

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 31 (1958)
Heft: I

Artikel: Kernniveaus und Schalenmodell
Autor: Terreaux, Ch.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112901>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kernniveaus und Schalenmodell

von Ch. Terreaux

Seminar für theoretische Physik der Universität Zürich

(6. XI. 1957)

Summary. This is a continuation of a previous paper¹⁾ concerning a systematic comparison of the experimental low levels of odd nuclei with the one-particle levels predicted by the shell modell. The principles of the graphic representation used in these papers are briefly summarized. All the low empirical levels for the region $N = 13-81$ with $Z = \text{even}$, $N = \text{odd}$ are graphically represented. The behaviour of these levels can generally be understood within the framework of the generalized spherical shell model (with configuration mixtures included.) A new discussion of the BETHE-WEIZSÄCKER formula for the binding energy is given. The various contributions to the binding energy are interpreted in terms of the typical parameters of the shell model, like depth and radius of the potential well etc. The constant of the principal term of this formula proportional to A is determined theoretically from the nuclear radius only. The agreement with the empirical value of this constant is excellent. Finally, the nuclear radii are discussed in the light of the shell model.

§ 1. Einleitung

In einer früheren Arbeit¹⁾ (hier mit I bezeichnet) wurde ein systematischer Vergleich der experimentellen untersten Anregungsniveaus der ungeraden schweren Atomkerne mit den Einteilchenniveaus, wie sie aus dem Schalenmodell folgen, eingehend diskutiert. Zu diesem Zwecke wurde eine Darstellungsmethode der Termschemata eingeführt, deren Grundidee die folgende ist:

Die Parameter der Potentialtöpfe (Tiefe, Radien) die in der Näherung des Schalenmodells benutzt werden, sind gleichmässig variierende Funktionen der Nukleonenzahlen. (Die Neutronenzahl N und die Protonenzahl Z werden als kontinuierliche Variablen betrachtet.) Der Energien eigenwert der Einteilchenniveaus in den Potentialtöpfen ist also auch eine kontinuierliche Funktion der Nukleonenzahlen und diese Niveaus können mit Hilfe einer Folge von regelmässigen Flächen dargestellt werden. Zu jeder Fläche S_{jP} gehört eine „Zuordnung“ j^P (gesamtes Drehmoment $j = l \pm \frac{1}{2}$ und Parität P von l) der betreffenden Niveaus. In Fig. 1 sind zwei dieser Flächen skizziert. Sie stellen die Energien eigenwerte der Niveaus $\tau_{jP}(N, Z)$ (positive Richtung nach unten) als Funktion

der Koordinaten N, Z dar. Im Rahmen der Schalenstruktur wird der Verlauf der Ablösungsenergie der Kerne durch die Flächen S_{jP} gegeben. Dem Grundzustand des Kerns entspricht dabei eine kompakte Besetzung

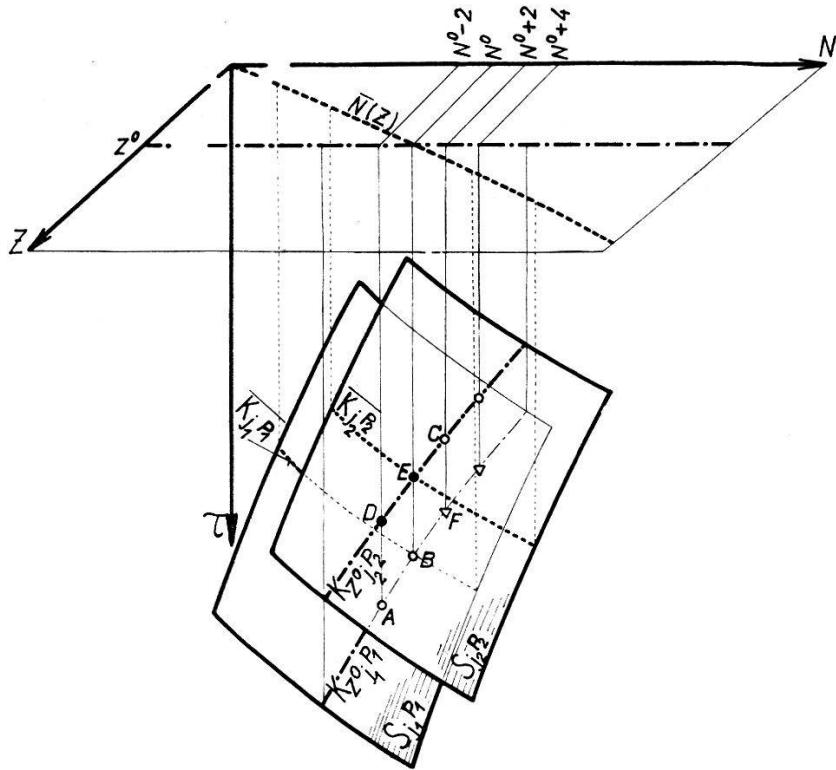


Fig. 1.

Skizze im dreidimensionalen Raum: Energiedatenwert τ (positive Richtung nach unten) als Funktion der Koordinaten: Neutronenzahl N und Protonenzahl Z . Die Figur zeigt zwei verschiedene Einteilchenniveauflächen S_{jP} durch $\tau(N, Z)$ gegeben. $S_{j_2 P_2}$ liegt oberhalb $S_{j_1 P_1}$. $K_{Z^0 jP}$ ist die Schnittlinie von S_{jP} mit einer Ebene $Z^0 = \text{konst.}$ (Strich-punktiert).

$\bar{N}(Z)$ liegt in der $N-Z$ -Ebene und gibt die mittlere Neutronenzahl der stabilen Kerne, definiert durch die Schwerpunkte der Häufigkeit der stabilen Isotopen.

\bar{K}_{jP} ist die Projektion von $\bar{N}(Z)$ auf die Fläche S_{jP} (gestrichelt). Die Grundzustände der Kerne sind mit \circ bezeichnet. Gewöhnliche angeregte Zustände (höhere Niveaus in der Schalenstruktur) mit \bullet . Löcherniveaus mit \triangle . Z. B. für die Kerne $(Z^0, N^0 - 2)$ bzw. (Z^0, N^0) sind A bzw. B der Grundzustand mit Zuordnung $j_1 P_1$, D bzw. E Anregungsniveau mit Zuordnung $j_2 P_2$. Mit dem Kern $(Z^0, N^0 + 2)$ ist das Niveau $j_1 P_1$ im Grundzustand vollgefüllt. C ist der Grundzustand $j_2 P_2$, F ein Lochniveau $j_1 P_1$. \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} sind die entsprechenden Anregungsenergien.

der Einteilchenniveaus bis zur Fermienergie. Zur Definition der Ablösungsenergie ist die folgende Wahl des Energienullpunkts geeignet: der Energiewert $\tau_{jP}(N, Z)$ derjenigen Punkte von S_{jP} , die das *oberste* besetzte Einteilchenniveau (Kern im Grundzustand) in den Potentialtopfen darstellen, wird mit der Ablösungsenergie eines Nukleons für den Kern (N, Z)

gleichgesetzt. Diese Punkte sind in Fig. 1 mit \circ bezeichnet. Wenn der Grundzustand der ungeraden Kerne ein Einteilchenzustand ist, dann ist j^P auch die Zuordnung für den ganzen Kern. Diese Definition von τ legt die Tiefe des Potentialtopfs fest. (Betreffend eine andere Definition von τ , bei der alle besetzten Niveaus eine Rolle spielen, vgl. § 3.)

Die übrigen Teile der Flächen S_{jP} enthalten die Einteilchenanregungsniveaus j^P der angeregten Kerne. Mit der obigen Wahl des Energienullpunkts ist dann τ_{jP} die Ablösungsenergie (positiv gezählt) des Kernes im Grundzustand plus oder minus der Anregungsenergie des betreffenden Kernzustandes j^P . Plus gilt für Löcherzustände (Fig. 1, ∇) minus für gewöhnliche Anregungszustände (Fig. 1, \bullet).

Ein solches System von Kernniveauauflächen kann auch unmittelbar aus den experimentellen Daten konstruiert werden. Die qualitative Übereinstimmung im Verlauf dieser theoretischen und experimentellen Flächen bestätigt die Gültigkeit des Schalenmodells. Die Gebiete der experimentellen Flächen S_{jP} die den Grundzuständen mit der Zuordnung j^P entsprechen, werden direkt mit Hilfe der Ablösungsenergien konstruiert (Differenz der gesamten Bindungsenergien von 2 aufeinanderfolgenden Kernen). Die anderen Punkte der Flächen S_{jP} , die den angeregten Niveaus der Kerne entsprechen, lassen sich ebenfalls bestimmen, indem man die Anregungsenergie des betrachteten Zustandes vom Grundzustand des betreffenden Kerns aus aufträgt, in negativer Richtung (nach oben) für gewöhnliche Anregungszustände, in positiver Richtung (nach unten) für Löcherzustände. Ohne irgendwelche theoretischen Begriffe (wie Löcherzustände usw.) zu benutzen, ist das folgende phenomenologische Kriterium dieser Regel im allgemeinen äquivalent (siehe Fig. 1): Man trägt die Anregungsenergie des Niveaus j^P in negativer Richtung auf, wenn die Kerne mit einem Grundzustand derselben Zuordnung j^P , die in der unmittelbaren Umgebung des betrachteten Kerns liegen, eine grössere Nukleonenzahl haben als der betrachtete angeregte Kern. Liegen diese Grundzustände bei kleineren Nukleonenzahlen, so wird die Anregungsenergie in positiver Richtung aufgetragen. Bei Annahme der Schalenstruktur folgen, wenn die Nukleonenzahl stetig wächst, gewöhnlicher Anregungszustand, Grundzustand und dann Löcherzustand in steiger Weise nacheinander. Diese Zustände liegen auf den Fortsetzungen der Flächenbereiche von S_{jP} , die die Grundzustände enthalten. Es wird sich zeigen, dass diese Fortsetzungen stetig sind.

Um die rechnerische Seite der Arbeit so weit wie möglich zu verkürzen (siehe § 3), wurde in I die Diskussion betreffend den allgemeinen Vergleich der empirischen und theoretischen Einteilchenniveaus auf gewisse mittlere Einteilchenniveaulinien K_{jP} auf den Flächen S_{jP} beschränkt. Diese Kurven K_{jP} entsprechen idealen mittleren Kernen, für die die Neu-

tronenzahl der Mittelwert $\bar{N}(Z)$ (Fig. 1) der *stabilen* Kerne ist. Tatsächlich lassen sich die theoretischen Niveaus nur für diese mittleren Kerne leicht ableiten, erstens weil nur die Kernradien der stabilen Kerne experimentell bekannt sind, zweitens weil die theoretische Bestimmung (bei der weitgehend interpoliert werden muss) auf der Annahme der gleichmässig langsamen Abhängigkeit der Parameter (Tiefe) der Potentialtöpfe von den Nukleonenzahlen über das ganze periodische System beruht. Letzteres gilt nicht mehr für Kerne, die von den mittleren Kernen abweichen. Insbesondere variiert die Tiefe der Töpfe zwischen den verschiedenen Kernen einer Isobarenreihe beträchtlich.

