

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 30 (1957)

Heft: V

Artikel: Limite non-relativiste d'une équation de Bethe-Salpeter

Autor: Wanders, G.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112825>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Limite non-relativiste d'une équation de Bethe-Salpeter*))**

par **G. Wanders.**

Institut de Physique de l'Université, Genève (Suisse).

(5. VI. 1957.)

Summary. A bound state of two scalar particles with mass m is described relativistically by a wave function $\Phi(x_1, x_2)$, which is a solution of a Bethe-Salpeter equation. WICK and CUTKOSKY were able to discuss the "ladder approximation" of this equation quite completely, in the special case of scalar photons as binding particles. This article presents an extension of their results to the case of a binding due to scalar mesons, with nonvanishing mass μ . The wave function of an S -state has a two-parameter integral representation, the Bethe-Salpeter equation being equivalent to an integral equation for the weight function of this representation. In spite of the intricate structure of this equation, it is possible to investigate its nonrelativistic, or static limit, where the bound particles become infinitely heavy ($m \rightarrow \infty$). In this limit, the set of eigenvalues of the Bethe-Salpeter equation corresponding to the value $\varkappa = 0$ of the new quantum number \varkappa is identical with the spectrum of the Schroedinger equation with a Yukawa potential. These results are the natural generalization of those obtained by WICK and CUTKOSKY. Moreover, the limit of the wave function $\Phi(x_1, x_2)$ is identical, in the plane $t_1 = t_2 = t$ with the corresponding ordinary Schroedinger wave function.

1. Introduction.

Les bases d'une description relativiste des états liés ont été formulées en premier par BETHE et SALPETER¹⁾ et GELL-MAN et Low²⁾. Un état lié de deux particules est décrit par une amplitude $\Phi(x_1, x_2)$, qui est l'élément de matrice entre le vecteur d'état $|\alpha\rangle$ du système considéré et le vide $|0\rangle$ d'un produit chronologique:

$$\Phi(x_1, x_2) = \langle 0 | T[\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_2)] | \alpha \rangle. \quad (1.1)$$

$\Psi_1(x)$ et $\Psi_2(x)$ étant les opérateurs des champs quantifiés associés aux particules liées. Opérateurs et vecteurs d'état sont exprimés en représentation de HEISENBERG (x_1 et x_2 sont deux points de

*) Recherche subventionnée par la Commission Suisse de l'Energie Atomique (C.S.A.).

) Ce travail constitue une thèse présentée à l'Université de Lausanne, le 28 mai 1957, pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences. Un rapport préliminaire a été publié dans Phys. Rev. **104, 1782 (1956).

l'espace-temps: $x_i = (\vec{x}_i, t_i)$). L'amplitude $\Phi(x_1, x_2)$ est solution d'une équation intégrale homogène, dite *équation de BETHE-SALPETER*:

$$\Phi(x_1, x_2) = \int (dx_3)^4 \dots (dx_6)^4 D'_c(x_1 - x_3) D'_c(x_2 - x_4) I(x_3, x_4; x_5, x_6) \Phi(x_5, x_6). \quad (1.2)$$

D'_c et D'_c sont les propagateurs effectifs, invariants et causaux des particules liées, I est un noyau, également invariant et causal, caractérisant leur interaction.

Il n'existe aucun modèle de théorie relativiste pour lequel on connaisse une expression fermée de ce noyau d'interaction. Il est toujours défini par une série de puissances d'une constante de couplage, que l'on ne sait pas sommer et dont la convergence est d'ailleurs douteuse. On est donc contraint, dans toute discussion concrète de (1.2), de remplacer I par un ou plusieurs termes de son développement. Du point de vue théorique, il est alors bon de chercher à ne pas faire d'autres approximations, c'est-à-dire de discuter *rigoureusement* l'équation (1.2) avec une forme *approchée* du noyau d'interaction, afin d'établir les propriétés exactes d'un certain type d'interaction relativiste. Les premières recherches positives dans ce sens sont dues à GOLDSTEIN³⁾ et à WICK⁴⁾ et CUTKOSKY⁵⁾.

Ces derniers auteurs discutent essentiellement le cas d'une théorie purement scalaire, où les particules liées sont des particules de spin 0 et de masse m , que nous appellerons «nucléons», et où la liaison est due à des «mésons» de spin 0 et de masse μ , couplés scalairement avec les nucléons. Ils considèrent la *ladder approximation* de l'équation de BETHE-SALPETER correspondante, dans laquelle I est remplacé par le premier terme de son développement:

$$I(x_3, x_4; x_5, x_6) = -(2\pi)^{-4} \frac{i\lambda}{\pi^2} \delta(x_3 - x_5) \delta(x_4 - x_6) D_\mu^c(x_5 - x_6), \quad (1.3a)$$

et les propagateurs effectifs sont remplacés par les propagateurs des particules libres:

$$D'_c(x) = D_2^c(x) \longrightarrow D_m^c(x) *). \quad (1.3b)$$

On voit, d'après (1.1), que si l'état lié est un état-propre de l'énergie et de l'impulsion, correspondant au quadrivecteur-propre $P = (\vec{P}, E)$, l'amplitude $\Phi(x_1, x_2)$ a la forme:

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x) e^{i(P, X) **}; \quad X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad x = x_1 - x_2. \quad (1.4)$$

*) On a: $D_m^c(x) = (2\pi)^{-4} \int (dp)^4 (p^2 + m^2 - i\varepsilon)^{-1} \exp[i(p, x)]$. $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit, assure la causalité du propagateur.

**) Nous utilisons la métrique indéfinie $(1, 1, 1, -1)$; le produit scalaire (a, b) de deux quadrivecteurs a et b vaut donc: $(a, b) = a_\alpha b^\alpha = (\vec{a}, \vec{b}) - a_4 b_4$.

En particulier, si nous choisissons comme référentiel le système de repos de l'état lié, il vient: $P = (O, E)$ avec $E = 2m - B$, $B > 0$ étant l'énergie de liaison.

(1.2) et (1.3) donnent alors une équation pour $\varphi(x)$ qui s'écrit, dans l'espace de Fourier:

$$\varphi(p) = \lambda F^{-1}(p) \Im \varphi(p) \quad (1.5)$$

avec:

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-2} \int (dp)^4 \varphi(p) e^{i(p, x)}, \quad (1.6)$$

$$F(p) = \left[\left(\frac{1}{2}P + p \right)^2 + m^2 \right] \left[\left(\frac{1}{2}P - p \right)^2 + m^2 \right] \quad (1.7)$$

et:

$$\Im \varphi(p) = -\frac{i}{\pi^2} \int (dk)^4 [(p-k)^2 + \mu^2]^{-1} \varphi(k). \quad (1.8)$$

Dans ces équations, nous avons écrit m^2 et μ^2 pour $m^2 - i\varepsilon$ et $\mu^2 - i\varepsilon$.

A l'aide d'une méthode de prolongement analytique, WICK⁴⁾ a pu prouver que l'équation (1.5) possède un système complet de solutions. De plus, WICK⁴⁾ et CUTKOSKY⁵⁾ ont montré que dans le cas $\mu = 0$ (couplage par *photons scalaires*), les solutions de (1.5) possèdent des représentations intégrales à un paramètre (voir équation (3.5) du présent travail), l'équation de Bethe-Salpeter étant équivalente à un système d'équations intégrales en les fonctions-poids de ces représentations. Les résultats essentiels de la discussion de ce système sont:

a) les valeurs propres λ^*) sont caractérisées par *quatre nombres quantiques*, les nombres quantiques usuels n , l et m , et un nouveau nombre quantique \varkappa ($\varkappa = 0, 1, 2, \dots$).

b) Dans la limite non-relativiste ($B \rightarrow 0$), les valeurs-propres $\lambda_{0,n,l,m}$ correspondant à $\varkappa = 0$ sont *identiques* à celles que donne l'équation de Schroedinger (spectre de Balmer). Il semble d'autre part établi⁴⁾⁵⁾⁵⁾⁷⁾ que les valeurs-propres correspondant à $\varkappa \geq 1$ convergent toutes vers une même valeur finie dans la limite $B \rightarrow 0$.

Le but du présent travail est de montrer que des résultats analogues sont valables dans le cas général $\mu \neq 0$. Nous ne considérons que les états S ($l = m = 0$), pour lesquels la fonction $\varphi(p)$ est à symétrie sphérique dans l'espace tridimensionnel du vecteur \vec{p} ($p = (\vec{p}, \omega)$): $\varphi(p) = \varphi(|\vec{p}|, \omega)$, ce qui simplifie notablement les calculs sans restreindre l'intérêt des résultats. Nous montrons au § 2 que

⁴⁾) L'énergie de liaison B intervenant de manière compliquée dans l'équation de Bethe-Salpeter, il convient de considérer B comme fixé et λ comme paramètre variable dont il s'agit de trouver les valeurs-propres.

toute amplitude $\varphi(p)$, décrivant un état S , possède une représentation intégrale (2.1) à deux paramètres et que l'équation de Bethe-Salpeter (1.5) est équivalente à une équation intégrale en la fonction-poids $g(u, M^2)$ de cette représentation, (2.18). Le problème de Bethe-Salpeter est ainsi réduit à la discussion de cette équation.

Le fait que (2.18) est équivalente, dans la limite $\mu = 0$, au système de Wick et Cutkosky (voir § 3), montre que les valeurs-propres du problème général sont aussi caractérisées par deux nombres quantiques: le nombre quantique radial n et le nouveau nombre quantique \varkappa . Il semble ainsi que l'apparition d'un nouveau nombre quantique soit une caractéristique générale de la «ladder approximation» de l'équation de Bethe-Salpeter.

La complexité de l'équation intégrale (2.18) est telle qu'il ne semble guère possible d'en trouver des solutions, même approchées, pour des valeurs arbitraires des paramètres qui y interviennent. D'autre part, il ne nous a pas été possible de construire une équation simple, que l'on sait résoudre, et qui possède les caractéristiques essentielles de l'équation étudiée, de telle sorte qu'elle puisse en servir de modèle.

Toutefois, un certain changement de variable (2.21) donne à l'équation intégrale une forme (2.23) telle qu'il devient possible d'en discuter la limite non-relativiste, ou statique (limite dans laquelle les nucléons deviennent infiniment lourds, $m \rightarrow \infty$, l'énergie de liaison tend vers zéro, $B \rightarrow 0$, de telle façon que (mB) reste fini). En particulier, on peut construire une équation intégrale à une variable (4.24) exprimant le problème-limite pour une classe «régulième» de fonctions-propres, correspondant à $\varkappa = 0$. (Voir § 4 et § 5.) D'autre part, il est possible de transformer l'équation de Schrödinger avec potentiel de Yukawa en une forme équivalente qui se trouve être *identique* à (4.24) (§ 6). Nous avons ainsi établi qu'une classe de valeurs-propres de l'équation de Bethe-Salpeter est identique, dans la limite non-relativiste, au spectre de valeurs-propres de l'équation de Schrödinger correspondante.

