen weiter, wie viele Invarianten aus $2\,l$ verschiedenen, Diracschen Spinoren $\binom{u}{v}$ gebildet werden können. Hier haben wir die $\binom{2\,l}{2\,k}$ Produkte zu betrachten, die $2\,k$ Faktoren u, $2(l-k)$ Faktoren v enthalten. Die erste Aufgabe ist nun, die Anzahl von Invarianten zu bestimmen, die in einem Produkt von $n = 2\,m$ verschiedenen Spinoren $u_\alpha^{(\nu)}$, $(\alpha = 1, 2;$ $\nu = 1 \ldots 2\,m)$ enthalten sind.

Dies läuft auf die Reduktion eines Spinors mit n Indices: $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $(\alpha_k = 1,2)$, in irreduzible Bestandteile hinaus. Die irreduziblen Darstellungen ϑ_s der unimodularen Gruppe, die man so erhält, gehören zu $S = n/_2 - k$; $k = 0, 1, 2 \ldots$; und wir fragen, wie oft kommt ein jedes S vor. Diese Anzahlen seine $C_{n,k}$.

Aus
$$\vartheta_{1/2} \times \vartheta_s = \vartheta_{s-1/2} + \vartheta_{s+1/2}; \quad \vartheta_{1/2} \times \vartheta_0 = \vartheta_{1/2}$$

erkennt man, dass die $C_{n,k}$ durch die Zahlen im «halben Pascalschen Dreieck» bestimmt sind*):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
0 & & 2 & & 1 & & \\
 & 2 & & 3 & & 1 & \\
0 & & 5 & & 4 & & 1 \\
 & 5 & & 9 & & 5 & & 1
\end{array}$$

usw.

Also gilt
$$C_{nk} = \binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-2} = \frac{n!\,(n+1-2\,k)}{k!\,(n+1-k)!}$$

Ist $n = 2\,m$, $k = m$, so erhält man die Anzahl der Skalare:

$$C_{2m,m} = \frac{1}{m}\binom{2\,m}{m+1}.$$

$2\,l$ verschiedene Diracsche Spinoren $\binom{u}{v}$ ergeben darum

$$N_l = \sum_{k=0}^{l} \binom{2\,l}{2\,k} \frac{1}{k} \binom{2\,k}{k+1} \frac{1}{l-k} \binom{2\,(l-k)}{l-k+1}$$

Invarianten. Ich schreibe

$$N_l = \frac{(2\,l)!}{(l+1)!^2} \sum_{k,m} \delta_{km} \binom{l+1}{k} \binom{l+1}{m+1}.$$

*) Vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, 3. Auflage (1937), S. 232.

Benützt man nun

$$\delta_{km} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\varphi}\, d\varphi$$

so kann man die Summe vor der Integration ausführen und erhält

$$N_l = \frac{(2\,l)!}{(2\,l+1)!^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, (2\cos\varphi/2)^{2(l+1)}\, d\varphi$$

$$= \frac{(2\,l)! \cdot 2^{l+1} \cdot 1, 3, 5 \ldots (2\,l+1)}{l!\,(l+1)!\,(l+2)!}.$$

Also ist $N_1 = 2,\ N_2 = 10,\ N_3 = 70,\ N_4 = 588, \ldots.$

Basel, Seminar für theoretische Physik der Universität

Literatur

[1]) W. Pauli, Zeeman-Verhandelingen (Haag 1935), S. 31.

[2]) R. P. Feynmann und M. Gell-Mann, Phys. Rev. *109*, 193 (1958).