Der Vergleich hat das Folgende gezeigt: Im grössten Teil des periodischen Systems (d. h. abgesehen vom Gebiet der grössten Einteilchen-niveaudichten des sphärischen Schalenmodells, d. h. dem Gebiet der seltenen Erden $N = 90-115$) existiert eine vollkommene Korrespondenz zwischen den experimentellen und theoretischen mittleren Niveaus. Die Approximation der unabhängigen Teilchen im idealen Schalenmodell, bei der die grosse Spinbahnkopplung mitberücksichtigt ist, offenbart sich dadurch, dass die untersten experimentellen mittleren Niveaus \bar{K}_{jP} aus den entsprechenden theoretischen Niveaus durch eine gleichmässige Deformation hervorgehen, was im allgemeinen eine Verkleinerung der Anregungsenergie mit sich bringt. Diese Deformation beruht daher auf der direkten Nukleonенwechselwirkung, die im Schalenmodell als eine Störung behandelt wird, und die Mischungen von Einteilchenzuständen hervorruft. Die letztere hat also im allgemeinen nur eine gleichmässige Deformation der untersten Kernniveauflächen S_{jP} zur Folge. Dies stellt eine Rechtfertigung des Schalenmodells dar. Nur im Gebiet der grössten Einteilchenniveaudichten ($N = 90-115$) wird die Kernstruktur durch die direkte Nukleonenwechselwirkung stark geändert. Dieses Gebiet ist gerade das Anwendungsgebiet der *deformierten Kerne*, für das das sphärische Schalenmodell unbrauchbar wird.

Der Zweck dieser Arbeit ist, die Gesamtheit der experimentellen Einteilchenniveauflächen S_{jP} selbst darzustellen (in I wurde nur ein kleiner Teil reproduziert) und den allgemeinen Verlauf dieser Flächen ausserhalb der mittleren Verteilungslinie $\bar{N}(Z)$ der stabilen Kerne zu diskutieren.

Im nächsten Abschnitt werden zuerst die Resultate der graphischen Darstellung der Niveaus für die ungeraden schweren Kerne mit ungerader Neutronenzahl im Gebiet $N = 13-82$ ausführlich gegeben. Aus dieser Darstellung geht hervor, dass im allgemeinen die Flächen S_{jP} in diesem Gebiet regelmässig sind.

Ferner wird sich zeigen (§ 3), dass der Verlauf der experimentellen Flächen S_{jP} so ist, dass daraus die bekannten Eigenschaften der Fläche der Bindungsenergie $B(N, Z)$ der Kerne folgen, deren analytische Form

durch die empirische Bethe-Weizsäcker-Formel approximiert wird. Mit der obigen Wahl des Energienullpunkts wird die Lage der Flächen S_{jP} im Prinzip durch die Ableitung der Bindungsenergie $B(N, Z)$ gegeben. Die Ablösungsenergie $\tau_{jP}(N, Z)$ ist ja *auch* der Unterschied zwischen den Gesamt-Bindungsenergien von zwei aufeinanderfolgenden Kernen. Eine Integration der τ 's muss also auf eine Interpretation des Bethe-Weizsäckerschen Ausdrucks der Bindungsenergie durch die typischen Begriffe des Schalenmodells (Topftiefe, Radius) führen. Diese Analyse wird gestatten, die verschiedenen Beiträge zur Kernbindungsenergie für alle Kerne im Sinne des Schalenmodells zu deuten.

Zum Schluss (§ 4) wird eine Verallgemeinerung des Radiusgesetzes für die Kerne im Rahmen des Schalenmodells angegeben.

§ 2. Graphische Darstellung der Kernniveaus

In diesem Abschnitt wird das Resultat der graphischen Darstellung der Niveauschemata der ungeraden schweren Kerne kommentiert. Das Prinzip der Konstruktion, die in I ausführlich beschrieben wurde, ist kurz in der Einleitung wiederholt. Die folgenden experimentellen Daten wurden verwendet:

1. Die Bindungsenergien $B(N, Z)$, nach den Tabellen von WAPSTRA²⁾ und HUIZENGA³⁾.
2. Die Zuordnung j^P der Grundzustände (gesamtes Drehmoment j und Parität P).
3. Anregungsenergien der Niveaus von bekannter Zuordnung j^P ⁴⁾.

Hier werden speziell nur die ungeraden schweren Kerne mit einer ungeraden Neutronenzahl N (Z gerade) im Gebiet $N = 13-82$ betrachtet. Aus praktischen Gründen werden statt der Einteilchenflächen S_{jP} die Linien $Z = \text{const}$ (K_{ZjP} , siehe Fig. 1), gegeben. Sie stellen den Energie-eigenwert τ_{jP} als Funktion von N für jedes Z und j^P dar. Die Kurven K_{ZjP} sind Schnittkurven der Fläche S_{jP} mit einer Folge von Ebenen parallel zur τN -Ebene.

Die Ablösungsenergien $\tau_{NjP}(N, Z)$ eines Neutrons wurden allgemein aus der Bindungsenergie von 2 aufeinanderfolgenden *ungeraden* Kernen (d. h. mit N und $N - 2$) bestimmt:

$$\tau_{NjP}(N, Z) = 1/2 \{ B_{jP}(N, Z) - B_{jP}(N - 2, Z) \} \quad (1)$$

(Der Index N bedeutet die Ionisierung eines Neutrons.) Die Differenz $\Delta N = 2$ wurde in (1) gewählt, um nur gleichartige Kerne (N ungerade) zu vergleichen, was wie wir später sehen werden, wichtig ist. τ_{NjP} bestimmt die Flächenanteile von S_{jP} , welche die Grundzustände der Kerne enthalten. Die Anregungsenergien werden von diesen Punkten aus, nach dem in der Einleitung erwähnten Kriterium aufgetragen.

*

Im allgemeinen ist die Zuordnung j^P des Kerns (N, Z) im Grundzustand identisch mit der Zuordnung des Vergleichskerns ($N - 2, Z$), was beim Aufschreiben von (1) verwendet ist. Es kommt aber für gewisse Werte von N auch der Fall vor, dass der Vergleichskern $N - 2$ in (1) eine verschiedene Zuordnung $j'^{P'}$ besitzt. Im Schalenmodell entsprechen diesen Werten von N im allgemeinen Kerne (N, Z) für welche gerade ein neues Einteilchenniveau j^P mit nur *einem* Neutron besetzt wird. (Im Kern $N - 2$ enthält dann das vorherige Niveau $j'^{P'}$ ein Neutron-Loch.) In (1) ist dann $B_{j^P}(N - 2)$ durch $B_{j'^{P'}}(N - 2)$ zu ersetzen, wo $j'^{P'}$ die Zuordnung des Grundzustands von ($N - 2$) ist. Es treten dann die typischen Sprünge der Ablösungsenergie beim Wechsel der Zuordnung der Grundzustände auf. (Siehe (I) Fig. 5 für die mittleren Niveaus \bar{K}_{j^P}). Die so verallgemeinerte Definition (1) würde deshalb in diesen Punkten Unregelmässigkeiten im Verlauf der Kurven K_{Zj^P} mit sich bringen. Diese sind besonders sichtbar für die Kerne mit $N = \text{magisch} + 1$ (in (1) kommt dann $N = \text{magisch} + 1$ und $N - 2 = \text{magisch} - 1$ vor.) In den Fällen wo die Kurven K_{Zj^P} eine magische Zahl von N durchlaufen (z. B. $N = 28$) würden diese Kurven einen wesentlichen Sprung bei $N = \text{magisch} + 1$ haben. Um diese Unstetigkeiten zu vermeiden, wurden die Lagen der Grundzustände der Kerne: $N = \text{magisch} + 1$, $Z = \text{gerade}$, dadurch bestimmt, dass die Kurven K_{Zj^P} im Punkte $N + 1$ interpoliert wurden. In diesem Sinne sind *alle* Grundzustände der Kerne für $N = 21, 29$ und 51 systematisch korrigiert.

In allen andern Fällen wo (1) im Gebiet $N = 21 - 82$ auf den Vergleich von 2 Kernen mit verschiedenen j^P führt, wurde die Definition (1) trotzdem verwendet (die Unstetigkeiten sind dann kleiner). Dies wurde gemacht, um die experimentellen Daten so weit wie möglich unmittelbar zu benutzen.

Für die Grundzustände der leichteren Kerne, soweit sie hier betrachtet sind ($N = 13 - 19$), muss eine etwas andere Definition der Ablösungsenergien $\tau_{Nj^P}(N, Z)$ verwendet werden: τ ist definiert mit Hilfe der Tangente der Kurve $Z = \text{const.}$ auf dem Flächenstück $B_{j^P}(N, Z)$ im Punkte N . (Wegen der Schalenstruktur soll die Fläche der Bindungsenergie $B(N, Z)$ aus einer Folge von regelmässigen stetigen Flächenstücken $B_{j^P}(N, Z)$ bestehen, die jeweils durch die entsprechende Einteilchenzuordnung j^P charakterisiert sind. $B_{j^P}(N, Z)$ entspricht dem Flächenanteil von S_{j^P} , der die Grundzustände enthält.) Für dieses Gebiet wäre aber die Definition (1) nicht mehr ein gutes Mass für die Ablösungsenergie des *letzten* Neutrons. Dies kommt daher, dass die Krümmung der Bindungsenergiefläche für die leichteren Kerne grösser ist. Die Änderung der Bindungsenergie von 2 aufeinanderfolgenden ungeraden Kernen (N, Z) und ($N - 2, Z$) ist hier wesentlich grösser als die Ablösungsenergie,

die wir mit Hilfe der Tangente der Kurve $Z = \text{const.}$ auf der Fläche B_{jP} (N, Z) im Punkte N erhalten. Die Definition (1) würde ein abnormales Sinken der Kurven K_{ZjP} verursachen*).

Die Darstellung der experimentellen Niveauschemata, wie sie oben beschrieben ist, ist für das Gebiet $N = 13-82$ in Fig. 2 gegeben. Dieses Gebiet ist das interessanteste, denn es enthält den grössten Teil der hier betrachteten experimentellen Daten, während für grössere N -Werte der Mangel an bekannten Bindungsenergien (Gebiet der seltenen Erden) uns zwingt, die Kurven K_{ZjP} in vielen Fällen zu interpolieren. Die mittleren Niveaulinien \bar{K}_{jP} der Fig. 5 (I), oberer Teil, sind unmittelbar aus Fig. 2 bestimmt worden. Ein Teil der K_{ZjP} war auch schon in (I) Fig. 3 reproduziert (für $j^P = 9/2^+, 5/2^+$ im Gebiet $N = 35-65$).