Ceci prouve que pour la classe correspondante de fonctions-propres, le potentiel de Yukawa est équivalent, dans la limite statique, à l'interaction relativiste de la «ladder approximation». Ce résultat confirme les conclusions de certains arguments qualitatifs, dans lesquels on néglige les effets de retard contenus dans l'interaction relativiste¹⁾, et qui ont servi de point de départ pour une méthode de résolution approximative du problème de Bethe-Salpeter⁸⁾.

La forme que nous avons donné au problème de Bethe-Salpeter permet aussi, en principe, une détermination approchée des correc-

tions relativistes aux valeurs propres, basée sur un développement de la fonction-poids $g(u, z)$, solution de (2.23), autour d'une solution de l'équation-limite (4.24). Cependant, celà nécessite des calculs laborieux, et le caractère académique d'un modèle purement scalaire restreint l'intérêt du résultat. Aussi n'avons-nous pas cherché à traiter ce problème.

Le théorème d'existence des solutions de l'équation de Bethe-Salpeter dans le cas de nucléons de spin 1/2 n'ayant pu être établi⁴⁾, une étude minutieuse de la structure mathématique du problème est nécessaire⁹⁾, avant qu'on puisse tenter d'étendre à ce cas les méthodes utilisées ici.

2. La représentation intégrale.

Nous nous proposons de démontrer qu'une solution $\varphi(p)$ à symétrie sphérique (état S) de l'équation de Bethe-Salpeter (1.5) possède la représentation intégrale suivante:

$$\varphi(p) = \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 g(\bar{u}, \bar{M}^2) [p^2 + \bar{u}(p, P) + \bar{M}^2 + \varrho^2]^{-3} \quad (2.1)$$

avec $\varrho^2 = m^2 - \frac{1}{4} E^2 > 0$.

Pour le prouver, nous introduisons (2.1) dans l'équation de Bethe-Salpeter (1.5) et montrons que cette équation est identiquement vérifiée si la fonction-poids $g(u, M^2)$ satisfait une certaine équation intégrale. La méthode adoptée consiste à transformer, après substitution, le second membre de (1.5) jusqu'à obtenir une expression de même structure que le second membre de (2.1). Au cours de ces transformations, nous faisons un usage répété des représentations de Feynman :

$$\begin{aligned} a^{-(n+1)} b^{-(m+1)} &= \frac{(n+m+1)!}{n! m!} \int_0^1 dx \frac{x^n (1-x)^m}{[ax+b(1-x)]^{n+m+2}} \\ &= \frac{(n+m+1)!}{n! m!} 2 \int_{-1}^{+1} dy \frac{(1+y)^n (1-y)^m}{[(a+b)+(a-b)y]^{n+m+2}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ainsi, avec $a = k^2 + \bar{u}(k, P) + \bar{M}^2 + \varrho^2$, $b = (k - p)^2 + \mu^2$, $n = 2$, $m = 0$, (2.2) donne :

$$\begin{aligned} \Im \varphi(p) &= -\frac{3i}{\pi^2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 g(\bar{u}, \bar{M}^2) \int_0^1 dx \int (dk)^4 \\ &\quad x^2 [k'^2 + x(1-x) Q(p)]^{-4} \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec:

$$Q(p) = p^2 + \bar{u}(p, P) + \frac{1}{1-x} (\bar{M}^2 + \varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2) + \frac{1}{x} \mu^2 - \eta^2 \bar{u}^2 \quad (2.4)$$

et:

$$k' = k + x \bar{u} \frac{1}{2} P - (1-x)p. \quad (2.5)$$

On a posé en (2.4) $\eta^2 = 1/4 E^2$. Après le changement de variables $k \rightarrow k'$, l'intégration sur k' en (2.3) est aisée et donne*):

$$\Im \varphi(p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 g(\bar{u}, \bar{M}^2) \int_0^1 dx [(1-x)Q(p)]^{-2}. \quad (2.6)$$

Il reste à multiplier $\Im \varphi(p)$ par $F^{-1}(p)$. On transforme d'abord $F^{-1}(p)$ à l'aide de (2.2):

$$F^{-1}(p) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} dy [p^2 + y(p, P) + \varrho^2]^{-2}, \quad (2.7)$$

et l'on rend compact les dénominateurs de $F^{-1}(p)$ et de $\Im \varphi(p)$ au moyen d'une dernière transformation de Feynman (2.2). On obtient:

$$F^{-1}(p) \Im \varphi(p) = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 g(\bar{u}, \bar{M}^2) \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_{-1}^{+1} dy \frac{z(1-z)}{(1-x)^2} [p^2 + u(p, P) + M^2 + \varrho^2]^{-4}, \quad (2.8)$$

avec:

$$u = \bar{u}z + y(1-z) \quad \text{et} \quad M^2 = zD(\bar{u}, \bar{M}^2, x);$$

$$D(\bar{u}, \bar{M}^2, x) = \frac{1}{1-x} \bar{M}^2 + \frac{1}{x} \mu^2 + \frac{x}{1-x} (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2) \quad (2.9)$$

Il convient maintenant d'effectuer une suite de changements de variables tels que u et M^2 deviennent variables d'intégration. Un premier changement de variable élimine y au profit de u . Après permutation de l'ordre des intégrations sur u et z , les limites d'intégration pour u deviennent -1 et $+1$, alors que l'intégrale en z s'étend à l'intervalle $(0, R(u, \bar{u}))$, avec:

$$R(u, \bar{u}) = \frac{1 \mp u}{1 \mp \bar{u}} \quad \text{pour} \quad u \gtrless \bar{u}. \quad (2.10)$$

*) On a de façon générale:

$\int (dk)^4 (k^2 + A)^{-n} = i\pi^2 [(n-1)(n-2)]^{-1} A^{-n+2}$,
pour $n \geq 3$.

Un second changement de variable éliminant z au profit de M^2 donne:

$$F^{-1}(p) \Im \varphi(p) = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 g(\bar{u}, \bar{M}^2) \int_{-1}^{+1} du \int_0^1 dx \int_0^{M_1^2} dM^2 M^2 \\ [(1-x) D(\bar{u}, \bar{M}^2, x)]^{-2} [p^2 + u(p, P) + M^2 + \varrho^2]^{-4} \quad (2.11)$$

où la limite d'intégration M_1^2 est donnée par:

$$M_1^2(\bar{u}, \bar{M}^2, u, x) = D(\bar{u}, \bar{M}^2, x) R(u, \bar{u}) \quad (2.12)$$

Avant de permuter l'ordre des intégrations sur M^2 et x , il est commode d'écrire l'intégrale sur M^2 comme une différence de deux intégrales:

$$\int_0^{M_1^2} dM^2 \dots = \int_0^\infty dM^2 \dots - \int_{M_1^2}^\infty dM^2 \dots$$

Après avoir effectué la permutation indiquée, on obtient:

$$F^{-1}(p) \Im \varphi(p) = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 g(\bar{u}, \bar{M}^2) \int_{-1}^{+1} du \left\{ \int_0^\infty dM^2 (M^2 L_1(\bar{u}, \bar{M}^2) - \right. \\ \left. - \Theta(M^2 - M_2^2) M^2 L_2(u, M^2; \bar{u}, \bar{M}^2)) [p^2 + u(p, P) + M^2 + \varrho^2]^{-4} \right\}. \quad (2.13)$$

Les noyaux L_1 et L_2 sont définis par:

$$L_i = \int_{a_i}^{b_i} dx [(1-x) D(\bar{u}, \bar{M}^2, x)]^{-2} \quad (2.14)$$

avec:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad (2.15a)$$

a_2 et b_2 étant les deux racines de l'équation en x :

$$M_1^2(\bar{u}, \bar{M}^2, u, x) = M^2 \quad (2.15b)$$

$M_2^2(\bar{u}, \bar{M}^2, u)$ est le minimum de $M_1^2(\bar{u}, \bar{M}^2, u, x)$ par rapport à x (valeur de M^2 pour laquelle $a_2 = b_2$). $\Theta(z)$ est la fonction-seuil usuelle: $\Theta(z) = 0$ pour $z < 0$ et $\Theta(z) = 1$ pour $z > 0$.

On donne à (2.13) la structure de (2.1) en deux étapes, qui ont pour but: 1^o, d'abaisser la puissance du dénominateur de 4 à 3, et, 2^o, de placer les intégrales sur u et M^2 à gauche de celles sur \bar{u} et \bar{M}^2 . La première étape se réalise par une intégration par parties sur

M^2 . Les parties intégrées sont nulles (celle du second terme parce que $L_2(u, M_2^2; \bar{u}, \bar{M}^2) = 0$). Il reste :

$$\begin{aligned} F^{-1}(p) \Im \varphi(p) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 g(u, \bar{M}^2) \int_{-1}^{+1} du \int_0^\infty dM^2 \times \\ &\times \left(L_1(\bar{u}, \bar{M}^2) - \Theta(M^2 - M_2^2) \frac{\partial}{\partial M^2} (M^2 L_2(u, M^2; \bar{u}, \bar{M}^2)) \right) \times \\ &\times [p^2 + u(p, P + M^2 + \varrho^2)]^{-3}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Après permutation de l'ordre des intégrations sur (u, M^2) et (\bar{u}, \bar{M}^2) , on obtient une expression de la forme :

$$F^{-1}(p) \Im \varphi(p) = \int_{-1}^{+1} du \int_0^\infty dM^2 \Im[u, M^2, g(\)] [p^2 + u(p, P) + M^2 + \varrho^2]^{-3}. \quad (2.17)$$

(2.17) est de même structure que (2.1) et l'on voit que l'équation de Bethe-Salpeter (1.5) est vérifiée si :

$$\begin{aligned} g(u, M^2) &= \lambda \Im[u, M^2, g(\)] \equiv \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{M}^2 L_1(\bar{u}, \bar{M}^2) g(\bar{u}, \bar{M}^2) - \\ &- \frac{\lambda}{2} \Theta(M^2 - M_0^2) \int_{\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{M}^2)} \int d\bar{u} d\bar{M}^2 \frac{\partial}{\partial M^2} (M^2 L_2(u, M^2; \bar{u}, \bar{M}^2)) g(\bar{u}, \bar{M}^2), \end{aligned} \quad (2.18)$$

où :

$$\begin{aligned} M_0^2(u) &= \chi^2(1 - |u|) \\ \chi^2 &= \frac{\eta^2}{m^2} \left[\mu^2 + \varrho \mu \frac{1}{\eta} \sqrt{4m^2 - \mu^2} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

et $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{M}^2)$ est un domaine d'intégration du plan (\bar{u}, \bar{M}^2) défini par :

$$0 \leq \bar{M}^2 \leq \left[\left(M^2 \frac{1}{R(u, \bar{u})} + \varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \mu \right]^2 - (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2). \quad (2.20)$$

Ainsi, le problème de Bethe-Salpeter (1.5) pour des solutions $\varphi(p)$ à symétrie sphérique est réduit à l'équation intégrale (2.18) pour la fonction-poids $g(u, M^2)$.

La forme de $M_0^2(u)$, (2.19), suggère de substituer à la variable M^2 la variable z ($g(u, M^2) \rightarrow g(u, z)$) définie par :

$$M^2 = z(1 - |u|) \quad (2.21)$$

L'efficacité de ce changement de variable se confirmera par la suite ; c'est essentiellement grâce à lui que la discussion de la limite non-relativiste est pratiquement possible. Pour conclure ce paragraphe, nous reformulons le problème en termes de la variable z .

