

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 30 (1957)  
**Heft:** V

**Artikel:** Über die Lösungen der radialen Schrödinger-Gleichung bei beliebigem Spin  
**Autor:** Bürgel, Bruno  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112822>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die Lösungen der radialen Schrödinger-Gleichung bei beliebigem Spin

von Bruno Bürgel.

(20. IV. 1957.)

*Zusammenfassung.* Die in  $r = 0$  verschwindenden Lösungen  $\varphi_\nu(k^2, r)$  des folgenden Differentialgleichungssystems werden untersucht:

$$\frac{d^2}{dr^2} y_\nu - \frac{l_\nu(l_\nu + 1)}{r^2} y_\nu = \sum_{\mu=1}^n y_\mu [V_{\mu\nu}(r) - k^2 \delta_{\mu\nu}], \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Darin sind die Zahlen  $l_\nu$  ganz und nicht negativ. Die reellen Funktionen  $V_{\mu\nu}(r) = V_{\nu\mu}(r)$  sollen im Intervall  $0 < r \leq R$  stetig und für  $R \leq r$  stückweise stetig sein und den Bedingungen

$$\lim_{r \rightarrow 0} r V_{\mu\nu}(r) = 0;$$

$$\int_R^\infty dt t^\alpha |V_{\mu\nu}(t)| < \infty, \quad \alpha = \begin{cases} 1 & (k \neq 0) \\ l_{\max} - l_{\min} + 1 & (k = 0) \end{cases}$$

genügen.  $k$  ist ein komplexer Parameter mit  $|k| < \infty$ .

Es wird gezeigt, dass für  $r \geq 0$  die in  $r = 0$  verschwindenden Lösungen im  $2n$ -dimensionalen Lösungsraum

$$\left\{ y_1, \dots, y_n, \frac{d}{dr} y_1, \dots, \frac{d}{dr} y_n \right\}$$

des gegebenen Differentialgleichungssystems eine genau  $n$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von stetigen Lösungen bilden. Für  $r \rightarrow \infty$  sind sie darstellbar als Summe je einer ein- und auslaufenden Kugelwelle.

## Einleitung.

In mehreren Arbeiten hat HEISENBERG<sup>1)</sup> versucht, den allgemeinen Rahmen einer divergenzfreien Theorie der Elementarteilchen aufzuzeigen. Dazu wählte er als erstes unter den Begriffen der gewöhnlichen Quantenmechanik diejenigen aus, von denen man erwarten möchte, dass sie auch in einer zukünftigen Theorie ihren Sinn beibehalten werden. Die ihnen entsprechenden Größen nennt er beobachtbar. Beobachtbar sind Streuquerschnitte und die Energiewerte stationärer Zustände von Systemen. Die Streumatrix soll in einer solchen zukünftigen Theorie eine ähnliche Stellung einnehmen wie der Hamiltonoperator in der bisherigen Quantenmechanik.

Zudem sollen aus ihr die beobachtbaren Grössen nach einfachen Vorschriften herleitbar sein.

So sollten die Energiewerte der gebundenen Zustände durch die Nullstellen der  $S$ -Matrix in der unteren Halbebene von  $\sqrt{E}$  gegeben sein<sup>2)</sup>. Es ist naheliegend, diese Aussage mit einfachen Beispielen aus der gewöhnlichen nichtrelativistischen Quantenmechanik zu vergleichen. MA<sup>3)</sup> hat als erster gezeigt, dass hier „Falsche Nullstellen“ auftreten. TER HAAR<sup>4)</sup>, JOST<sup>5)6)</sup>, JOST-KOHN<sup>7)</sup> und KODAIRA<sup>8)</sup> haben diese Schwierigkeit in verschiedenen Arbeiten untersucht.