Die hier verwendeten Bezeichnungen für die gemessenen Niveaus sind dieselben wie in I. Sie sind in der Legende der Fig. 2 zusammengefasst. Die besonders bezeichneten Punkte (● gewöhnlich angeregte Zustände — höhere Niveaus in der Schalenstruktur — ○ Grundzustände, ▽ Löcher) geben ausschliesslich die Niveaus mit *gemessenen* Zuordnungen j^P an. Es gibt noch eine gewisse Anzahl Kerne, die hier mit ⊗ bezeichnet sind, für welche nur die Ablösungsenergie des Grundzustandes, aber nicht j^P , bekannt ist, und für die j^P durch Interpolation bestimmt sind. Diese Kerne wurden mitbenutzt, um die regelmässigen Kurven K_{ZjP} zu konstruieren.

In der Mitte der Schalen $7/2^-$ und $9/2^+$ ist der tatsächliche Spin der Grundzustände um 1 kleiner als der theoretische Wert, der aus dem Schalenmodell folgt. (Z. B. für die Schale $7/2^- N=25$ ist der Grundzustand $5/2^-$, ebenso für die Schale $9/2^+$, in der Nähe von $N=45$, ist der Grundzustand $7/2^+$.) Dies bedeutet, dass die erste Näherung des Schalenmodells (freie Nukleonen, mit Spinbahnkopplung) hier ungültig wird, und dass Mischungen von Einteilchenzuständen vorkommen. Diese gemischten Niveaus sind in Fig. 2 zusammen mit den Kurven $(j-1)^P$ (eingerahmte Bezeichnungen) gegeben. Die theoretischen Zustände $7/2^-$ bzw. $9/2^+$, die den Grundzustand darstellen sollten, sind in diesem Falle leicht angeregt.

Allgemeine Diskussion der Niveaulinien K_{ZjP}

Ein Blick auf Fig. 2 zeigt, dass die Kurven K_{ZjP} als Funktion von N im allgemeinen stetige, glatte Kurven sind. Die Einteilchenniveaus treten, wenn wir entlang dieser Kurven im Sinne wachsender Neutronenzahl fortschreiten, im allgemeinen in der Reihenfolge als gewöhnliche

*) Dieses Sinken der Niveaus (in den Potentialöpfen) im Gebiet der leichteren Kerne, ist in Fig. 5 (I) für das erste mittlere Niveau $\bar{K}_{3/2+}$ angegeben. Fette Kurve: aus K_{ZjP} mit korrigierten Ablösungsenergien konstruiert, strichpunktierter Linie: aus den K_{ZjP} mit Ablösungsenergien τ_N (1).

Zustände, dann als Grundzustände und Löcher auf. Dies ist eine Eigenschaft der idealen Schalenstruktur.

Die Gesamtheit der Kurven K_{Zj^P} (Fig. 2) zerfällt in verschiedene Kurvengruppen: In einem gewissen zusammenhängenden Bereich der N -Achse, haben die verschiedenen K_{Zj^P} die zur selben Zuordnung j^P und verschiedenen Z gehören, eine ähnliche Form. Sie verlaufen im allgemeinen ungefähr parallel mit gleichen Abständen. Wir erhalten auf diese Weise Gruppen von Niveaulinien K_{Zj^P} . Jede Gruppe ist durch ein bestimmtes j^P charakterisiert, und entspricht einem bestimmten Einteilchenniveau j^P . Dagegen kommen typische Sprünge zwischen diesen Gruppen vor, insbesondere zwischen 2 Gruppen die durch eine magische Zahl von N getrennt sind.

Auch die verschiedenen experimentellen Niveauflächen S_{j^P} der ungeraden Kerne, die durch die K_{Zj^P} dargestellt sind, sind stetig, und die verschiedenen Flächen die zu verschiedenen Niveaus gehören, sind voneinander gut getrennt, besonders wenn 2 Flächen eine magische Zahl überbrücken. (In I sind die entsprechenden mittleren Niveaulinien \bar{K}_{j^P} getrennt.) Für die untersten Anregungsniveaus des Gebietes $N = 13-82$ bleibt also im allgemeinen die Stetigkeit der Niveauflächen S_{j^P} trotz der direkten Nukleonenwechselwirkung erhalten. Dies ist eine Rechtfertigung der Schalenstruktur.

Die Unregelmässigkeiten im Verlauf von K_{Zj^P}

Die oben genannte Stetigkeit der K_{Zj^P} ist ein allgemeiner Zug unserer Darstellung, doch kommen auch gewisse Unregelmässigkeiten vor, die wir jetzt diskutieren. Die Unregelmässigkeiten der Kurven K_{Zj^P} für $Z = 52, 54$ und 56 (Fig. 2) röhren nicht von der Tatsache her, dass in einer Folge von Grundzuständen $3/2^+$ plötzlich ein Grundzustand $1/2^+$ bei $Z = 54$ $N = 75$ und $Z = 56$ $N = 77$ vorkommt (Sprung auf eine andere Fläche S_{j^P} an diesen Stellen). Diese Kerne mit der Zuordnung $1/2^+$ im Grundzustand haben eine abnormal grosse Bindungsenergie, die wesentlich grösser ist als der Abstand zwischen den Flächen $S_{3/2^+}$ und $S_{1/2^+}$ in diesen Punkten. Tatsächlich ist der Unterschied zwischen dem experimentellen Grundniveau $1/2^+$ und dem Grundniveau, das wir erhalten würden, wenn das Flächenstück $B_{3/2^+}$ in diesen Ausnahmepunkten regelmässig wäre, von der Größenordnung $0,3$ MeV also 10mal grösser als die Anregungsenergie des Niveaus $3/2^+$. Die im Gebiet $N = 70-82$ vorkommende Unregelmässigkeit hat einen andern Grund: Wir sind hier in dem ersten Gebiet, in dem nach dem sphärischen Schalenmodell sehr grosse Einteilchenniveaudichten auftreten, wodurch Änderungen in der Kernstruktur hervorgerufen werden können. (Mischungen von Einteilchenniveaus, erstes Anwendungsgebiet der deformierten Kerne.) Eine

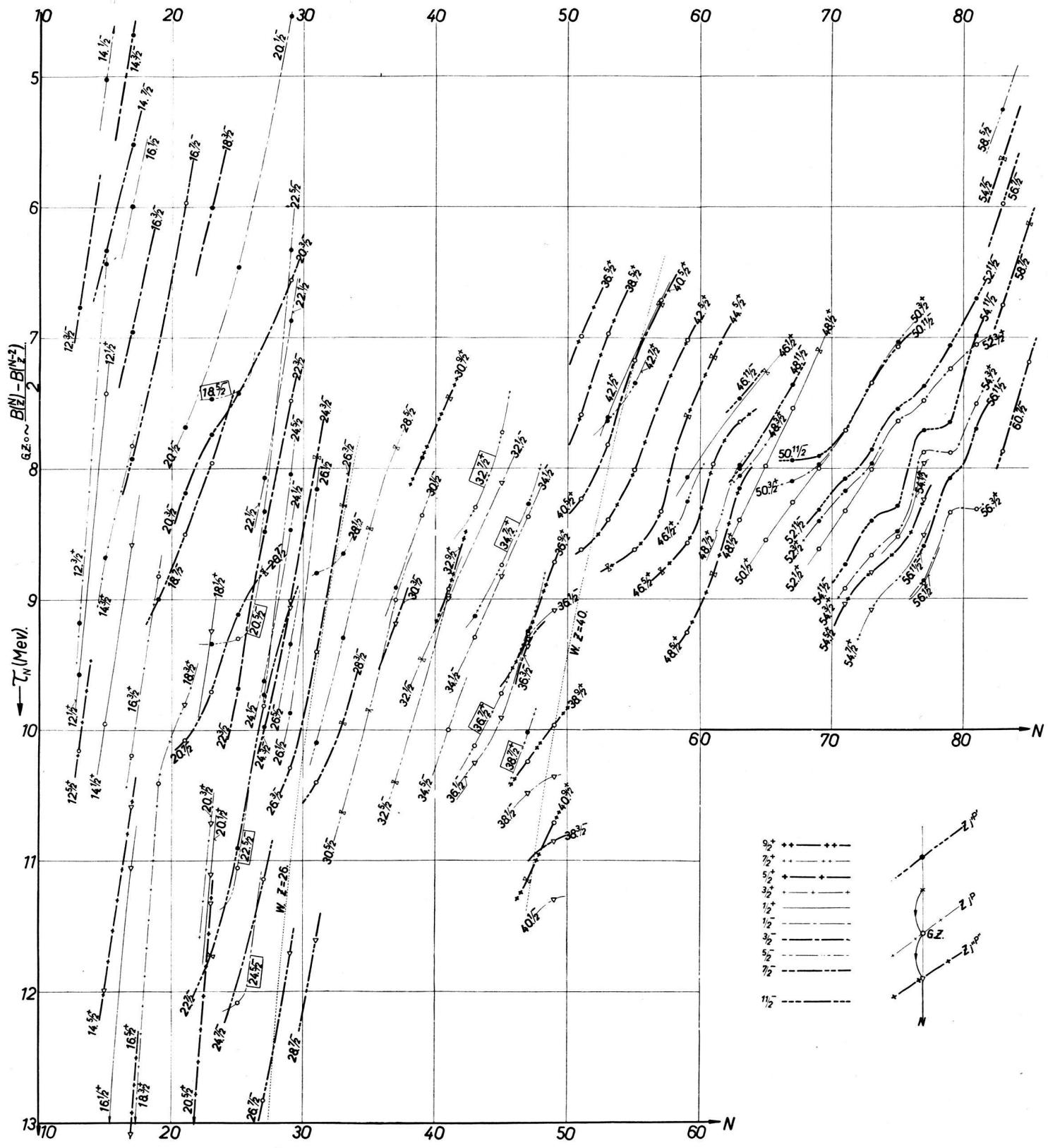


Fig. 2.

Die empirischen Linien $K_{Z,jP}$ ($Z = \text{konst.}$) der Einteilchenniveauflächen S_{jP} für die ungeraden Kerne: (N ungerade, Z gerade). $K_{Z,jP}$ ist mit Hilfe des Energieniveaus $\tau_N(N, Z)$ als Funktion der Neutronenzahl N in der Ebene τ_N, N dargestellt. Die verschiedenen Kurven $K_{Z,jP}$ sind mit den Werten von Z_{jP} bezeichnet.

Der Kerngrundzustand mit gemessener Zuordnung ist mit \circ bezeichnet, und ist im allgemeinen durch $\tau_{N,j}P(N, Z)$ Formel (1) gegeben. Systematische Korrekturen nur für die Neutronenzahlen $N = 13, 19, 21, 29$ und 51 . (Siehe § 2.) •: gewöhnliches angeregtes Niveau. Δ : Lochniveau. \ddagger : bezeichnet Kerne für welche nur die Ablösungsenergie aber nicht die Zuordnung experimentell bekannt ist (j^P durch Interpolation bestimmt). Kern (N, Z) rechts unten: Grundzustand j^P mit einem gewöhnlichen angeregten Niveau j''^P' und Lochniveau j'''^P'' .