Les solutions à symétrie sphérique de l'équation de Bethe-Salpeter (1.5) possèdent la représentation :

$$\varphi(p) = \int_{-1}^{+1} du \int_0^\infty dz g(u, z) (1 - |u|) [p^2 + u(p, P) + z(1 - |u|) + \varrho^2]^{-3} \quad (2.22)$$

$g(u, z)$ étant solution de l'équation intégrale :

$$g(u, z) = \frac{\lambda}{2} \left\{ \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^\infty d\bar{z} K_1(\bar{u}, \bar{z}) g(\bar{u}, \bar{z}) - \right. \\ \left. - \Theta(z - \chi^2) \int_{\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})} d\bar{u} d\bar{z} g(\bar{u}, \bar{z}) K_2(u, z; \bar{u}, \bar{z}) \right\} \quad (2.23)$$

avec :

$$K_i = (1 - |\bar{u}|) \frac{\partial}{\partial z} \left(z L_i(u, z(1 - |u|); \bar{u}, \bar{z}(1 - |\bar{u}|)) \right). \quad (2.24)$$

Le domaine $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$ du plan (\bar{u}, \bar{z}) est défini par :

$$0 \leq z \leq \zeta(u, z; \bar{u})$$

$$\zeta(u, z; \bar{u}) = \frac{1}{1 - |\bar{u}|} \left[\left(z \frac{1 - |u|}{R(u, \bar{u})} + \varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \mu \right]^2 - (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2). \quad (2.25)$$

3. Discussion de l'équation intégrale (2.23).

Un point important a été omis au § 2 ; il s'agit, en effet, de savoir si *toutes* les solutions à symétrie sphérique de l'équation de Bethe-Salpeter peuvent être représentées selon (2.1), ou, en d'autres termes, si l'ensemble des solutions de l'équation intégrale (2.18) conduit à l'ensemble complet des fonctions $\varphi(p)$ décrivant un état S . Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer qu'il est valable pour une valeur particulière des paramètres η , ϱ et μ apparaissant dans l'équation (2.18). Nous choisissons le cas $\mu = 0$ (couplage par photons scalaires), qui est celui traité par WICK et CUTKOSKY. Il faut alors montrer que l'équation (2.18) définit un ensemble de fonctions $\varphi(p)$ identique à l'ensemble complet obtenu par CUTKOSKY⁵⁾.

Lorsque $\mu = 0$, on a $\chi^2 = 0$ (voir (2.19)), et l'intégration sur x en (2.14) est élémentaire et donne :

$$L_1(\bar{u}, \bar{M}^2) = \frac{\partial}{\partial \bar{M}^2} ((M^2 L_2(u, M^2; \bar{u}, \bar{M}^2)) = [\bar{M}^2 (\bar{M}^2 + \varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)]^{-1}. \quad (3.1)$$

(2.18) devient ainsi*) :

$$g(u, M^2) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_{\bar{M}^2 1/R}^\infty d\bar{M}^2 L_1(\bar{u}, \bar{M}^2) g(\bar{u}, \bar{M}^2). \quad (3.2)$$

*) Il se trouve que pour cette discussion particulière, il est plus commode d'utiliser la version (2.1) — (2.18) plutôt que la version équivalente (2.22) — (2.23) du problème général.

Nous montrons dans l'Appendice A que les solutions de (3.2) ont la forme:

$$g_n(u, M^2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(n-k+1)!} g_n^k(u) \delta^{(n-1-k)}(M^2), \quad (3.3)$$

les fonctions $g_n^k(u)$ étant solutions du système d'équations intégrales:

$$\begin{aligned} g_n^k(u) &= \frac{\lambda}{2} \sum_{k'=0}^k \frac{(n-k+1)!}{(n-k'+1)!} \frac{(n-k'-1)!}{(n-k-1)!} \frac{1}{(n-k)} \\ &\int_{-1}^{+1} d\bar{u} [R(u, \bar{u})]^{n-k} [\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2]^{-k+k'-1} g_n^{k'}(\bar{u}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Introduisant (3.3) dans (2.1), on obtient:

$$\varphi_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-1}^{+1} du g_n^k(u) [p^2 + u(p, P) + \varrho^2]^{-n+k-2}. \quad (3.5)$$

Or, la représentation intégrale (3.5) et le système (3.4) définissant les fonctions-poids sont *identiques*, aux notations près, à la représentation (12) et au système (14) de CUTKOSKY⁵⁾ pour $l = m = 0$. CUTKOSKY ayant montré que l'ensemble des fonctions $\varphi(p)$ ainsi défini est complet, nous sommes assuré que (2.1) et (2.18) (ou (2.22) et (2.23)) donnent toutes les solutions de l'équation de Bethe-Salpeter à symétrie sphérique dans le cas général $\mu \neq 0$.

En examinant les noyaux L_1 et L_2 pour u petit, il est possible de voir comment les solutions $g(u, M^2)$ tendent «continûment» vers la forme singulière (3.3) lorsque μ tend vers zéro. Nous n'avons toutefois pas étudié ce point en détail.

Nous passons maintenant à un examen de la structure générale de l'équation intégrale, dans sa version (2.23). Remarquons d'abord que, K_1 étant indépendant de u et de z , le premier terme du second membre est une constante. Si cette constante est non nulle, on peut normer $g(u, z)$ de telle sorte qu'elle soit égale à un. On peut alors reformuler le problème (2.23) comme suit:

$$g(u, z) = 1 - \frac{\lambda}{2} \Theta(z - \chi^2) \iint_{\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})} d\bar{u} d\bar{z} K_2(u, z; \bar{u}, \bar{z}) g(\bar{u}, \bar{z}) \quad (3.6)$$

$$1 = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} du \int_0^\infty dz K_1(u, z) g(u, z) \quad (3.7)$$

(3.6) est une équation inhomogène qui possède une solution $g(u, z, \lambda)$ pour toute valeur de λ . Introduisant cette solution dans (3.7), on obtient une équation transcendante en λ dont les racines sont les valeurs-propres du problème. Ceci suggère une méthode approximative de détermination des valeurs-propres qui consisterait dans l'introduction en (3.7) d'une solution approchée de (3.6). Cependant, la complexité du noyau K_2 et du domaine \mathfrak{D} rend pratiquement impossible la construction d'une telle solution, dont on soit sûr qu'elle ne diffère pas trop de la solution exacte.

De façon générale, la formulation (3.6)–(3.7) n'a de sens que pour les solutions $g(u, z)$ symétriques en u . K_1 étant en effet symétrique en u , le second membre de (3.7) est nul pour les solutions $g(u, z)$ impaires en u . Dans la suite, nous supposerons toujours avoir affaire à une solution $g(u, z)$ symétrique ($g(u, z) = g(-u, z)$). Du fait de la fonction $\Theta(z - \chi^2)$ apparaissant dans le second membre de (3.6), une telle solution est une constante pour $z \leq \chi^2$.

Afin d'étudier le comportement de $g(u, z)$ pour $z > \chi^2$, nous cherchons comment le second membre de (3.6) dépend de u . u apparaît dans K_2 par l'intermédiaire des limites d'intégration a_2 et b_2 en (2.14), définies par (2.15b). Cette équation s'écrit, en termes des variables z et \bar{z} :

$$\frac{1}{1-x} \bar{z} (1 - |\bar{u}|) + \frac{1}{x} \mu^2 + \frac{x}{1-x} (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2) = z \frac{1 - |u|}{R(u, \bar{u})}. \quad (3.8)$$

Cette équation montre que K_2 dépend de u uniquement par l'intermédiaire de l'expression en u et \bar{u} :

$$F(u, \bar{u}) = \frac{1 - |u|}{R(u, \bar{u})} \quad (3.9)$$

et (2.25) montre qu'il en est de même pour le domaine $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$. Supposons $u > 0$, alors :

$$F(u, \bar{u}) = \begin{cases} 1 - \bar{u} & \text{si } \bar{u} < u \\ \frac{1-u}{1+u} (1+\bar{u}) & \text{si } \bar{u} > u, \end{cases}$$

c'est-à-dire : $F(u, \bar{u})$ est indépendante de u si $\bar{u} < u$. Il s'ensuit que si $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$ est tel que l'intégration dans le plan (\bar{u}, \bar{z}) s'étende à des valeurs de \bar{u} toutes inférieures à u , le second membre de (3.6) ne dépend pas de u ; autrement dit, $g(u, z)$ est indépendante de u . Par raison de symétrie, un résultat analogue est valable pour $u < 0$; $F(u, \bar{u}) = 1 + \bar{u}$, indépendante de u pour $\bar{u} > u$, et $g(u, z)$ indépendante de u si l'intégration s'étende à des valeurs de \bar{u} toutes

supérieures à u . Il s'agit donc de déterminer s'il existe des valeurs de u et de z telles que le domaine $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$ correspondant ait la propriété énoncée plus haut. Nous démontrons dans l'Appendice B que de telles valeurs existent effectivement, caractérisées par :

$$\begin{aligned}\chi^2 \leq z \leq \chi^2 \frac{1+|u|}{1-|u|}, \text{ pour } u \leq u_0 = \frac{\chi^2(\chi^2 - \mu^2)}{4\eta^2\mu^2 - \chi^4}, \\ \chi^2 \leq z \leq \frac{1}{1-|u|} [\mu^2 + 2\mu(\rho^2 + \eta^2 u^2)^{\frac{1}{2}}], \text{ pour } u > u_0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

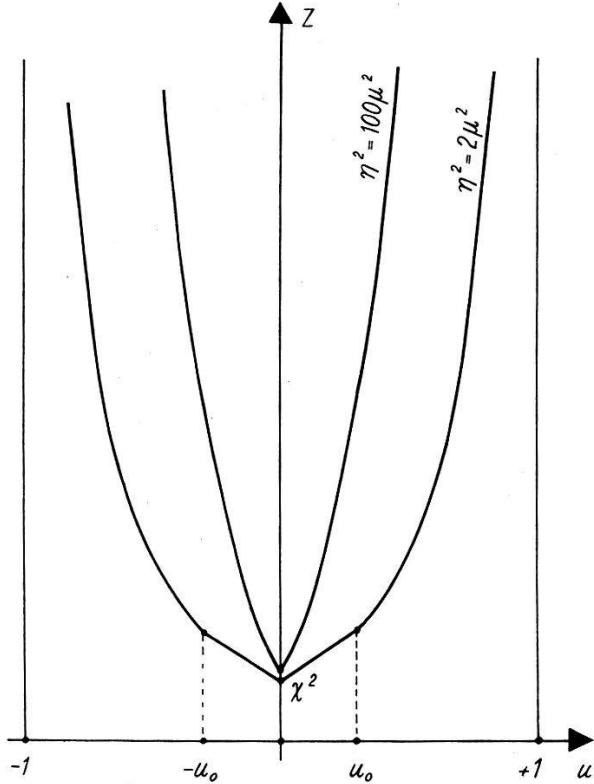


Fig. 1:

Courbes-limites du domaine d'indépendance \mathfrak{J} lorsque $\rho^2 = 1/4 \mu^2$ et dans les cas : $\eta^2 = 2 \mu^2$, et $100 \mu^2$.