Bei einem Zweiteilchenproblem wirke eine Zentralkraft mit dem skalaren Potential  $V(r)$ . Im Raume der Relativkoordinaten gilt für den radialen Teil der Wellenfunktion wenn man sich auf  $S$ -Zustände beschränkt, die Gleichung

$$\varphi'' + E\varphi = V(r)\varphi.$$

Hierbei ist  $E$  die Energie. Das Potential sei so beschaffen, dass die im Nullpunkt verschwindende Lösung  $r^{-1}\varphi(r)$  für grosse  $r$  und positives, reelles  $k = \sqrt{E}$  das asymptotische Verhalten

$$\varphi(r) \sim C(e^{-ikr} - S(k)e^{+ikr})$$

habe.  $C$  ist eine hier bedeutungslose Konstante. Genügt nun  $f(k, r)$  der radialen Wellengleichung und gilt für grosse  $r$  asymptotisch

$$f(k, r) \sim e^{-ikr} \quad (\text{Im } k \geq 0)$$

so ist<sup>6)</sup>

$$S(k) = \frac{f(k, 0)}{f(-k, 0)}$$

Damit ist das Problem der „Falschen Nullstellen“ geklärt. Die richtigen Nullstellen der  $S$ -Funktion sind diejenigen des Zählers auf der negativen imaginären  $k$ -Achse; die falschen sind bestimmt durch die Pole des Nenners auf dieser Achse. Nur für hinreichend kurzweitrreichige Potentiale treten keine „falschen“ Nullstellen auf<sup>7)</sup>.

Nun erhob sich die Frage, wie weit das Potential  $V(r)$  durch den Verlauf der  $S$ -Funktion auf der ganzen positiven  $k$ -Achse und die Energiewerte  $E_n$  der gebundenen Zustände bestimmt seien.

BARGMANN<sup>9)</sup>, JOST und KOHN<sup>7)10)</sup> und LEVINSON<sup>11)</sup> zeigten, dass die Streuphase zu einem Drehimpuls  $l$  als Funktion der Energie zusammen mit der Lage der  $L$  gebundenen Zustände und  $L$  willkürlichen Parametern das Potential eindeutig bestimmt ist, sofern es von genügend kurzer Reichweite ist. Noch mehr: die Schar dieser Potentiale kann konstruiert werden<sup>7)</sup>, indem man eine Integralglei-

chung von GELFAND und LEVITAN<sup>12)</sup> benutzt. Diese Integralgleichung erlaubt die Bestimmung des Potentials  $V(r)$  aus der entsprechenden spektralen Dichte  $P(E)$ . Die Dichte hängt ihrerseits mit der Streumatrix zusammen.

NEWTON und JOST<sup>13)</sup> haben diese Methode für Systeme von gekoppelten, zum Drehimpuls Null gehörenden Differentialgleichungen verallgemeinert. Bei diesen Problemen ist freilich die Bestimmung der spektralen Dichte aus der Streumatrix im allgemeinen nicht mehr eindeutig möglich, wie aus einem Satz von PLEMELJ<sup>14)</sup> über eine Faktorzerlegung von Matrizen folgt. Dementsprechend kann auch im allgemeinen Fall aus der Streumatrix kein eindeutig bestimmtes Potential konstruiert werden. NEWTON<sup>15)</sup> hat im Anschluss an diese Arbeit Systeme von zwei Gleichungen, die zum Drehimpuls  $l$  resp.  $l+2$  gehören, untersucht. Solche Systeme treten z. B. bei einer Kopplung durch Tensorkräfte auf. Er hat gezeigt, dass das Matrixpotential  $V(r)$  durch die Streumatrix  $S(k)$  als Funktion der Energie und die Lage der  $L$  gebundenen Zustände sowie  $L$  symmetrische, positiv definite Matrizen eindeutig definiert wird, sofern  $V(r)$  hinreichend kurzreichweitig ist. Zur Konstruktion des Potentials wird wieder die Integralgleichung von GELFAND und LEVITAN<sup>12)</sup> benutzt.

Über die weitere Frage nach hinreichenden Kriterien für die  $S$ -Matrix, die ein bestimmtes Verhalten des Potentials  $V(r)$  für grosse  $r$  sicherstellen, liegen ebenfalls noch keine abschliessenden Arbeiten vor<sup>16) 17)</sup>.