Die eingerahmten Bezeichnungen $Z(j-1)^P$ ($5/2^-$ bzw. $7/2^+$) im Gebiet $N \sim 25$ bzw. 45 stellen gemischte Niveaus dar, die in der Mitte der Schalen $j^P = 7/2^-$ resp. $9/2^+$ vorkommen. Die punktierte Linie $W.Z = 26$ bzw. $W.Z = 40$ ist die theoretische mittlere Ablösungsenergie $Z = \text{konst.}$ ($Z = 26$ bzw. 40) nach (4) als Funktion von N (entspricht der Mittellinie \bar{K}_Z gemittelt über die Zuordnung j_P der empirischen Linien $K_{Z,P}$).

Zuordnung zwischen den experimentellen Niveauschemata und den Vorhersagen des sphärischen Schalenmodells bleibt noch möglich, obwohl die Werte der Quadrupolmomente schon in diesem Gebiet wesentlich grösser sind als die Einteilchenwerte.

Neben den obigen Unregelmässigkeiten zeigt Fig. 2 noch eine andere Art von Unregelmässigkeit im Verlauf der K_{ZjP} . Wenn $Z = \text{magisch}$ ist, wächst die Anregungsenergie der angeregten Niveaus besonders stark in der Nähe einer magischen Zahl von N , was gewisse anomale Annäherungen, manchmal auch Kreuzungen der Kurven K_{ZjP} und $K_{(Z-2)jP}$ verursacht. Siehe in Fig. 2 z. B. den Verlauf von $K_{50^{11/2}-}$ gegenüber $K_{48^{11/2}-}$ im Gebiet $N \sim 66$. Dieselbe Situation wiederholt sich für $K_{28^{11/2}-}$, das die Kurve $K_{26^{11/2}-}$ ($N \sim 31$) zu kreuzen scheint und für $K_{20^{3/2}-}$ und $K_{18^{3/2}-}$ ($N \sim 20$). In diesem letzten Fall ist die Anomalie weniger ausgeprägt. Dies ist das Analogon der Zunahme der Anregungsenergien in der Nähe von $N = \text{magisch}$. (Vergleiche in Fig. 2 besonders die Niveaus $K_{Z^{11/2}-}$ vor $N = 82$ (Grundzustand $3/2^+$) und $K_{Z^{11/2}-}$ vor $N = 50$ (Grundzustand $9/2^+$). Wir sehen also, dass die Anregungsenergien wesentlich erhöht werden, wenn eine Schale für beide Nukleonarten genau voll ist*).

Zusammenfassend kann man sagen: Im Gebiet $N = 13-82$ sind die Kernniveauflächen S_{jP} für die ungeraden Kerne mit N ungerade im allgemeinen regelmässig. Zusammen mit den Resultaten von I, zeigt sich also, dass die direkte Wechselwirkung zwischen den Nukleonen, die im verallgemeinerten Schalenmodell als eine Störung behandelt wird, die die Einteilchenzustände mischt, im allgemeinen nur kontinuierliche Deformationen der Niveauflächen S_{jP} mit sich bringt. Aber für eine magische Zahl der Nukleonen sind diese Deformationen unregelmässig und grösser, obwohl eine Korrespondenz mit den Vorhersagen des Schalenmodells in diesem Gebiet noch in befriedigender Weise möglich ist.

Wir wollen noch kurz den Fall betrachten, wo die Lage der Grundzustände mit Hilfe der gewöhnlichen Definition der Ablösungsenergien (aus der Bindungsenergie benachbarter Kerne $\Delta N = 1$) bestimmt sind:

$$\tau'_N = B(N, Z) - B(N - 1, Z). \quad (2)$$

Wir vergleichen also hier die Bindungsenergien von Kernen verschiedener Eigenschaften, und die so berechneten Lagen der Grundzustände werden von den τ_N (1) im Mittel um eine Paarungsenergie abweichen. Die letzteren sind aber wesentlich von N (für $Z = \text{konst.}$) abhängig: 1,5 MeV im Durchschnitt mit Maxima für N -Werte, die vollgefüllten Schalen entsprechen. Fig. 3 gibt die Kurven K_{ZjP} der Fig. 2 für das Gebiet $N = 50-82$ wieder, wenn (2) benutzt ist. Die Unregelmässigkeiten der

*) In I wurde schon gezeigt, dass für fast doppelmagische Kerne die direkte Nukleonwechselwirkung eine kleine Rolle spielt.

Paarungsenergien zeigen sich im Verhalten der K_{ZjP} und das ganze Kurvensystem ist, mit Fig. 2 verglichen, um 1,5 MeV nach oben versetzt. Für die Stetigkeit der experimentellen Niveaumassen S_{jP} ist also wesentlich,

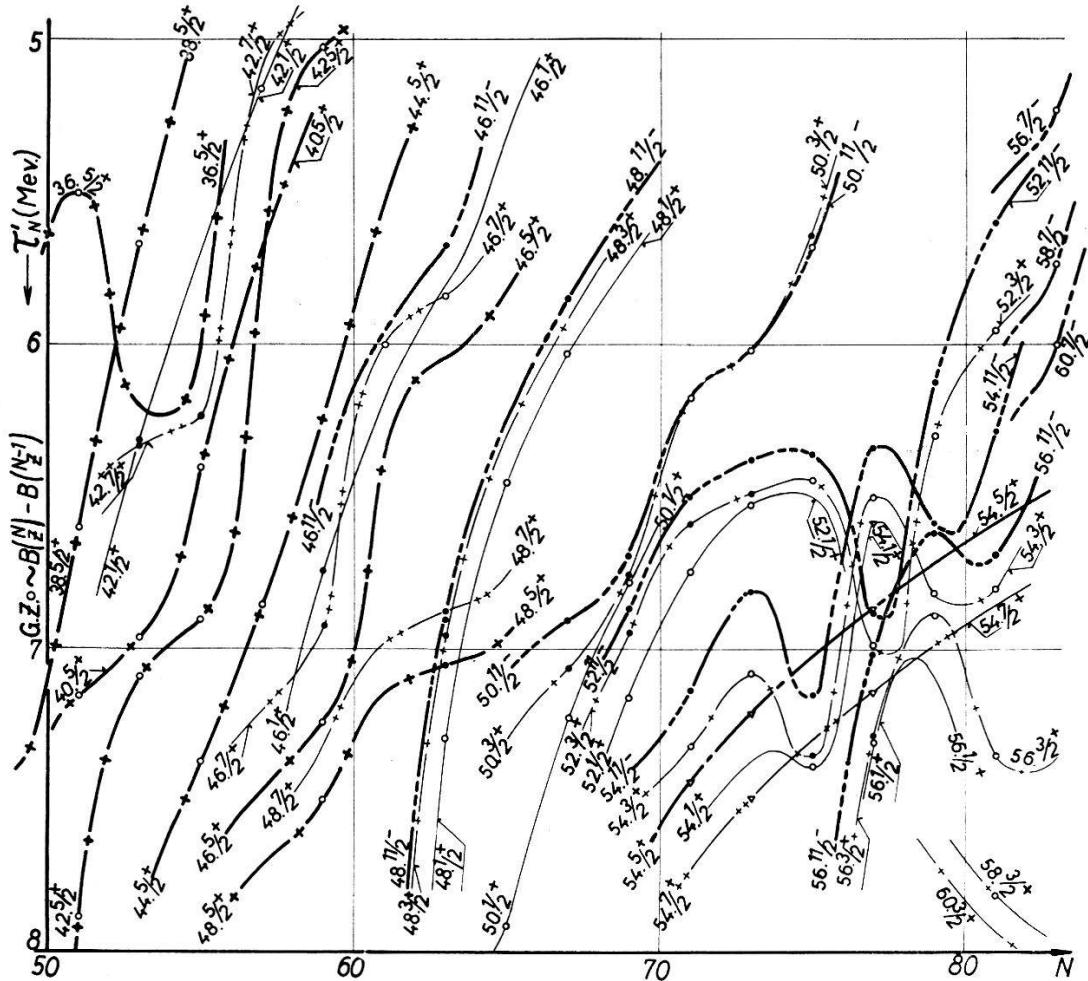


Fig. 3.

Die Linien K_{ZjP} ($Z = \text{konst.}$) der Einteilchenniveaumassen S_{jP} für die ungeraden Kerne: (N ungerade, Z gerade). Dasselbe wie Fig. 2 für die Kerne $N = 50$ bis 82, aber der Grundzustand der Kerne ist hier mit Hilfe von τ'_N , Formel (2), bestimmt. Die starke Abhängigkeit der in (2) vorkommenden Paarungsenergie als Funktion der Neutronenzahl N äussert sich im Verlauf der K_{ZjP} . Gleiche Linien- und Punktebezeichnung wie in Fig. 2.

dass in der Definition der Ablösungsenergien nur Kerne mit denselben Eigenschaften (ungerade Kerne mit derselben Zuordnung j^P) verglichen werden.

§ 3. Bindungsenergie im Rahmen des Schalenmodells

Die Kurven K_{ZjP} die den Verlauf der Kernniveaus von bestimmter Zuordnung j^P für eine Reihe von Isotopen als Funktion von N angeben, steigen für wachsende N -Werte. Außerdem können wir die entsprechenden Kurven K_{NjP} für eine Reihe von Isotonen als Funktion von Z für

die ungeraden Kerne mit ungerader Protonenzahl konstruieren. Sie haben einen ähnlichen Verlauf, nur sind die Neigungen der Kurven etwa 2,5mal grösser. Dieses Verhalten entspricht dem bekannten Verlauf der Fläche der *Bindungsenergie* $B(N, Z)$, die wir in diesem Abschnitt eingehend diskutieren.

Wegen der Schalenstruktur ist die Fläche der Bindungsenergie $B(N, Z)$ unregelmässig, und besteht aus einer Folge von im allgemeinen glatten Flächenstücken $B_{jP}(N, Z)$, die jeweils durch die Zuordnung j^P der entsprechenden Kerne im Grundzustand charakterisiert sind. Dazu kommen noch die in § 2 erwähnten Unregelmässigkeiten hinzu, die von der Änderung der Kernstruktur in gewissen Bereichen des periodischen Systems verursacht werden. Es kann deshalb nicht in Frage kommen, einen einigermassen strengen analytischen Ausdruck für die Bindungsenergie der ungeraden Kerne über das ganze periodische System hinweg zu finden. Wir werden uns in diesem Abschnitt auf Mittelwerte über die verschiedenen Zuordnungen j^P beschränken, d. h. die Schalenstruktur wird nicht im einzelnen berücksichtigt. Insbesondere werden die verschiedenen Linien K_{ZjP} für eine bestimmte Reihe von Isotopen Z (verschiedene j^P) durch eine mittlere Kurve \bar{K}_Z ersetzt werden, die durch die Mitte des Bereichs der Grundzustände j^P läuft und die verschiedenen K_{ZjP} kreuzt. Damit sind alle Punkte des ganzen Bogens von \bar{K}_Z durch eine *mittlere* Ablösungsenergie τ_N bestimmt. Für diese lässt sich dann wohl eine analytische Form finden.