Ainsi, dans le *domaine \mathfrak{J}* du plan (u, z) défini par (3.10), $g(u, z)$ est une fonction de z seulement (fig. 1). Nous nommons par conséquent \mathfrak{J} «domaine d'indépendance», et nous pouvons introduire la décomposition :

$$\begin{aligned}g(u, z) &= f(z) + h(u, z) \\ \text{avec : } h(u, z) &= 0 \text{ lorsque } (u, z) \in \mathfrak{J}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

4. La limite non-relativiste.

Nous nous proposons maintenant d'étudier la *limite non-relativiste* de l'équation intégrale (2.23). Il s'agit de la limite dans laquelle la masse m des nucléons devient arbitrairement grande ($m \rightarrow \infty$).

Nous pourrions donc aussi désigner cette limite par *limite statique*. Dans ce cas $\varrho^2 = m^2 - 1/4 E^2 \rightarrow mB$. Or, l'on sait que (mB) représente, dans le traitement de Schroedinger, l'inverse du carré du rayon de l'état lié*). Comme nous désirons étudier un système lié d'extension finie, il faut que B tende simultanément vers zéro ($B \rightarrow 0$), de telle sorte que (mB) reste fini. En termes des paramètres η , μ et ϱ , la limite non-relativiste correspond donc à un η devenant arbitrairement grand ($\eta \rightarrow \infty$), μ et ϱ restant finis, arbitraires.

Examinons la forme que prend, dans cette limite, le domaine d'indépendance \mathfrak{J} défini par (3.10). La définition (2.19) de χ^2 montre que lorsque $\eta \rightarrow \infty$,

$$\chi^2 \rightarrow \mu^2 + 2\mu\varrho, \quad (4.1)$$

de telle sorte qu'en (3.10), $u_0 \rightarrow 0$. D'autre part, la limite supérieure pour z , lorsque $u > u_0$, devient, pour η suffisamment grand, une fonction rapidement croissante de u . Il s'ensuit que si l'on définit le domaine \mathfrak{J} par l'inégalité: $|u| \geq u_1(z)$, la borne $u_1(z)$ **) tend vers zéro pour toute valeur finie de z :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} u_1(z) = 0. \quad (4.2)$$

Ainsi, le domaine d'indépendance \mathfrak{J} s'étend, à la limite, à toute la bande du plan (u, z) définie par: $|u| \leq 1$, $z \geq \mu^2 + 2\mu\varrho$, à l'exclusion du segment infini $(\mu^2 + 2\mu\varrho, \infty)$ de l'axe Oz (fig. 1). Celà signifie que la fonction $g(u, z)$ est, dans la limite $\eta \rightarrow \infty$, indépendante de u , mises à part d'éventuelles singularités en $u = 0$, c'est-à-dire, elle prend la forme:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} g(u, z) = f_0(z) + \sum_{k=0}^N h_k(z) \delta^{(2k)}(u). \quad (4.3)$$

Il est maintenant plausible d'admettre l'existence d'une classe de fonctions-propres $g(u, z)$ de (2.23) (contenant en particulier la fonction-propre de l'état fondamental) dont la limite ne présente pas de singularités en $u = 0$ ***). Avec la décomposition (3.11), ces solutions sont donc caractérisées par:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} g(u, z) = f_0(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(z); \lim_{\eta \rightarrow \infty} h(u, z) = 0. \quad (4.4)$$

*) On peut montrer d'ailleurs qu'une fonction $\varphi(x)$ dont la transformée de Fourier a la forme (2.22) (ou (2.1)), se comporte asymptotiquement, dans le plan $t = 0$, comme $1/r \exp(-\varrho r)$. Ainsi ϱ peut être interprété en toute généralité comme inverse du rayon de l'état lié.

**) La détermination de $u_1(z)$ à partir de (3.10) constitue un problème élémentaire, on obtient toutefois une expression très compliquée que nous n'indiquons pas, car elle n'intervient pas dans la suite. Elle permet de vérifier (4.2).

***) Il semble que les solutions caractérisées par un N fixe dans (4.3) correspondent à une valeur définie de \varkappa : $\varkappa = 2N$.

Pour cette classe de fonctions-propres, la discussion de la limite non-relativiste se réduit donc à la recherche et à l'étude d'une équation intégrale définissant la fonction-limite $f_0(z)$. Si la fonction $g(u, z)$ tend vers sa limite $f_0(z)$ de façon suffisamment régulière, l'on présume que l'équation en $f_0(z)$ s'obtient en substituant dans (2.23) $f_0(z)$ à $g(u, z)$, et en passant à la limite $\eta \rightarrow \infty$. Ces conjectures sont confirmées par le théorème suivant, qui constitue un résultat central de ce travail.

Théorème. Les relations (4.4) sont valables pour les solutions de (2.23) qui sont bornées dans tout le domaine de définition ($-1 \leq u \leq +1, 0 \leq z < \infty$) et pour toute valeur de η , et pour lesquelles la limite de $\lambda\pi/\eta$ est finie. L'équation intégrale pour les fonctions-limites $f_0(z)$ correspondantes s'obtient de la façon suivante; après avoir remplacé dans (2.23) $g(u, z)$ par $f_0(z)$, on effectue les intégrations sur \bar{u} dans le second membre, puis on passe à la limite $\eta \rightarrow \infty$.

Nous appellerons *classe régulière* la classe des fonctions-propres vérifiant les conditions de ce théorème.

Renvoyant la démonstration du théorème au paragraphe suivant, nous terminons le présent paragraphe par l'établissement de l'équation intégrale pour $f_0(z)$. D'après la règle énoncée plus haut, cette équation a la forme suivante:

$$f_0(z) = \sigma \left[\int_0^\infty d\bar{z} G_1(\bar{z}) f_0(\bar{z}) - \right. \\ \left. - \Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} G_2(z, \bar{z}) f_0(\bar{z}) \right]. \quad (4.5)$$

$\zeta_1(z)$ est la cote du sommet de la limite du domaine $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$, c'est donc la limite du maximum de $\zeta(u, z, \bar{u})$ (cf. (2.25)) par rapport à \bar{u} (on voit sans peine que ce maximum est indépendant de u):

$$\zeta_1(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{Max}_{\bar{u}} \zeta(u, z, \bar{u}) = \zeta(u, z, 0) = [(z + \varrho^2)^{\frac{1}{2}} - \mu]^2 - \varrho^2 \quad (4.6)$$

D'après le théorème, les noyaux G_1 et G_2 sont définis par:

$$G_1(\bar{z}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\frac{\eta}{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} K_1(\bar{u}, \bar{z}) \right] \equiv \lim_{\eta \rightarrow \infty} G_1(\bar{z}, \eta) \quad (4.7)$$

$$G_2(z, \bar{z}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[\frac{\eta}{2\pi} \int_{\Delta u} d\bar{u} K_2(u, z; \bar{u}, \bar{z}) \right] \equiv \lim_{\eta \rightarrow \infty} G_2(u, z, \bar{z}, \eta). \quad (4.8)$$

En (4.8), Δu représente l'intervalle (ou éventuellement les intervalles) que le domaine $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$ intercepte sur la droite de cote z

(fig. 2). Les limites de ces intervalles sont donc solutions de l'équation en \bar{u} :

$$\zeta(u, z, \bar{u}) = \bar{z}, \quad |\bar{u}| \ll 1. \quad (4.9)$$

Les facteurs η apparaissant dans (4.7) et (4.8) sont nécessaires, comme nous le verrons plus loin, pour que les limites envisagées soient finies. Conformément à la règle de construction de (4.5) on a alors:

$$\sigma = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \sigma(\eta); \quad \sigma(\eta) = \frac{\lambda\pi}{\eta}. \quad (4.10)$$

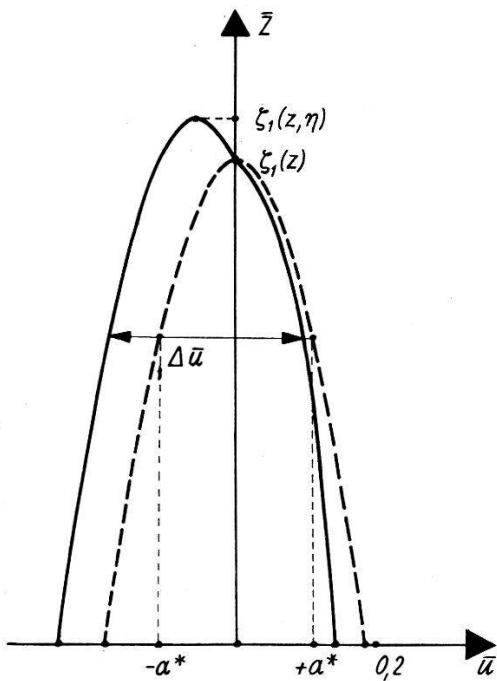


Fig. 2.

Domaines d'intégration \mathfrak{D} (trait plein) et \mathfrak{D}^* (pointillé) lorsque (u, z) se trouve dans le domaine d'indépendance \mathfrak{I} , dans le cas $\varrho^2 = 1/4 \mu^2$, $\eta^2 = 100 \mu^2$ et $z = 5 \mu^2$.

Il se trouve que les noyaux G_1 et G_2 peuvent être évalués exactement sans trop de difficultés.

Calcul de $G_1(\bar{z})$. En vertu de (4.7), (2.24), (2.14) et (2.8), on a:

avec:

$$G_1(\bar{z}, \eta) = \int_0^1 dx \int_{-1}^{+1} d\bar{u} N(\bar{z}, \bar{u}, x) \quad (4.11)$$

avec

$$N(\bar{z}, \bar{u}, x) = \frac{\eta}{2\pi} (1 - |\bar{u}|) x^2 [\bar{z}x(1 - |\bar{u}|) + \mu^2(1 - x) + (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)x^2]^{-2}.$$

Pour η suffisamment grand, le dénominateur de N est une fonction rapidement croissante de \bar{u} , de telle sorte que seules de petites valeurs de \bar{u} donnent une contribution sensible à $G_1(\bar{z}, \eta)$. Il s'ensuit

que l'on peut négliger \bar{u} dans $(1 - |\bar{u}|)$ sans altérer la limite de $G_1(\bar{z}, \eta)$ pour $\eta \rightarrow \infty$. L'intégration sur \bar{u} donne alors:

$$G_1(\bar{z}, \eta) \cong \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dx \left[\frac{x^2 \eta}{X(X + \eta^2 x^2)} + \frac{x}{X^{3/2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x \eta}{X^{1/2}} \right] \quad (4.12)$$

avec: $X = \mu^2 + (\bar{z} - \mu^2)x + \varrho^2 x^2$. Après transformation du second terme par intégration par parties, il vient:

$$\begin{aligned} G_1(\bar{z}, \eta) &\cong -\frac{1}{\pi} \frac{\bar{z} + \mu^2}{q(\bar{z} + \varrho^2)^{1/2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{(\bar{z} + \varrho^2)^{1/2}} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{1}{q} 4 \mu^2 \eta \int_0^1 dx \frac{1}{X + \eta^2 x^2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

où: $q = 4 \varrho^2 \mu^2 - (\bar{z} - \mu^2)^2$. Il est aisément d'effectuer l'intégrale restante et de passer à la limite $\eta \rightarrow \infty$. On trouve:

$$G_1(\bar{z}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} G_1(\bar{z}, \eta) = \frac{1}{2} (\bar{z} + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}} \{ [(\bar{z} + \varrho^2)^{\frac{1}{2}} + \mu]^2 - \varrho^2 \}^{-1} \quad (4.14)$$