Die analytische Form der mittleren Fläche der Bindungsenergie $B(N, Z)$ ist z. B. durch die semi-empirische Bethe-Weizsäckersche Formel gegeben:

$$B_w = \alpha A - \beta \frac{(N-Z)^2}{A} - \gamma A^{2/3} - \delta \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (3)$$

$$\delta = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0} = 0,80 \text{ MeV} \quad R_0 = 1,08 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

Für die Coulomb Energie (letztes Glied von (3)) ist eine homogene DichteVerteilung der Protonen innerhalb einer Kugel mit dem elektrischen Radius $R_{el} = R_0 A^{1/3}$ (nach HOFSTÄDTER⁵)) angenommen. α, β, γ sind Konstanten*).

Üblicherweise werden die Konstanten α, β, γ durch Anpassung der *mittleren* experimentellen und berechneten Ablösungsenergie B/A eines Nukleons über das ganze periodische System bestimmt. Diese Konstantenwerte beziehen sich auf die mittleren stabilen Kerne. In dieser Arbeit

*.) Mit der neuen Wahl von R_0 sind natürlich diese Konstanten anders zu wählen als üblich.

wird mehr verlangt werden: die aus der empirischen Formel (3) berechnete mittlere Ablösungsenergie der Kerne

$$\begin{aligned}\tau_N(N,Z) &= B_w(N,Z) - B_w(N-1,Z) \\ &\cong \alpha - \beta \left[1 - \frac{4Z^2}{A(A-1)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\gamma}{A^{1/3}} + \frac{\delta}{3} \frac{Z(Z-1)}{A^{4/3}} \quad (4) \\ \tau_Z(N,Z) &= B_w(N,Z) - B_w(N,Z-1) \\ &\cong \alpha - \beta \left[1 - \frac{4N^2}{A(A-1)} \right] - \frac{2}{3} \frac{\gamma}{A^{1/3}} + \frac{\delta}{3} \frac{Z(Z-1)}{A^{4/3}} - 2\delta \frac{Z-1}{(A-1)^{1/3}}\end{aligned}$$

muss die wirkliche Ablösungsenergie eines Nukleons für *alle* möglichen Kerne approximieren. Insbesondere muss (4) den Verlauf der mittleren Ablösungsenergiefläche auch ausserhalb der Verteilungslinie $\bar{N}(Z)$ (Fig. 1) der stabilen Kerne wiedergeben. Wir werden die Konstanten α, β, γ so bestimmen, dass wir zuerst nur die Gesamtheit der *mittleren* stabilen Kerne heranziehen. Dann werden wir verifizieren, dass die Ablösungsenergie (4) mit den so erhaltenen Konstanten, auch wirklich die empirische Ablösungsenergie *aller* Kerne (auch ausserhalb von $\bar{N}(Z)$) approximiert. Ausserdem werden wir den Wert von α auch rein theoretisch bestimmen. Die Übereinstimmung mit dem semi-empirischen Wert ist ausgezeichnet.

Bevor wir die Konstanten bestimmen, wollen wir zuerst die allgemeine Form der empirischen Formel (3) im Rahmen des Schalenmodells begründen. Zu diesem Zweck werden wir 2 verschiedene Definitionen für die Potentialtöpfe des Schalenmodells benutzen. Diese wurden schon in früheren Arbeiten beschrieben und werden hier kurz gegenübergestellt. Wir nehmen 2 verschiedene kugelsymmetrische Potentialtöpfe mit schießen Wänden $V_N(r), V_Z(r)$ für die Neutronen bzw. Protonen an. Diese sind mit Hilfe der folgenden 3 Parameter bestimmt: Radius, Neigung der Wände und Tiefe (siehe Fig. 4 rechts). Die Radien werden gemäss den letzten Messungen von HOFSTÄDTER⁵) festgesetzt. (Diese beziehen sich allerdings auf den elektrischen Radius.) Für die äussere Kante der Töpfe nehmen wir an:

$$R_k = (1,08 A^{1/3} + 2,4) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (5)$$

Hierbei ist noch die endliche Reichweite der Kernkräfte durch die additive Konstante berücksichtigt. In Übereinstimmung mit den Resultaten von Hofstädter wurde die Dicke a der „Potentialoberfläche“ konstant gewählt: $a = 2,9 \cdot 10^{-13}$ cm. (Siehe Fig. 4 rechts.) Die Tiefe der Potentialtöpfe (hier mit V_N^0 bzw. V_Z^0 bezeichnet) ist indirekt festgesetzt.

In I¹⁾ und im ersten Teil dieser Arbeit sind die V^0 so bestimmt, dass die Energie des *obersten besetzten Niveaus* bei kompakter Besetzung die

Ablösungsenergie darstellt und die mittleren experimentellen und theoretischen Ablösungsenergikurven über das ganze periodische System zusammenfallen. Das Schalenmodell setzt dann V^0 fest. V^0 wurde nur für die idealen mittleren Kerne $\bar{N}(Z)$ bestimmt. Dabei sind die V_N^0 und V_Z^0 als langsam veränderliche Funktionen der Nukleonenzahlen angenommen.

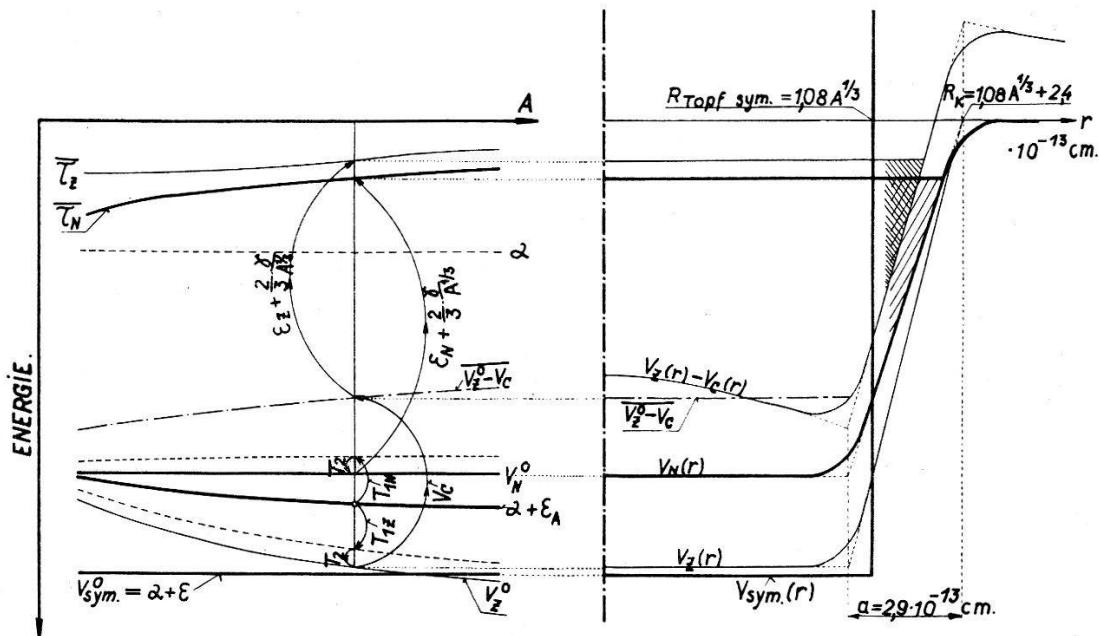


Fig. 4.

Rechts: Das Potential der Kernkräfte nach dem Schalenmodell: $V_N(r)$ bzw. $V_Z(r)$ für die Neutronen bzw. Protonen als Funktion des Radius r . $V_c(r)$ = gesamte Coulombenergie eines Protons im Kernfeld mit homogener elektrischer Dichteverteilung. V_N^0 , V_Z^0 : Topftiefe. $\overline{V_Z^0 - V_c}$: Mittelwert der Kernkräfte und elektrischen Kräfte (18) auf ein Proton (strich-punktierte Linie). Index: sym. bezeichnet den idealen symmetrischen Kern mit konstanter Ablösungsenergie α . a = „Dicke“ der Potentialoberfläche. Die Schraffierungen zeigen die Grenze des Topfgebietes in dem sich die besetzten Niveaus befinden.

Links: Skizze der verschiedenen Beiträge zu den Kernalternativen als Funktion der Teilchenzahl A für die idealen mittleren Kerne durch $\bar{N}(Z)$ Fig. 1 gegeben. $\bar{\tau}_Z$, $\bar{\tau}_N$ = mittlere empirische Ablösungsenergie eines Neutrons bzw. Protons. ϵ_A , ϵ_N , ϵ_Z : kinetische Fermienergie nach Formeln (7), (7'). ϵ : Fermienergie des symmetrischen Kerns (9). T_1 , T_2 sind die Ausdrücke (16').

V^0 ist gleich der kinetischen Grenzenergie plus die Ablösungsenergie. Bei der Ionisation des letzten Nukleons sind also Radius und Tiefe des Potentialtopfs festgehalten.

In diesem Modell, hier mit M. I. bezeichnet, stellen die Töpfe $V_N(r)$ bzw. $V_Z(r)$ eine Art effektives Potential dar, das auf ein sich im Topf frei bewegendes Neutron bzw. Proton wirkt. Im Laufe einer Ionisation bleibt dieses Potential für das ionisierte Teilchen noch (bis zur endgül-

tigen Entfernung) bestehen. Dagegen bleibt das Potential für die restlichen Nukleonen (Kerninneres) nicht mehr „self-consistent“, sobald das ionisierte Nukleon vom Kern entfernt ist (die Grösse der Töpfe hängt natürlich von der Nukleonenzahl ab). In diesem Modell ist die gesamte Bindungsenergie eines Kerns gleich der Summe der sukzessiven Ablösungsenergien τ der verschiedenen Kerne die im Laufe der Ionisierung vorkommen.

In einer älteren Arbeit⁶⁾ wurde schon eine andere Definition der V^0 benutzt: Die V^0 sind so bestimmt, dass die Summe der Energieeigenwerte aller Nukleonen eines Kerns, berechnet nach dem Schalenmodell, im Mittel gleich ist der *gesamten* experimentellen Bindungsenergie B dieses Kerns, mit der Nebenbedingung: die obersten besetzten Niveaus in den Töpfen für die Neutronen bzw. Protonen, müssen *im Mittel* für das ganze periodische System der Stabilitätsbedingung für den β -Zerfall genügen.

Die Rechnungen im Rahmen dieses Modells, hier mit M. II bezeichnet, haben gezeigt, dass das oberste besetzte Einteilchenniveau der Töpfe aller mittleren stabilen Kerne im Grundzustand fast beim Energienullpunkt liegt. Es ist hauptsächlich dieses Resultat, das wir brauchen, wenn wir das Modell II benutzen*). Die Ablösungsenergie eines Nukleons ist hier im wesentlichen gleich der Änderung der Summe der Energieeigenwerte *aller* Nukleonen der Kerne vor und nach der Ionisierung. Diese Änderung ist bedingt durch die Abnahme des *Kernradius*, und daher des Fassungsvermögens, des ionisierten Kerns. Wir bemerken, dass der Potentialtopf hier schon an die Teilchenzahl des ionisierten Kerns angepasst werden muss, wenn das ionisierte Teilchen sich noch im Wirkungsbereich der Kernkräfte befindet. Wenn wir von diesem Modell II Gebrauch machen, wird immer angenommen, dass das oberste besetzte Niveau der stabilen Kerne auf der Nulllinie der Energie liegt. Die Ablösungsenergie eines Nukleons ist also genau gleich der Änderung der Summe der Energieeigenwerte aller Nukleonen vor und nach der Ionisierung. Falls dasselbe Gesetz für den Materieradius in *beiden* Modellen benutzt wird, gilt für die Topftiefen in den beiden Modellen:

$$\begin{aligned} (V_N^0)_{\text{Mod. I}} &\simeq \tau_N + (V_N^0)_{\text{Mod. II}} \\ (V_Z^0)_{\text{Mod. I}} &\simeq \tau_Z + (V_Z^0)_{\text{Mod. II}} \end{aligned} \tag{6}$$

da die kinetischen Grenzenergien in beiden Fällen ungefähr gleich gross sind.

Das Modell II wird nur für die theoretische Bestimmung von α benutzt werden. Wenn nichts anderes bemerkt ist, ist im folgenden das Modell I angenommen.

*) In ⁶⁾ wurden die Radien der *Töpfe* streng proportional zu $A^{1/3}$ gewählt. Das ändert aber unser Resultat nicht.

Zur Ableitung von (3) benutzen wir nun als *erste Näherung* die folgende Vereinfachung: die Teilchenverteilung in den Potentialtöpfen nach dem Schalenmodell wird durch eine Fermiverteilung ersetzt. Insbesondere wird die *kinetische* Grenzenergie des obersten Nukleons im Topf mit der Grenzenergie eines Fermigases identifiziert. In dieser Näherung wird also angenommen, dass die Teilchen sich zwischen starren Wänden und in einem konstanten Potential bewegen (statt in dem tatsächlichen Potentialtopf).

Die kinetischen Grenzenergie eines Fermigases, das aus A Nukleonen (Gewichtsfaktor 4) besteht und in einer Kugel mit dem Radius R eingeschlossen ist, ist gegeben durch

$$\varepsilon_A = \frac{Mc^2}{2} \left(\frac{\hbar/Mc}{R/A^{1/3}} \right)^2 \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \quad (7)$$

Falls die Protonen und Neutronen getrennt behandelt werden, sind die Grenzenergien

$$\begin{aligned} \varepsilon_N &= \varepsilon_A \left(\frac{2N}{A} \right)^{2/3} = \varepsilon_A \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left[1 - \frac{4Z^2}{A(A-1)} \right] + \frac{2}{9} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 + 0 \left(\frac{N-Z}{A} \right)^3 \right\} \\ \varepsilon_Z &= \varepsilon_A \left(\frac{2Z}{A} \right)^{2/3} = \varepsilon_A \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left[1 - \frac{4N^2}{A(A-1)} \right] + \frac{2}{9} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 + 0 \left(\frac{N-Z}{A} \right)^3 \right\} \end{aligned} \quad (7')$$

Hier ist $N - Z$ klein gegen A angenommen, was diese Entwicklung von $(2N/A)^{2/3}$ bzw. $(2Z/A)^{2/3}$ ermöglicht. Die beiden ersten Glieder in $(N-Z)$ lassen sich wie in (7') umformen. Die 0-Terme von dritter und höherer Ordnung in $(N-Z)/A$ sind äusserst klein und werden vernachlässigt.

Die empirische Formel (3) kann man nun verstehen als eine Entwicklung der Bindungsenergie des Kerns, wobei als *erste Näherung* die Energie eines gewissen idealen kugelsymmetrischen Kernes auftritt. Dieser ideale Kern soll aus $A/2$ Neutronen und $A/2$ Protonen bestehen und eine konstante (d. h. A -unabhängige) Ablösungsenergie α haben. Die Neutronen und Protonen befinden sich zwischen starren Wänden in dem *gleichen* konstanten Potential oder in zwei Potentialtöpfen mit derselben Ausdehnung wie sie durch die Wände gegeben ist. Wegen $N = Z$ nennen wir diesen idealen Kern den symmetrischen Kern. Was bei diesem idealen Kern vernachlässigt ist, ist natürlich erstens die Differenz $(N - Z)$ und die dadurch bedingte Verschiedenheit der Potentiale für Protonen und Neutronen. Zweitens sind eine Reihe von *Randeffekten* vernachlässigt: Die Potentialwände sind endlich hoch (keine starren Wände), die Wellenfunktionen der Nukleonen nehmen gegen den Rand hin ab und erstrecken sich etwas über die Potentialwände hinaus, was wiederum wegen der Selbst-Konsistenz schiefe Potentialwände mit sich bringt. Ferner bedingt die endliche Reichweite der Kernkräfte eine grössere Ausdehnung des Potentialtopfs als die der Materie. Endlich ist noch die Coulombenergie

in diesem idealen Kern nicht berücksichtigt. Die 3 letzten Glieder der empirischen Formel (3) berücksichtigen näherungsweise die Differenz ($N - Z$), die Randeffekte und die Coulombenergie. Nach diesen wird entwickelt.

Betrachten wir zuerst den idealen symmetrischen Kern. Für R_{Materie} setzen wir nach HOFSTÄDTER⁵⁾

$$R_{\text{Materie}} = R_{el} = R_0 A^{1/3} = R_{\text{Topf sym}} \quad (8)$$

$$R_0 = 1,08 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

Wegen der starren Wände ist die Ausdehnung des Potentialtopfs gleich der der Materie. Die Grenzenergien für die 2 Nukleonensorten sind beide gleich

$$\varepsilon = \frac{Mc^2}{2} \left(\frac{\hbar/Mc}{R_0} \right)^2 \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} = 42 \text{ MeV}, \quad (9)$$

unabhängig von A wegen der strengen Proportionalität des Kernvolumens zur Teilchenzahl.

In Modell II ist die gesamte Bindungsenergie des symmetrischen Kerns:

$$B(A) = A \cdot V_{\text{Sym. M. II}}^0 - E_K(A) \quad (10)$$

$$V_{\text{Sym. M. II}}^0 = \varepsilon$$

wobei V_{Sym}^0 das Potential des symmetrischen Kerns (mit unendlich hohen Wänden) und E_K die gesamte kinetische Energie der Teilchen ist. In unserem Fall gilt für ein Fermigas

$$E_K(A) = \frac{3}{5} \varepsilon \cdot A. \quad (11)$$

Die Differenz der kinetischen Energie von 2 Kernen A und $(A-1)$ (die verschiedene Radien besitzen) ist:

$$E_K(A) - E_K(A-1) = \frac{3}{5} \varepsilon$$

(obwohl das ionisierte Teilchen vom Topfboden um die gesamte Fermienergie ε entfernt ist). Die Differenz der Bindungsenergie von 2 Kernen A und $(A-1)$ gibt die Ablösungsenergie des symmetrischen Kernes. (Die unendlich hohen Wände sind natürlich nur als eine Idealisation für die Berechnung von ε usw. zu betrachten.) Nach (10) ist dann:

$$\alpha = B(A) - B(A-1) = \varepsilon - \frac{3}{5} \varepsilon = \frac{2}{5} \varepsilon \approx 17 \text{ MeV} \quad (12)$$

Die Unabhängigkeit von α von A beruht auf der konstanten Dichte des symmetrischen Kerns. ε kann auch als Änderung der kinetischen Energie aufgefasst werden, wenn A um 1 grösser wird unter Konstanthaltung des

Topfradius. $-2/5 \varepsilon$ in (12) stellt dann die Änderung der kinetischen Energie unter Konstanthaltung der Teilchenzahl dar, wenn der Radius von $R_{\text{Topf sym.}}(A)$ zu $R_{\text{Topf sym.}}(A+1)$ variiert. Die Ablösungsenergie α des symmetrischen Kerns ist also allein durch die Änderung des Radius der Materieverteilung während der Ionisation bestimmt. Somit haben wir den Wert von α rein theoretisch bestimmt. Wir werden sehen, dass (12) sehr gut mit dem empirischen Wert übereinstimmt.

Im Sinne von Modell I gilt für das Potential des symmetrischen Kerns nach (6) ($\tau_N = \tau_Z = \alpha$):

$$V_{\text{Sym. M. I}}^0 = \alpha + \varepsilon \cong 59 \text{ MeV.} \quad (13)$$

unabhängig von A . Für alles weitere wird Modell II nicht mehr benutzt werden. Die Konstanz von V_{sym}^0 ist mit dem angenommenen Radiusgesetz (8) (konstante Dichte der Kernmaterie) konsistent.

Die Bindungsenergie des symmetrischen Kerns, im Sinne von Modell I, erhält man durch Summation der sukzessiv vorkommenden Ablösungsenergien $\alpha = \text{konst}$: $B_{\text{sym}} = \alpha \cdot A$. Mit der Annahme $V_{\text{sym M. II}}^0 = \varepsilon$ sind alle Größen des Potentials des symmetrischen Kerns direkt aus dem Radiusgesetz für R_{Materie} bestimmt.

Betrachten wir jetzt die verschiedenen Korrekturen zur Bindungsenergie. Diese stellen die Abweichungen der kinetischen Grenzenergie und Tiefe des wahren Potentials gemäss Schalenmodell von den entsprechenden Größen des symmetrischen Kernes dar. Das 2. Glied in (3) beschreibt den Unterschied der mittleren Kernkräfte (Topftiefen V^0) in erster Näherung für Protonen und Neutronen, denn die Topftiefen sind verschieden, wenn die Anzahl der beiden Nukleonensorten verschieden sind. Dies steht nicht im Widerspruch mit der experimentellen Tatsache der Ladungs-unabhängigkeit der wirklichen Kernkräfte (z. B. der Ähnlichkeit der Niveauschemata der Spiegelkerne), sondern ist eine Folge des Ausschliessungsprinzips. Durch die Austauschkräfte, z. B. zwischen geladenen und ungeladenen Nukleonen, mit Ladungswechsel werden, falls $N > Z$, die Protonen bevorzugt, da die überschüssigen Neutronen, wegen des Ausschliessungsprinzips, nicht an der Austauschwechselwirkung teilnehmen. Folglich gilt für die mittleren Kernkräfte des Schalenmodells $V_Z^0 > V_N^0$. Der Einfluss dieser Unsymmetrie auf die gesamte Bindungsenergie ist von der Form $\sim (N-Z)^2/A$ (erstes Glied der Entwicklung), denn die nötige Energie um die Töpfe des symmetrischen Kerns wieder herzustellen, ist

$$\Delta B \sim (N-Z)(V_N^0 - V_Z^0) \sim (N-Z)(\varepsilon_N - \varepsilon_Z) \sim \frac{4}{3} \frac{(N-Z)^2}{A} \quad (14)$$

wenn man in (7') nur die erste Näherung in $(N-Z)/A$ betrachtet und

$\tau_N = \tau_Z$ setzt. $\beta (N - Z)/A$ ist also ein Mass für die Unsymmetrie der mittleren Austauscheffekte.