Calcul de $G_2(z, \bar{z})$. (4.8), (2.24), (2.14) et (2.8) donnent:

$$G_2(u, z, \bar{z}, \eta) = \int_{\bar{u}}^z d\bar{u} \frac{\partial}{\partial z} \left[z \int_{a_2}^{b_2} dx N(\bar{z}, \bar{u}, x) \right] \quad (4.15)$$

Les intervalles $\Delta \bar{u}$ étant définis par (4.9) et les limites a_2 et b_2 par (2.15 b). Comme nous le montrons au § 5, la limite de $G_2(u, z, \bar{z}, \eta)$ est indépendante de u ; il est donc permis de choisir (u, z) dans le domaine d'indépendance \mathfrak{J} , avec, par exemple, $u > 0$, de telle sorte que $G_2(u, z, \bar{z}, \eta)$ soit d'emblée indépendant de u . Dans ces conditions (4.9) s'écrit:

$$z(1 - \bar{u}) + \mu^2 - 2\mu(z(1 - \bar{u}) + \varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)^{\frac{1}{2}} = \bar{z}(1 - |\bar{u}|). \quad (4.16)$$

Pour η suffisamment grand, la racine carrée est une fonction rapidement croissante de \bar{u} , de telle sorte que les solutions de cette équation en \bar{u} sont très petites. L'intégration sur \bar{u} en (4.15) s'étend donc à de petites valeurs, et l'on obtient une limite $G_2(z, \bar{z})$ correcte si l'on néglige systématiquement \bar{u} par rapport à 1. Les solutions approchées de (4.16) sont alors:

$$\bar{u} = \pm \alpha^* = \pm \frac{1}{2\mu\eta} [(z - \bar{z} + \mu^2)^2 - 4\mu^2(z + \varrho^2)]^{\frac{1}{2}} *. \quad (4.17)$$

D'autre part, (2.15) devient:

$$x\bar{z} + (1 - x)\mu^2 + x^2(\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2) = z x(1 - x), \quad (4.18)$$

) Ces solutions définissent un domaine $\mathfrak{D}^(\bar{u}, \bar{z})$, représenté avec $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$ dans la figure 2.

dont les solutions sont:

$$\frac{b_2^*}{a_2^*} \left\langle \frac{1}{2} (z + \varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)^{-1} (z - \bar{z} + \mu^2 \pm 2\mu\eta(\alpha^{*2} - \bar{u}^2)^{\frac{1}{2}}) \right\rangle. \quad (4.19)$$

Comme $a_2^* = b_2^*$ lorsque $u = \alpha^*$, on peut écrire:

$$G_2(z, \bar{z}, \eta) \cong \frac{\partial}{\partial z} \left[z \int_{-\alpha^*}^{+\alpha^*} d\bar{u} \int_{a_2^*}^{b_2^*} dx N^*(\bar{z}, \bar{u}, x) \right], \quad (4.20)$$

avec:

$$N^*(\bar{z}, \bar{u}, x) = \frac{\eta}{2\pi} x^2 [\bar{z}x + \mu^2(1-x) + (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)x^2]^{-2}.$$

Après avoir permuted l'ordre des intégrations sur \bar{u} et x , on peut évaluer cette intégrale en utilisant la technique employée pour G_1 , et l'on trouve un résultat indépendant de η^*), de telle sorte que l'on a directement la limite $G_2(z, \bar{z})$:

$$G_2(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial z} \left[z \left(G_1(\bar{z}) - \frac{1}{2z(\bar{z} + \varrho^2)^{1/2}} \right) \right]. \quad (4.21)$$

Effectuant la dérivée, nous obtenons le résultat remarquable:

$$G_2(z, \bar{z}) = G_1(\bar{z}) = G(\bar{z}) \quad (4.22)$$

qui montre, en particulier que $G_2(z, \bar{z})$ est en fait indépendant de z . L'équation (4.5) devient ainsi:

$$f_0(z) = \sigma \left[\int_0^\infty d\bar{z} G(\bar{z}) f_0(\bar{z}) - \Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_0^{\xi_1(z)} d\bar{z} G(\bar{z}) f_0(\bar{z}) \right]. \quad (4.24)$$

En résumé, nous avons établi dans ce paragraphe que la limite non-relativiste du problème de Bethe-Salpeter est exprimée, pour la classe régulière de fonctions-propres, caractérisées par (4.4), par l'équation intégrale (4.24). Nous montrerons au § 6 que cette équation intégrale est équivalente au problème de Schrödinger.

5. Démonstration du théorème.

Nous donnons maintenant une démonstration du théorème énoncé au paragraphe précédent. Nous commençons par récrire l'équation (2.23) en utilisant la décomposition (3.11) et en désignant par $K_2(z; \bar{z}, \bar{u})$ la valeur prise par $K_2(u, z; \bar{u}, \bar{z})$ lorsque (u, z) se trouve dans le domaine d'indépendance \mathfrak{J} , par exemple: $u = 1$. D'autre part, nous désignons dès maintenant le domaine $\mathfrak{D}(\bar{u}, \bar{z})$ par $\mathfrak{D}(u, z)$,

*) Ce fait nous permettra d'utiliser, au § 5, le second membre de (4.20) comme représentation de $G_2(z, \bar{z})$.

indiquant par là les paramètres dont dépend ce domaine plutôt que le plan dans lequel il est défini. Nous utiliserons aussi le symbole $\mathfrak{D}(z)$ lorsque (u, z) est dans \mathfrak{J} . Alors:

$$f(z) = \frac{\lambda}{2} \left[\int_0^\infty d\bar{z} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} K_1(\bar{u}, \bar{z}) (f(\bar{z}) + h(\bar{u}, \bar{z})) - \right. \\ \left. - \Theta(z - \chi^2) \int_{\mathfrak{D}(z)} d\bar{z} d\bar{u} K_2(z; \bar{u}, \bar{z}) (f(\bar{z}) + h(\bar{u}, \bar{z})) \right]. \quad (5.1)$$

$$h(u, z) = \frac{\lambda}{2} \Theta(z - \chi^2) \left[\int_{\mathfrak{D}(u, z)} d\bar{z} d\bar{u} K_2(u, z; \bar{u}, \bar{z}) ((f(\bar{z}) + h(\bar{u}, \bar{z}))) - \right. \\ \left. - \int_{\mathfrak{D}(z)} d\bar{z} d\bar{u} K_2(z; \bar{u}, \bar{z}) (f(\bar{z}) + h(\bar{u}, \bar{z})) \right]. \quad (5.2)$$

Utilisant (4.7), (4.8) et (4.6), (5.1) peut être mise sous la forme:

$$f(z) = \frac{\lambda\pi}{\eta} \left[\int_0^\infty d\bar{z} G_1(\bar{z}) f(\bar{z}) - \Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} G_2(z, \bar{z}) f(\bar{z}) \right. \\ \left. + A + B(z) + C + D(z) \right], \quad (5.3)$$

avec

$$A = \int_0^\infty d\bar{z} (G_1(\bar{z}, \eta) - G_1(\bar{z})) f(\bar{z}) \quad (5.4)$$

$$B(z) = -\Theta(z - \chi^2) \int_0^{\zeta_1(z, \eta)} d\bar{z} G_2(z, \bar{z}, \eta) f(\bar{z}) + \\ + \Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} G_2(z, \bar{z}) f(\bar{z}) \quad (5.5)$$

$$C = \frac{\eta}{2\pi} \int_0^\infty d\bar{z} \int_{-1}^{+1} d\bar{u} K_1(\bar{u}, \bar{z}) h(\bar{u}, \bar{z}) \quad (5.6)$$

$$D(z) = -\frac{\eta}{2\pi} \Theta(z - \chi^2) \int_{\mathfrak{D}(z)} d\bar{z} d\bar{u} K_2(z; \bar{u}, \bar{z}) h(\bar{u}, \bar{z}) \quad (5.7)$$

En (5.5), $\zeta_1(z, \eta)$ est le maximum, indépendant de u , de $\zeta(u, z, \bar{u})$ par rapport à \bar{u} ($\lim_{\eta \rightarrow \infty} \zeta_1(z, \eta) = \zeta_1(z)$).

On voit maintenant que le théorème annoncé est vrai, si $A, B(z), C, D(z)$ et $h(u, z)$, définie par (5.2), tendent vers zéro dans la limite où η devient infiniment grand, lorsque $f(z)$ et $h(u, z)$ sont bornées

dans tout le domaine de définition ($|u| \leq 1$, $0 \leq z < \infty$) et pour toute valeur de η . Nous le prouvons en montrant que dans ces conditions la valeur absolue de chacune des quantités A , $B(z)$, ... possède une borne supérieure dont la limite, lorsque η tend vers l'infini, est nulle.

a) *Borne supérieure pour $|A|$.* $f(z)$ étant bornée par hypothèse ($|f(z)| \leq \bar{f}$ pour $0 \leq z < \infty$), on a :

$$|A| \leq \bar{f} \int_0^\infty dz |G_1(z, \eta) - G_1(z)| \quad (5.8)$$

On vérifie sans difficulté que $G_1(z)$, donné par (4.14), peut être représenté par :

$$G_1(z) = 2 \int_0^1 dx \int_0^\infty du N^*(z, u, x) \quad (5.9)$$

Après introduction de (5.9) et (4.11) dans (5.8), on peut écrire :

$$\begin{aligned} |A| &< \bar{f} \int_0^\infty dz \int_0^1 dx \left[\int_{-1}^{+1} du |N(z, u, x) - N^*(z, u, x)| \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_1^\infty du N^*(z, u, x) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

On remplace $|N - N^*|$ par sa majorante ($N - N^* (1 - 2|u|)$) et l'on intègre sur z . On effectue une nouvelle majoration en remplaçant, dans les dénominateurs restant, $(\mu^2(1-x) + \varrho^2x^2)$ par son minimum β^2 dans l'intervalle $(0,1)$ ($\beta^2 = \mu^2 (1 - \mu^2/2\varrho^2)$ ou ϱ^2 , suivant que $\mu^2 \leq 2\varrho^2$ ou $\mu^2 > 2\varrho^2$). Il vient, après intégration sur u :

$$A < \bar{f} \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\eta x} \log \left(1 + \frac{\eta^2}{\beta^2} x^2 \right) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta x}{\beta} \right) \right]. \quad (5.11)$$

On trouve sans peine une majorante de cette intégrale, qui donne :

$$|A| < \bar{f} 0 \left(\frac{1}{\eta} \left(\log \frac{\eta}{\beta} \right)^2 \right). \quad (5.12)$$

La borne supérieure de $|A|$ ainsi obtenue tendant vers zéro lorsque η devient infiniment grand, on a :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} A = 0. \quad (5.13)$$

b) *Borne supérieure pour $|C|$.* Si \bar{h} est une borne supérieure de $|h(u, z)|$, on a:

$$|C| \leq \bar{h} \int_0^\infty dz G_1(z, \eta) \quad (5.14)$$

compte tenu de (4.7). Avec la représentation (4.11) de $G_1(z, \eta)$, et en utilisant les mêmes procédés qu'auparavant, on obtient:

$$|C| < \bar{h} \frac{\eta}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 du x [\beta^2 + \eta^2 u^2 x^2]^{-1} < \frac{1}{2\beta} \bar{h}. \quad (5.15)$$

Comme nous montrons sous e) que la borne \bar{h} tend vers zéro lorsque $\eta \rightarrow \infty$, on a:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} C = 0 \quad (5.16)$$

c) *Borne supérieure pour $|B(z)|$.* Nous supposons que

$$z < \mu \eta \left(\frac{\mu}{\eta} \right)^\delta \text{ avec } 0 < \delta < 1.$$

Le domaine d'intégration $\mathfrak{D}(z)$ prend alors la forme indiquée dans la fig. 2, et l'intégration sur \bar{z} s'étend à des valeurs inférieures à z ($\bar{z} \leq \zeta_1(z, \eta) < z$). La borne que nous obtiendrons pour $|B(z)|$ sera donc valable, η croissant, dans un intervalle de plus en plus étendu de la variable z : $0 \leq z < \mu \eta (\mu/\eta)^\delta \rightarrow \infty$.