Das 3. Glied in (3), die sogenannte „Oberflächenenergie“ stellt im Schalenmodell die folgenden Randeffekte dar: Die Potentialwände des Schalenmodells sind endlich hoch (keine starren Wände). Dadurch wird die kinetische Grenzenergie verglichen mit der Fermieenergie des symmetrischen Kerns kleiner. Dies hat eine etwas grössere Bindung der Nukleonen zur Folge. Ferner nimmt, wegen dieser Randbedingungen, die Wellenfunktion der Nukleonen gegen den Rand hin allmählich ab (und erstreckt sich etwas über die Potentialwände hinaus), was wegen der Selbst-Konsistenz schiefen Potentialwände mit sich bringt. Dadurch wird die mittlere potentielle Energie der Nukleonen (gemittelt über den ganzen Kern) kleiner als die Topftiefe V^0 . Durch diesen Effekt wird die Bindung der Nukleonen etwas vermindert. Eine Abschätzung dieser Effekte ist schon von v. WEIZSÄCKER⁷⁾ gegeben worden. Für ein trapezförmiges Potential (siehe Fig. 4 rechts) gibt das statistische Modell die $A^{2/3}$ Abhängigkeit (siehe BETHE und BACHER⁸⁾). Wir akzeptieren hier diese Näherung. In unserem Modell stellt also das entsprechende Glied $2/3 \gamma A^{-1/3}$ in der Ablösungsenergie (4) diese Randeffekte dar, genauer, es ist die Differenz der kinetischen Grenzenergien im Potential mit schiefen Wänden (mittlerer Radius $R_{\text{Topf sym.}}$) und im Potential des idealen symmetrischen Kerns. Der Zahlwert von γ wird bestimmt werden durch Vergleich mit den experimentellen Daten. (Siehe unten.).

Ein weiterer Randeffekt kommt von der endlichen Reichweite der Kernkräfte. Der mittlere Radius des wahren Potentials muss deshalb grösser sein als $R_{\text{Topf sym.}}$ (Radius des idealen Kerns), was eine weitere Korrektion zur kinetischen Grenzenergie bedingt. Zur Abschätzung benutzen wir weiterhin die Approximation der starren Wände, aber mit einem abgeänderten Radius $\bar{R}_{\text{Topf}} > R_{\text{Topf sym.}}$. Wir bestimmen \bar{R}_{Topf} dadurch, dass die Fermienergie nach diesem Modell zusammen mit dem obigen Glied $2/3 \gamma A^{-1/3}$ über das ganze periodische System hin mit der kinetischen Grenzenergie des wahren Potentials (Fig. 4), berechnet nach dem Schalenmodell, so gut wie möglich übereinstimmen. Hierbei kann nur die Grösse ε_A (Formel (7)) angepasst werden, da nur der eine Parameter \bar{R}_{Topf} zur Verfügung steht. Ferner werden nur die idealen mittleren Kerne $N(Z)$ (Fig. 1) benutzt. Das Resultat dieser Anpassung ist:

$$\bar{R}_{\text{Topf}} = (1,08 A^{1/3} + c) \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (15)$$

wobei c noch sehr schwach von A abhängt*). \bar{R}_{Topf} muss mit dem mitt-

*.) Für c könnte man einen konstanten Mittelwert wählen, (wie in (5)). Die A -Abhängigkeit erleichtert aber die Bestimmung von α , β , γ . Sie stellt eine Korrektur zweiter Ordnung zur kinetischen Grenzenergie dar (siehe unten).

leren Radius des wahren Potentials übereinstimmen, was in der Tat der Fall ist*).

Der letzte Randeffekt ist auch von der Form $\sim A^{-1/3}$. Die Differenz der Fermienergie ε des idealen Kerns mit dem Radius R_{Materie} ($\varepsilon = \varepsilon_{A=\infty}(7)$) und die ε_A des idealen symmetrischen Kerns mit dem Radius R_{Topf} ist in der Tat

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{(A=\infty)} - \varepsilon_A \cong \varepsilon \frac{2c}{R_0 A^{1/3}} \sim A^{-1/3}$$

Das 4. Glied in (3) ist die gesamte Coulombenergie des Kerns. Das entsprechende letzte Glied von τ_Z (4) ist die gesamte Coulombenergie eines Protons im Kern. Dass die gesamte und nicht die mittlere Coulombenergie $(3/5) Ze^2/R_{el}$ auftritt, stimmt überein mit unserer Definition der Kernpotentiale (im Modell I), die die wirklichen Kräfte darstellen.

Bis jetzt haben wir die Form der verschiedenen Glieder der Bindungsenergieformel (3) durch die typischen Größen des Schalenmodells interpretiert und ausserdem den Wert von α direkt abgeleitet. Die Hauptannahme dabei war, dass die Einteilchenniveaus der Potentialtöpfe im Sinne von Modell II für den Kerngrundzustand (kompakte Besetzung), genau bis zur Nulllinie der Energie besetzt sind. Eine direkte Ableitung der Konstante γ wäre an sich auch möglich, denn γ stützt sich auf die Topfgrößen des idealen Kernes, die wir direkt kennen. Aber eine Abschätzung der Randeffekte auf diesem Weg ist sehr umständlich. Dagegen stellt das 2. Glied in (3) einen Austauscheneffekt dar, der nicht im Rahmen des Schalenmodells theoretisch abgeleitet werden kann. Der Wert von β kann deshalb nur aus den empirischen Ablösungsenergien entnommen werden.

Neben der Bestimmung der Konstanten β, γ ist es unser Ziel, auch noch einen Ausdruck für die Größe des wahren Potentials der Kerne zu finden. Wir versuchen, die Tiefen des wahren Potentials V_N^0, V_Z^0 so zu bestimmen, dass daraus eine Ablösungsenergie der Form (4) entsteht, wenn wir die kinetische Grenzenergie des wahren Potentials davon abziehen. Wir setzen:

$$V_N^0 = [\alpha + \varepsilon_A] - T_{1N} + T_2 \quad (16)$$

$$V_Z^0 = [\alpha + \varepsilon_A] - T_{1Z} + T_2$$

wobei

$$T_{1N} = \left(\beta - \frac{\varepsilon_A}{3} \right) \left[1 - \frac{4 Z^2}{A(A-1)} \right] > 0 \quad (16')$$

$$T_{1Z} = \left(\beta - \frac{\varepsilon_A}{3} \right) \left[1 - \frac{4 N^2}{A(A-1)} \right] < 0 \quad (16'')$$

$$T_2 = \frac{\delta}{3} \frac{Z(Z-1)}{A^{4/3}} + \frac{2\varepsilon_A}{9} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2$$

*) Der „mittlere Radius des wahren Potentials“ (siehe 6)) ist definiert als der Radius eines rechteckigen Vergleichspotentials mit gleichem Fassungsvermögen und gleicher Grenzenergie wie das wahre Potential.

Die Ablösungsenergie τ = potentielle Energie–kinetische Grenzenergie:

$$\tau_N = V_N^0 - \left(\varepsilon_N + \frac{2}{3} \frac{\gamma}{A^{1/3}} \right) \quad (17)$$

$$\tau_Z = V_Z^0 - V_c - \left(\varepsilon_Z + \frac{2}{3} \frac{\gamma}{A^{1/3}} \right)$$

$$V_c = 2 \delta \frac{Z-1}{(A-1)^{1/3}} \quad (18)$$

stimmt dann mit (4) überein. V_c ist die gesamte Coulombenergie eines Protons.

Die gesamte Bindungsenergie B des Kerns im Sinne von Modell I erhalten wir aus (17) durch sukzessive Summation der τ , was (3) liefert, denn die Ablösungsenergien (17) sind die partiellen Ableitungen von B nach N und Z .

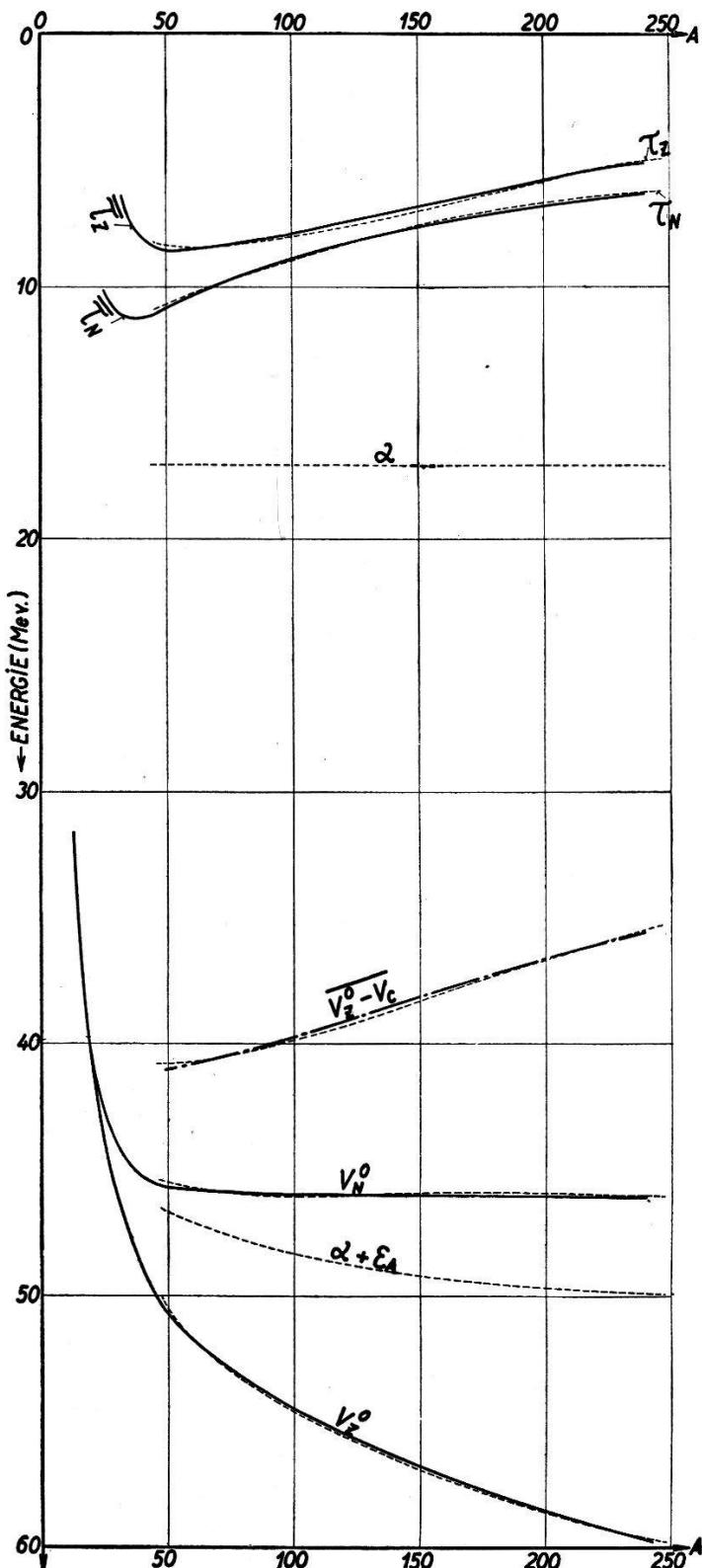
Wir bestimmen jetzt die Konstanten α , β , γ in (3). Dies tun wir so, dass die *halbempirischen Ausdrücke* (16) für V_N^0 , V_Z^0 und (17) für τ_Z , τ_Z die *aus dem Schalenmodell berechneten Potentialtiefen** und die *empirischen mittleren Ablösungsenergien* $\bar{\tau}_N$, $\bar{\tau}_Z$ für alle A so gut wie möglich wiedergeben. (α ist hier auch aus den empirischen Ablösungsenergien neu bestimmt.) Die empirischen mittleren Ablösungsenergien $\bar{\tau}$ sind Mittelwerte (über das ganze periodische System) der Kurvenstücke \bar{K}_{jP} (Fig. 1) die die Grundzustände der Kerne enthalten. $\bar{\tau}_N$ ist der Mittelwert der Zackenlinie in (I) Fig. 5, oberer Teil. Die Konstante δ folgt schon aus dem empirischen Wert von R_0 (8) allein. Fig. 4 skizziert die Methode und Fig. 5 gibt die Resultate der Anpassung**. Dabei werden für jeden A -Wert die mittleren Neutronen und Protonenzahlen benutzt (durch die Verteilungslinie $\bar{N}(Z)$ Fig. 1 der stabilen Kerne gegeben). Fig. 5 liefert dann die Zahlenwerte für die Konstanten:

$$\alpha = 17,1 \text{ MeV} \quad \beta = 26,9 \text{ MeV} \quad \gamma = 21,7 \text{ MeV} \quad \delta = 0,80 \text{ MeV} \quad (3')$$