Du fait des différentes limites d'intégration et des différents arguments des fonctions Θ apparaissant dans (5.5), $B(z)$ n'est pas, comme A , l'intégrale d'une différence de deux noyaux, multipliée par $f(\bar{z})$. Remarquant que $\chi^2 \leq \mu^2 + 2\mu\varrho$ et $\zeta_1(z, \eta) \geq \zeta_1(z)$, on est conduit à la décomposition suivante:

$$B(z) = B_1(z) + B_2(z) + B_3(z) \quad (5.17)$$

où $B_1(z)$ a une forme semblable à celle de A :

$$B_1(z) = \Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} (G_2(z, \bar{z}, \eta) - G_2(z, \bar{z})) f(\bar{z}), \quad (5.18)$$

et:

$$B_2(z) = \Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_{\zeta_1(z)}^{\zeta_1(z, \eta)} d\bar{z} G_2(z, \bar{z}, \eta) f(\bar{z}), \quad (5.19)$$

$$B_3(z) = \Theta(\mu^2 + 2\mu\varrho - z) \Theta(z - \chi^2) \int_0^{\zeta_1(z, \eta)} d\bar{z} G_2(z, \bar{z}, \eta) f(\bar{z}) \quad (5.20)$$

La dérivée par rapport à z intervenant dans la définition (4.15) de $G_2(z, \bar{z}, \eta)$ et la représentation (4.20) de $G_2(z, \bar{z})$ décomposent $B_1(z)$

en une somme de deux termes, $B'_1(z)$ et $B''_1(z)$, provenant, le premier de l'action de la dérivée sur le facteur z , le second de la dérivée de l'intégrale sur \bar{u} . On a pour $B'_1(z)$ l'inégalité suivante:

$$|B'_1(z)| \leq \bar{f} \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} \left| \int_{\mathfrak{S}} d\bar{u} dx N(\bar{z}, \bar{u}, x) - \int_{\mathfrak{S}^*} d\bar{u} dx N^*(\bar{z}, \bar{u}, x) \right| \quad (5.21)$$

\mathfrak{S} et \mathfrak{S}^* étant les domaines du plan (u, x) définis par:

$$\mathfrak{S} \rightarrow \bar{u} \in \Delta \bar{u}, a_2 \leq x \leq b_2; \quad \mathfrak{S}^* \rightarrow |\bar{u}| \leq \alpha^*, a_2^* \leq x \leq b_2^*,$$

ou encore, par les courbes-frontières \mathfrak{S} et \mathfrak{S}^* , d'équations:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} \rightarrow & \Gamma(\bar{u}, x) \equiv \bar{z}(1-\bar{u})x + \mu^2(1-x) + (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)x^2 \\ & - z(1-\bar{u})x(1-x) = 0 \\ \mathfrak{C}^* \rightarrow & \Gamma^*(\bar{u}, x) \equiv \Gamma(\bar{u}, x) + z x \bar{u} - z x(1-x)\bar{u} = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Un examen de (5.22) montre que \mathfrak{S}^* est entièrement contenu dans \mathfrak{S} , ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} |B'_1(z)| & < \bar{f} \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} N(\bar{z})(S - S^*) + \\ & + \bar{f} \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} \int_{\mathfrak{S}^*} d\bar{u} dx |N(\bar{z}, \bar{u}, x) - N^*(\bar{z}, \bar{u}, x)|, \end{aligned} \quad (5.23)$$

où S et S^* sont les surfaces des domaines \mathfrak{S} et \mathfrak{S}^* , et où $N(\bar{z})$ est une majorante de $N(\bar{z}, \bar{u}, x)$ dans \mathfrak{S} . Une telle majorante a la forme:

$$N(z) = \eta N[z + \gamma^2]^{-2}, \quad (5.24)$$

N étant borné pour tout η , et $\gamma^2 = \mu(2\varrho - \mu)$ ou ϱ^2 suivant que $\varrho \geq \mu$ ou $\varrho < \mu$. On a, d'autre part:

$$S - S^* = \int_{\Delta \bar{u}} d\bar{u} [b_2(\bar{u}) - a_2(\bar{u})] - \int_{-\alpha^*}^{+\alpha^*} d\bar{u} [b_2^*(\bar{u}) - a_2^*(\bar{u})]. \quad (5.25)$$

Lorsque, comme c'est le cas ici, $\bar{z} \leq \zeta_1(z)$, $\Delta \bar{u}$ est formé d'un seul intervalle (voir fig. 2), de telle sorte qu'un certain changement de variable linéaire, $\bar{u} \rightarrow r + t\bar{u}$, transforme les limites d'intégration de la première intégrale en $-\alpha^*$ et $+\alpha^*$. Alors:

$$S - S^* = \int_{-\alpha^*}^{+\alpha^*} d\bar{u} [t(b_2(r + t\bar{u}) - a_2(r + t\bar{u}))] - [(b_2^*(\bar{u}) - a_2^*(\bar{u}))]. \quad (5.26)$$

Après remplacement des différentes fonctions intervenant dans cette intégrale par leur expressions, un calcul assez laborieux donne l'estimation suivante:

$$S - S^* < 0 \left(\frac{1}{\eta^{1+\delta_1}} \right) \quad (5.27)$$

δ_1 étant le minimum de $(3\delta - 2)$ et $\delta/2$; en choisissant $\delta > 2/3$, on a $\delta_1 > 0$ (ce choix est compatible avec la restriction $0 < \delta < 1$, introduite plus haut).

On obtient une majorante du second terme de (5.23) en remplaçant $\zeta_1(z)$ par ∞ et \mathfrak{S}^* par le domaine $(0 \leq x \leq 1, -1 \leq \bar{u} \leq 1)$. L'expression ainsi obtenue est égale au premier terme de (5.10), dont une borne supérieure est déjà connue, (5.12). Ainsi, avec (5.24) et (5.27), on a :

$$|B''_1(z)| \leq \bar{f} \left[0(1/\eta^{\delta_1}) + 0\left(\frac{1}{\eta} (\log \frac{\eta}{\beta})^2\right) \right] \text{ pour } z < \mu\eta\left(\frac{\mu}{\eta}\right)^\delta, \quad (5.28)$$

l'intégration sur \bar{z} dans le premier terme de (5.23) donnant une quantité bornée, inférieure à $1/\gamma^2$.

$B''_1(z)$ est définie par :

$$B''_1(z) = z \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{\mathfrak{S}} d\bar{u} dx N(\bar{z}, \bar{u}, x) - \int_{\mathfrak{S}^*} d\bar{u} dx N^*(\bar{z}, \bar{u}, x) \right] f(\bar{z}) \quad (5.29)$$

Après avoir effectué la dérivation pour rapport à z , qui n'apparaît que dans les limites d'intégration, on obtient une différence de deux intégrales en \bar{u} que l'on estime suivant le même procédé que $(S - S^*)$, et l'on trouve :

$$B''_1(z) \leq \bar{f} 0(1/\eta^{\delta_2}) \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} [\bar{z} + \varrho^2]^{-1} \leq \bar{f} 0\left(\frac{1}{\eta^{\delta_2}} \log \frac{\eta}{\mu}\right). \quad (5.30)$$

compte tenu de (4.6) et de ce que $z < \mu\eta(\mu/\eta)^\delta$. δ_2 est le minimum de $1/2(3\delta - 2)$ et $(4\delta - 3)$; δ_2 est positif et non nul si l'on choisit $\delta > 3/4$.

L'intégrant de $B_2(z)$, (5.18), étant d'ordre zéro en η , $B_2(z)$ tend vers zéro lorsque $\eta \rightarrow \infty$, parce que le domaine d'intégration devient de plus en plus petit; en effet, et par définition : $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\zeta_1(z, \eta) - \zeta_1(z)) = 0$.

De même, $B_3(z)$, (5.19), tend vers zéro parce que, si $z \leq \mu^2 + 2\mu\varrho$:

$$\zeta_1(z, \eta) \leq \zeta_1(\mu^2 + 2\mu\varrho, \eta) \text{ et } \lim_{\eta \rightarrow \infty} \zeta_1(\mu^2 + 2\mu\varrho, \eta) = \zeta_1(\mu^2 + 2\mu\varrho) = 0$$

en vertu de (4.6). Ainsi :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} B_2(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} B_3(z) = 0 \quad (5.31)$$

Introduisant (5.28), (5.29) et (5.31) dans (5.16), nous voyons que :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} B(z) = 0 \quad (5.32)$$

pour toute valeur de z .

d) *Borne supérieure pour $|D(z)|$.* On a, avec (5.7) et (4.8):

$$|D(z)| \leq \bar{h} \Theta(z - \chi^2) \int_0^{\zeta_1(z, \eta)} d\bar{z} |G_2(z, \bar{z}, \eta)|. \quad (5.33)$$

Le résultat établi sous c) montre que si l'on remplace le second membre de cette inégalité par

$$\Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_0^{\zeta_1(z)} d\bar{z} G_2(z, \bar{z}),$$

on commet une erreur dont la limite, pour $\eta \rightarrow \infty$, est nulle. D'autre part, les expressions (4.22) et (4.14) de $G_2(z, \bar{z})$ montrent que cette intégrale est inférieure à $1/\varrho$, de telle sorte que:

$$|D(z)| < \bar{h} \frac{1}{\varrho}. \quad (5.34)$$

Tenant compte du résultat de e) déjà annoncé;

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} D(z) = 0 \quad (5.35)$$

e) *Borne supérieure pour $|h(u, z)|$.* Utilisant la définition générale (2.24) et (2.14) de $K_2(u, z, \bar{u}, \bar{z})$, (5.2) donne:

$$|h(u, z)| \leq \frac{\lambda\pi}{\eta} \bar{g} \int_0^{\zeta_1(z, \eta)} d\bar{z} \left| \frac{\partial}{\partial z} \left[z \left(\int_{\mathfrak{S}(u)} d\bar{u} dx N(\bar{z}, \bar{u}, x) - \int_{\mathfrak{S}} du dx N(z, u, x) \right) \right] \right|, \quad (5.36)$$

où \bar{g} est une borne supérieure de $g(u, z) = f(z) + h(u, z)$ ($\bar{g} \leq \bar{f} + \bar{h}$). $\mathfrak{S}(u)$ est le domaine du plan (\bar{u}, x) défini par $\bar{u} \in A\bar{u}$, $a_2 \leq x \leq b_2$, (u, z) se trouvant hors du domaine d'indépendance \mathfrak{J} . Ce domaine est limité par la courbe $\mathfrak{C}(u)$:

$$\mathfrak{C}(u) \rightarrow \Gamma(u; \bar{u}, x) \equiv \Gamma(\bar{u}, x) + z x (1 - x) (1 - \bar{u} - F(u, \bar{u})) = 0, \quad (5.37)$$

$\Gamma(\bar{u}, x)$ étant définie par (5.22), $F(u, \bar{u})$ par (3.9). Comparant (5.37) avec (5.22), on peut voir que $\mathfrak{S}(u)$ est entièrement contenu dans \mathfrak{S} , ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} |h(u, z)| &< \frac{\lambda\pi}{\eta} \bar{g} \int_0^{\zeta_1(z, \eta)} d\bar{z} \left[N(\bar{z}) (S - S(u)) + \right. \\ &\quad \left. + z \left| \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\mathfrak{S}(u)-\mathfrak{S}} d\bar{u} dx N(\bar{z}, \bar{u}, x) \right) \right| \right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

La discussion se poursuit comme celle de $B_1(z)$ sous c), et donne:

$$|h(u, z)| < \frac{\lambda\pi}{\eta} \bar{g} \left((0(1/\eta^{\delta_1}) + 0(1/\eta^{\delta_2})) \right). \quad (5.39)$$

Ainsi, si \bar{g} reste bornée pour $\eta \rightarrow \infty$, et si $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \lambda\pi/\eta = \sigma$ est finie, ce qui est admis par hypothèse:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} h(u, z) = 0. \quad (5.40)$$

Ce résultat achève la démonstration du théorème. D'autre part, (5.39) prouve le résultat utilisé au § 4, lors du calcul de $G_2(z, \bar{z})$:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} (G_2(u, z, \bar{z}, \eta) - G_2(z, \bar{z}, \eta)) = 0 \quad (5.41)$$

6. Comparaison avec l'équation de Schroedinger.

Nous nous proposons de comparer le spectre des valeurs-propres de l'équation intégrale (4.24), limite non-relativiste du problème de Bethe-Salpeter pour une certaine classe «régulière» d'états S , avec le spectre des valeurs-propres de l'équation de Schroedinger correspondante, contenant le potentiel de Yukawa:

$$-\frac{1}{m} \Delta \Psi(\vec{x}) + V(r) \Psi(\vec{x}) = -B \Psi(\vec{x}) \quad (6.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{\lambda}{m^2} \frac{1}{r} e^{-\mu r} = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\lambda}{m^2} \int (dp)^3 [|\vec{p}|^2 + \mu^2]^{-1} e^{i(\vec{p}, \vec{x})}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Comme on ne connaît pas les solutions exactes de (6.1), ni celles de (4.24), cette comparaison ne peut se faire directement, et il n'y a pas grand intérêt à chercher à comparer des valeurs-propres approchées. Nous sommes ainsi conduit à chercher une équation intégrale équivalente à (6.1), ayant une structure analogue à (4.24), de telle sorte qu'une comparaison des noyaux permette d'établir une relation entre les valeurs-propres.

Pour cela, nous écrivons (6.1) dans l'espace de Fourier:

$$\Psi(\vec{p}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{m^2} [|\vec{p}|^2 + \rho^2]^{-1} \int (dk)^3 [|\vec{p} - \vec{k}|^2 + \mu^2]^{-1} \Psi(\vec{k}), \quad (6.3)$$

où $\varrho^2 = mB$, et nous cherchons si les solutions à symétrie sphérique de cette équation peuvent être représentées par :

$$\Psi(\vec{p}) = \int_0^\infty dz s(z) [|\vec{p}|^2 + z + \varrho^2]^{-1} *). \quad (6.4)$$

Paraphrasant les calculs faits au § 2, on obtient, à l'aide d'une représentation de Feynman :

$$\begin{aligned} & \int (dk)^3 [(\vec{p} - \vec{k})^2 + \mu^2]^{-1} \Psi(\vec{k}) = \\ & \frac{1}{2} \pi^2 \int_0^\infty d\bar{z} s(\bar{z}) \int_0^1 dx x |\vec{p}|^2 [x(1-x) + \mu^2(1-x) + (\bar{z} + \varrho^2)x]^{-3/2} \\ & = \pi^2 \int_0^\infty d\bar{z} s(\bar{z}) (\bar{z} + \varrho^2)^{-1/2} \left[|\vec{p}|^2 + ((\bar{z} + \varrho^2)^{1/2} + \mu)^2 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

On multiplie cette expression par $(|\vec{p}|^2 + \varrho^2)^{-1}$ et l'on rend compacts les dénominateurs au moyen d'une seconde représentation de Feynman. (6.3) peut alors s'écrire :

$$Y(\vec{p}) = \frac{\lambda\pi}{m} \int_0^\infty d\bar{z} s(\bar{z}) \int_0^{((\bar{z} + \varrho^2)^{1/2} + \mu) - \varrho^2} dz G(z) [|\vec{p}|^2 + z + \varrho^2]^{-2} \quad (6.6)$$

$G(z)$ étant défini par (4.22)–(4.14). Après permutation de l'ordre des intégrations sur \bar{z} et z et comparaison avec (6.4), on voit que (6.4) vérifie (6.3) si la fonction-poids $s(z)$ est solution de l'équation intégrale :

$$s(z) = \sigma \left[\int_0^\infty d\bar{z} G(\bar{z}) s(\bar{z}) - \Theta(z - \mu^2 - 2\mu\varrho) \int_0^{\xi_1(z)} d\bar{z} G(\bar{z}) s(\bar{z}) \right] \quad (6.7)$$

avec $\sigma = \lambda \pi/m$. Nous constatons le fait remarquable que cette équation intégrale, équivalente à l'équation de Schroedinger pour les états S , est *identique* à l'équation intégrale (4.24). Désignant par σ_S les valeurs-propres de cette équation et par $\lambda_{BS}(\eta)$ les valeurs-propres de l'équation de Bethe-Salpeter pour un η quelconque

*) $s(z)$ est essentiellement la transformée de Laplace de $\Psi(\vec{x})$. En effet:

$$\Psi(\vec{x}) \sim \int_0^\infty dz (z + \varrho^2)^{-1/2} s(z) \exp[-(z + \varrho^2)^{1/2} r].$$

Il s'ensuit que toute solution à symétrie sphérique de (6.3) peut être représentée selon (6.4) puisque l'on sait que toute fonction-propre, solution de (6.1), décrivant un état S , possède une transformée de Laplace.

$(\sigma_{BS}(\eta) = \lambda_{BS}(\eta) \pi/\eta)$, nous avons établi que les valeurs-propres $\sigma_{BS}(\eta)$, correspondant aux fonctions-propres de la classe régulière, peuvent être mises en correspondance avec les valeurs propres σ_S du problème de Schrödinger de telle sorte que:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \sigma_{BS}(\eta) = \sigma_S^* ; \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(u, z) = f_0(z) = s(z). \quad (6.8)$$

En d'autres termes, dans une théorie scalaire, le spectre de valeurs-propres de la limite non-relativiste, ou statique, de la «ladder approximation» de l'équation de Bethe-Salpeter contient le spectre de valeurs-propres de l'équation de Schrödinger, avec potentiel de Yukawa. Or, l'on sait que dans la limite statique d'une théorie scalaire, le potentiel de Yukawa décrit *exactement* l'interaction de deux particules¹⁰⁾. Ainsi, dans la limite considérée, la «ladder approximation» fournit, par sa classe régulière de solutions, une description rigoureuse des états liés.

La comparaison de ce résultat avec celui de WICK⁴⁾ et CUTKOSKY⁵⁾, et le fait que notre formulation contient le cas $\mu = 0$, montre que la classe régulière de fonctions-propres que nous avons isolée correspond à la valeur $\varkappa = 0$ du nouveau nombre quantique.

Pour terminer, nous interprétons l'égalité des fonctions-poids $f_0(z)$ et $s(z)$. La fonction $\varphi(x)$ est donnée dans le plan $t = 0$ par:

$$\varphi(\vec{x}, 0) = (2\pi)^{-3/2} \int (dp)^3 \chi(\vec{p}) e^{i(\vec{p}, \vec{x})} \quad (6.9)$$

avec :

$$\chi(\vec{p}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \varphi(\vec{p}, \omega) \quad (6.10)$$

Introduisant la représentation (2.22), on obtient:

$$\begin{aligned} \chi(\vec{p}) &= \text{const} \int_0^\infty dz \int_{-1}^{+1} du g(u, z) (1 - |u|) \\ &\quad [|\vec{p}|^2 + \varrho^2 + z(1 - |u|) + \eta^2 u^2]^{-5/2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

et :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \chi(\vec{p}) = \text{const.} \int_0^\infty dz f_0(z) [|\vec{p}|^2 + z + \varrho^2]^{-2} \quad (6.12)$$

*) On remarque que σ_S ne dépend que de μ et de ϱ : $\sigma_S = \sigma_S(\mu, \varrho)$, et λ_S est une fonction linéaire de m . σ_{BS} dépend par contre de μ , ϱ et η : $\sigma_{BS} = \sigma_{BS}(\mu, \varrho, \eta)$. Comme $\lim_{\eta \rightarrow \infty} m/\eta = 1$, (6.8) montre que λ_S et λ_{BS} tendent vers l'infini de la même façon lorsque $\eta \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \lambda_S / \lambda_{BS} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \sigma_S m / \sigma_{BS} \eta = 1.$$

Compte tenu de $f_0(z) = s(z)$, un choix convenable des constantes de normation donne, en vertu de (6.4):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \chi(\vec{p}) = \Psi(\vec{p}) \quad (6.13)$$

ou:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \varphi(\vec{x}, 0) = \Psi(\vec{x}) \quad (6.14)$$

c'est-à-dire dans la limite non-relativiste, l'amplitude de Bethe-Salpeter devient *égale*, dans le plan $t = 0$, à la fonction d'onde de Schrödinger.

En terminant, je tiens à remercier mon maître, Monsieur le Professeur E. C. G. STUECKELBERG, pour l'aide constante qu'il m'a accordée au cours de l'élaboration de ce travail.

Appendice A: Limite $\mu = 0$.