Die ausgezeichnete Übereinstimmung des empirischen Wertes von α (Formel (3')) mit dem theoretischen α (Formel (12)) liefert die Berechtigung unserer Annahme über den Radius des symmetrischen Kernes. Die Grösse c (15) wächst sehr langsam mit A ($A = 50 : c = 0,72$, $A = 240 : c = 0,81$) was durch die langsame Abnahme der empirischen mittleren Ablösungsenergien $\bar{\tau}$ für wachsende A -Werte bedingt wird. Wegen der endlichen Neigung der Topfwände folgt daraus eine mit A etwas stärkere

*) Die Berechnung der Energieniveaus mit schiefwandigen Potentialtöpfen und auf Grund der letzten Hofstädterschen Messungen wurde von Herrn A. SCHRÖDER durchgeführt.

**) Die Anpassung darf nicht für $A < 50$ fortgesetzt werden, weil dann $\bar{\tau}_N(A)$, $\bar{\tau}_Z(A)$, nicht mehr die mittleren Ablösungsenergien der mittleren Kerne $\bar{N}(Z)$ darstellt.



Bezieht sich auf die durch $\bar{N}(Z)$ (Fig. 1) gegebenen idealen mittleren Kerne. Gleiche Bezeichnung wie in Fig. 4.

Fette Kurven: $\bar{\tau}_N$, $\bar{\tau}_Z$ = mittlere empirische Ablösungsenergie eines Neutrons bzw. Protons als Funktion von A . (Mittelwert über das ganze periodische System des Bogenstückes der Linien $\bar{K}_j P$ das die Kerngrundzustände enthält.) V_N^0 , V_Z^0 : die aus Topfradius, Neigung der Topfwände und mittlerer empirischer Ablösungsenergie $\bar{\tau}_N$ bzw. $\bar{\tau}_Z$ im Rahmen des Schalenmodells gerechneten Potentialtiefen. Die V_N^0 der leichten Kerne: C^{13} , O^{17} (in I, Fig. 9, angegeben) sind hier verwendet, um die Topftiefen V^0 im Gebiet $A < 40$ zu interpolieren.

Gestrichelte Kurven: entsprechende Linien gerechnet nach (17) (τ) und (16) (V^0).

Fig. 5.

Die Bestimmung der Konstanten α , β , γ der Bindungsenergieformel (3) durch Anpassung der berechneten Topfpotentiale über das ganze periodische System.

Zunahme des Radius \bar{R}_{Topf} (15) des Vergleichspotentials (das in (7) ein-geht) als es das $A^{1/3}$ -Gesetz gibt. (Bringt eine Korrektur 2. Ordnung der kinetischen Grenzenergie mit sich.) Wenn wir für c einen Mittelwert für alle A gewählt hätten, würden die gerechneten Kurven V_N^0 , V_Z^0 (Fig. 5 gestrichelte Linien) etwas schief zu den empirischen Daten V^0 (Fig. 5 fette Linien) liegen, was die Bestimmung der Konstanten β erschweren würde.

Der Verlauf der $\bar{\tau}$ und V^0 gemäss Schalenmodell, ist recht gut wieder-gegeben, wenn man bedenkt, dass die Ausdrücke (16), (17) nur eine erste Näherung darstellen. Der Faktor $(\beta - \varepsilon_A/3)$ von T_{1N} , $T_{1Z}(16')$ ist wesent-lich für die Anpassung an die Topfböden für Protonen und Neutronen. In I wurde erwähnt, dass $V_N^0 \approx 46$ MeV praktisch für alle $A > 50$. Fig. 5 zeigt, dass diese Konstanz ein Zufall ist und von einer näherungs-weisen Kompensation der Zunahme von $(\alpha + \varepsilon_A)$ und T_2 und von T_{1N} herröhrt.

Die Konstanten α , β , γ der Bindungsenergieformel (3) beziehen sich bis jetzt nur auf die Ablösungsenergie der mittleren stabilen Kerne. Jedoch erwarten wir, dass die berechneten Ablösungsenergien τ mit den obigen Konstanten auch die wirkliche Ablösungsenergie *aller* möglichen Kerne approximieren, denn das verwendete Kernmodell sollte auch aus-serhalb des Energietals gültig sein. In der Tat, tragen wir die τ_N bzw. τ_Z (Formel 4) als Funktion von N bzw. Z auf, so erhalten wir für A -Werte > 30 Kurven, die in sehr befriedigender Weise mit den Mittel-werten \bar{K}_Z bzw. \bar{K}_N der Kurven K_{ZjP} bzw. K_{NjP} übereinstimmen (\bar{K}_N entspricht τ_Z) (Mittelwerte über j^P). Fig. 2 zeigt zwei solche Mittelwert-kurven für die Isotopenfolge $Z = 26$ und 40 (gestrichelte Kurven, mit W bezeichnet). Dies liefert eine strenge Prüfung des Wertes von β , denn das entsprechende Glied in (4) gibt im wesentlichen allein die Neigung der \bar{K}_Z . Der angegebene Wert von $\beta(3')$ liefert also tatsächlich die rich-tige Form der Kurven \bar{K}_Z .

Das allgemeine Verhalten der mittleren Ablösungsenergie eines Nu-kleons lässt sich also gut im Rahmen des Schalenmodells interpretieren. Damit geben auch die Formeln (16) eine Abschätzung der Grösse V_N^0 bzw. V_Z^0 des wahren Potentials für *alle* möglichen Kerne.

§ 4. Der Radius der Kerne

Zum Schluss wollen wir noch kurz die Kernradien im Zusammenhang mit dem Schalenmodell betrachten.

Bis jetzt haben wir immer für den Radius der Materie eine reine $A^{1/3}$ -Abhängigkeit, oder für den Potentialtopf $R_K = R_0 A^{1/3} + \text{const.}$ ange-nommen. Es scheint jedoch, dass eine solche Abhängigkeit nur für den

symmetrischen Kern gültig sein kann, denn nur in diesem idealen Fall sind die Kernkräfte von A unabhängig, was wegen der Selbst-Konsistenz eine streng konstante Materiedichte bedeutet. Die letzten Resultate HOFSTÄDTERS⁵⁾ scheinen auch in diesem Sinne zu sprechen: R könnte etwas schneller als $A^{1/3}$ wachsen: Für $40 \leq A \leq 122$ streut R_{el} um $1,07 A^{1/3}$. Aber für grössere Kerne Au^{197} , Bi^{209} scheint R_0 systematisch grösser als 1,07 zu sein. Das ist der Grund warum $R_0 = 1,08$ gewählt wurde.

Das Schalenmodell gestattet heuristisch dieses Resultat abzuleiten, wenn wir für den idealen *symmetrischen* Kern die Annahme

$$R_{\text{Topf sym.}} = \text{const. } A^{1/3}$$

machen. Sind die beiden Potentialtöpfe $V_N(r)$, $V_Z(r)$ verschieden tief, so fallen sicher die beiden Topfwände nicht zusammen (Fig. 4, rechts), so dass die Ausdehnung der entsprechenden Nukleonewolken verschieden sind. R_{Materie} wird, ähnlich wie im Falle der Bindungsenergie, durch eine Entwicklung gegeben

$$\begin{aligned} R_{\text{Materie}} &\simeq R_0 A^{1/3} \left[1 + \text{const.} (V_N^0 - V_Z^0) \cdot \frac{N-Z}{A} + \dots \right] \\ &\sim R_0 A^{1/3} \left[1 + \text{const.} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Im Gegensatz zu (14) kommt in der zweiten Näherung $(N-Z)/A$ vor, während bei der gesamten Bindungsenergie $(N-Z)$ direkt auftritt. Diese erste Korrektur ist schon recht klein. (Natürlich spielt diese Korrektur von R_{Materie} bei der Bindungsenergie keine Rolle mehr.) Ein identischer Ausdruck (mit const = 0,66) wurde schon von BETHE und BACHER⁹⁾ abgeleitet aus der Bestimmung des Extremums der Bindungsenergie der Kerne im statistischen Modell.

Dem Forschungsrat des Schweizerischen Nationalfonds möchte ich an dieser Stelle meinen besten Dank für die Gewährung eines Forschungsstipendiums aussprechen. Den Herren Professoren Dr. W. HEITLER und K. BLEULER möchte ich für wertvolle Diskussionen recht herzlich danken. Herrn A. SCHRÖDER bin ich für seine neue Bestimmung der Topfdaten zu grossem Dank verpflichtet.

Literatur

- 1) BLEULER, K., and TERRAUX, Ch., Helv. Phys. Acta 30, 183 (1957). Hier mit I bezeichnet.
- 2) WAPSTRA, A. H., Physica 21, 367, 385 (1955).
- 3) HUIZENGA, J. R., Physica 21, 410 (1955).
- 4) KATHERINE WAY *et al.*, Nuclear Data.
- 5) HAHN, B., RAVENHALL, D. G., and HOFSTÄDTER, R., Phys. Rev. 101, 1131 (1956); HOFSTÄDTER, R., Rev. Mod. Phys. 28, 214 (1956).
- 6) BLEULER, K., und TERREAUX, Ch., Helv. Phys. Acta 28, 245 (1955).
- 7) v. WEIZSÄCKER, C. F., Z. Phys. 96, 431 (1935).
- 8) BETHE, H. A., and BACHER, R. F., Rev. Mod. Phys. 8, 82 (1936). Speziell Formel (180), p. 164.
- 9) BETHE, H. A., and BACHER, R. F., ibid. Speziell Formel (167), p. 160.