Nous montrons en premier lieu que $g(u, M^2) = 0$ dans l'intervalle $\varepsilon \leq M^2 < \infty$ avec $\varepsilon > 0$. Le changement de variable $x = 1/M^2$ ($g(u, M^2) \rightarrow g(u, x)$) transforme (3.2) en:

$$g(u, x) = \lambda \int_{-1}^{+1} d\bar{u} \int_0^{xR} d\bar{x} L(\bar{u}, \bar{x}) g(\bar{u}, \bar{x}) \quad (A.1)$$

avec:

$$L(u, x) = \frac{1}{2} [1 + x(\varrho^2 + \eta^2 u^2)]^{-1} \leq 1 \quad (A.2)$$

On peut choisir x dans l'intervalle $(0, 1/\varepsilon)$, et, du fait que $R \leq 1$, (A. 1) est une équation intégrale homogène en $g(u, x)$ sur l'intervalle fini $(0, 1/\varepsilon)$ et à noyau borné $L(u, x)$. Or, cette équation homogène ne possède pas de valeurs propres*). Pour le prouver, il suffit de montrer la convergence pour toute valeur de λ de la série de Neumann:

$$\mathfrak{H}(u, x; \bar{u}, \bar{x}, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(u, x; \bar{u}, \bar{x}) \lambda^n. \quad (A.3)$$

$H_n(u, x; \bar{u}, \bar{x})$ et le $n^{\text{ième}}$ itéré du noyau $H_1(u, x; \bar{u}, \bar{x})$:

$$H_1(u, x; u, x) = \begin{cases} L(\bar{u}, \bar{x}) & \text{pour } \bar{x} \leq x R(u, \bar{u}) \\ 0 & \text{pour } \bar{x} > x R(u, \bar{u}) \end{cases} \quad (A.4)$$

$$H_{n+1}(u, x; \bar{u}, \bar{x}) = \int_{-1}^{+1} du_1 \int_0^{1/\varepsilon} dx_1 H_n(u, x; u_1 x_1) H_1(u_1, x_1; \bar{u}, \bar{x}) \quad (A.5)$$

*) La structure de l'équation intégrale (A. 1) est analogue à celle d'une équation intégrale à une variable de Volterra. Aussi la démonstration de l'absence de valeurs-propres est-elle une paraphrase de la démonstration du même résultat pour une équation de Volterra¹¹⁾.

Utilisant (A.2) et (A.4), on montre sans peine que :

$$H_{n+1}(u, x; \bar{u}, \bar{x}) < \frac{1}{2n!} |x - \bar{x}|^n$$

d'où

$$\mathfrak{H}(u, x; \bar{u}, \bar{x}, \lambda) < \frac{1}{2} e^{\lambda|x - \bar{x}|} \leq \frac{1}{2} e^{\lambda/\varepsilon} < \infty \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, la seule solution de (A.1) dans l'intervalle $(0, 1/\varepsilon)$ est $g(u, x) = 0$. On ne peut cependant pas conclure à l'inexistence de valeurs-propres de l'équation (3.2) dans l'intervalle $(0 \leq M^2 < \infty)$ car le noyau $L_1(u, M^2)$ a un pôle en $M^2 = 0$. Nous avons seulement prouvé que le support de $g(u, M^2)$ est contenu dans l'intervalle $0 \leq M^2 < \varepsilon$, avec ε arbitraire, positif. Il s'ensuit que $g(u, M^2)$ doit avoir la forme (3.3), ou, plus précisément*) :

$$g_n(u, M^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)!} g_n^k(u) \delta^{(n-k-l)}(M^2 - \varepsilon/2) \quad (\text{A.7})$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{M^2=1/R}^{\infty} d\bar{M}^2 L_1(\bar{u}, \bar{M}^2) \delta^{(l)}(\bar{M}^2 - \varepsilon/2) = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{m=0}^l \frac{l!}{(m+1)!} \frac{[R(u, \bar{u})]^{m+1}}{[\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2]^{l-m+1}} \delta^{(m)}(M^2 - \varepsilon/2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

On vérifie cette égalité en appliquant les distributions apparaissant dans les deux membres à une même fonction $f(M^2)$ et en constatant l'identité des résultats.

Introduisant (A.7) dans (3.2) et utilisant (A.8), on obtient le système (3.4).

Appendice B: Détermination du domaine d'indépendance J.

(2.25) montre que l'intégration dans le plan (\bar{u}, \bar{z}) s'étend à des valeurs de \bar{u} telles que :

$$[(zF(u, \bar{u}) + \varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)^{\frac{1}{2}} - \mu]^2 - (\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2) \geq 0$$

Cette inégalité s'écrit aussi :

$$zF(u, \bar{u}) \geq \mu^2 + 2\mu(\varrho^2 + \eta^2 \bar{u}^2)^{\frac{1}{2}} \equiv J(\bar{u}) \quad (\text{B.1})$$

*) Cette définition est nécessaire pour donner un sens défini aux intégrales sur M^2 s'étendant à l'intervalle $(0, \infty)$, par exemple en (2.1), et pour éviter la coïncidence des singularités de $g(\bar{u}, \bar{M}^2)$ et de $L_1(\bar{u}, \bar{M}^2)$ en (3.2) et (A.8).

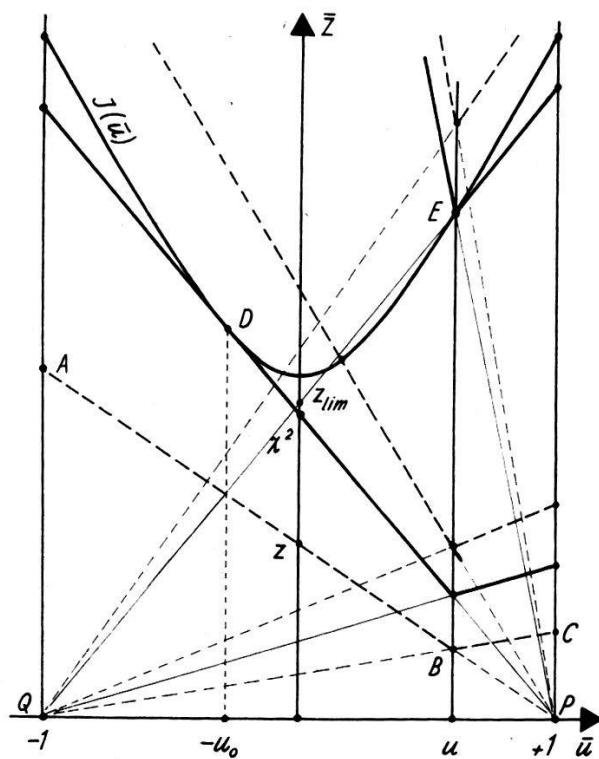


Fig. 3.

Détermination graphique du domaine d'indépendance \mathfrak{I} lorsque $u > u_0$. Pour obtenir une figure claire, on a choisi: $\varrho^2 = 1/4 \mu^2$, $\eta^2 = 2 \mu^2$. Alors $u_0 = 0,29$
 $\chi^2 = 1,78 \mu^2$ ($m = 3/2 \mu$, $B = 0,2 \mu$).

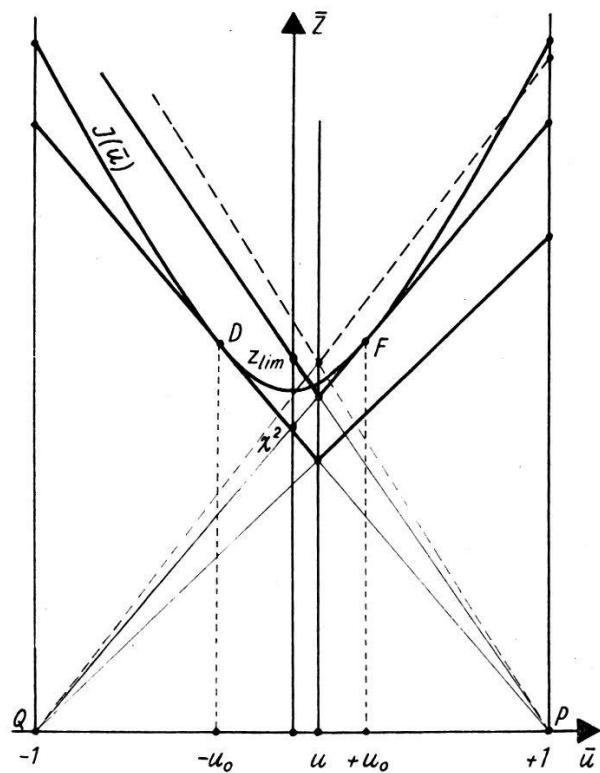


Fig. 4.

Détermination graphique du domaine d'indépendance \mathfrak{I} lorsque $u < u_0$.

Dans une représentation graphique, ces valeurs correspondent à la portion de la ligne brisée $z F(u, \bar{u})$ située au-dessus de la courbe $J(\bar{u})$. Si $u \geq 0$, cette ligne brisée est formée du segment AB de la droite passant par le point P d'abscisse 1 de l'axe horizontal et par le point d'ordonnée z de l'axe vertical, et du segment BC de la droite issue du point Q d'abscisse -1 de l'axe horizontal, et coupant la droite précédente en un point B d'abscisse u . Si $z < \chi^2$, la ligne ABC est toute entière au-dessous de la courbe $J(\bar{u})$, et, lorsque $z = \chi^2$, le segment AB est tangent à $J(u)$ en un point D d'abscisse $-u_0 < 0$. Pour déterminer dans quelles conditions l'intégration sur u s'étend à des valeurs inférieures à u , il faut examiner dans quelles circonstances le segment BC est tout entier au-dessous de $J(\bar{u})$. Si $u \geq u_0$ (fig. 3), il en est ainsi aussi longtemps que B est situé au-dessous du point E de la courbe $J(\bar{u})$ d'abscisse u , et cette condition s'exprime par la seconde inégalité (3.10). Si $u < u_0$ (fig. 4), il faut que BC soit au-dessous de la tangente QF à $J(\bar{u})$ issue de Q , ce qui donne la première inégalité (3.10). On obtient les graphiques correspondant à $u < 0$ par une symétrie relativement à l'axe vertical dans les fig. 3 et 4.

Bibliographie.

- ¹⁾ E. E. SALPETER and H. A. BETHE, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- ²⁾ M. GELL-MAN and F. Low, Phys. Rev. **84**, 350 (1951).
- ³⁾ J. S. GOLDSTEIN, Phys. Rev. **91**, 1516 (1953).
- ⁴⁾ G. C. WICK, Phys. Rev. **96**, 1124 (1954).
- ⁵⁾ R. E. CUTKOSKY, Phys. Rev. **96**, 1135 (1954).
- ⁶⁾ F. L. SCARF, Phys. Rev. **100**, 912 (1955).
- ⁷⁾ R. E. CUTKOSKY and G. C. WICK, Phys. Rev. **101**, 1830 (1956).
- ⁸⁾ Voir entre autres: E. E. SALPETER, Phys. Rev. **87**, 328 (1952).
- ⁹⁾ S. MANDELSTAM, Proc. Roy. Soc. **233**, 248 (1955) et **237**, 496 (1956).
- ¹⁰⁾ E. C. G. STUECKELBERG, Comptes Rendus **207**, 387 (1938). Voir aussi: G. WENTZEL, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, p. 44 (Franz Deuticke, Wien 1943).
- ¹¹⁾ Voir par exemple: MORSE and FESHBACH, Methods of Theoretical Physics I, p. 920 (McGraw-Hill, New York 1953).