In der vorliegenden Arbeit sollen für Systeme von  $n$ -Gleichungen, die zu beliebigen Drehimpulsen gehören, die in der Zusammenfassung aufgeführten Tatsachen bewiesen werden. Physikalisch folgt damit aber nicht mehr als in der Arbeit von NEWTON<sup>15)</sup> zutage tritt.

### Problemstellung.

Die Schrödingergleichung für den radialen Teil  $Y(E, r)^*$  eines Zweiteilchenproblems, gekennzeichnet durch das Potential  $V_{\mu\nu}(r)$ , lässt sich bekanntlich in der Form

$$\frac{d^2}{dr^2} \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \frac{1}{r^2} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{Y} (\mathbf{V} - E \mathbf{1}) \quad (1)$$

schreiben. Darin sind:

$$\mathbf{\Lambda}_{\mu\nu} = l_\mu(l_\mu + 1) \delta_{\mu\nu}; \quad l_1 \leq \dots \leq l_n; \quad l_\nu \text{ ganz, } \geq 0;$$

$$\mathbf{V}_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}(r) = V_{\nu\mu}(r), \text{ reell.}$$

\*) Fettgedruckte Lettern bedeuten im folgenden quadratische Matrizen der Ordnung  $n$ .

Die Lösung  $\Phi(E, r)$  der Volterraschen Integralgleichung

$$\Phi(E, r) = \Phi_0(r) + \int_0^r dt \Phi(E, t) [\mathbf{V}(t) - E\mathbf{1}] \mathbf{G}(t, r) \quad (2)$$

mit

$$(\Phi_0)_{\mu\nu} = \alpha_\mu r^{l_\mu+1} \delta_{\mu\nu};$$

$$(\mathbf{G}(t, r))_{\mu\nu} = (2l_\mu + 1)^{-1} \left\{ r \left(\frac{r}{t}\right)^{l_\mu} - t \left(\frac{t}{r}\right)^{l_\mu} \right\} \delta_{\mu\nu};$$

genügt, sofern sie existiert, der Gleichung (1) mit dem Anfangswert  $\Phi(E, 0) = 0$ .

Damit die Gleichung (2) aber durch Iteration lösbar ist, ist offenbar nötig, dass

$$\int_0^1 dt t^{l_\nu - l_\mu + 1} |V_{\mu\nu}(t)| < \infty, \quad (\nu, \mu = 1, \dots, n).$$

Dann existiert nämlich die übliche erste Näherung

$$\Phi_1 = \int_0^r dt \Phi_0(E, t) [\mathbf{V}(t) - E\mathbf{1}] \mathbf{G}(t, r).$$

Bei physikalischen Problemen jedoch verschwinden für  $r \rightarrow 0$  i. A. die betreffenden Funktionen  $V_{\mu\nu}(r)$  nicht hinreichend stark, so dass sich Gleichung (2) nicht direkt bei solchen Problemen anwenden lässt. Hat aber schon die erste Näherung  $\Phi_1$  keinen Sinn, so ist auch nicht zu erwarten, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^r dt \Phi(E, t) [\mathbf{V}(t) - E\mathbf{1}] \mathbf{G}(t, r) \quad (3)$$

existiert. Für spezielle Systeme, bei denen

$$l_1 = l$$

$$l_2 = l + 2$$

ist, hat R. G. NEWTON<sup>15)</sup> gezeigt, wie sich die divergierenden Terme in (3) subtrahieren lassen. Man schreibt an Stelle von (2):

$$\Delta \widehat{\Phi}(E, r) = \chi(E, r) + \int_0^r dt \Delta \widehat{\Phi}(E, t) \mathbf{V}(t) \widehat{\mathbf{G}}(E, t, r) \quad (4)$$

wo

$$\begin{aligned}
\Delta \hat{\Phi} &= \hat{\Phi} - \hat{\Phi}_0 \\
\hat{\Phi}_0 &= k^{-l-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r \begin{pmatrix} J_{l+\frac{1}{2}}(kr); & 0 \\ 0 & k^{-2} J_{l+\frac{5}{2}}(kr) \end{pmatrix}; \\
\chi(k^2, r) &= \int_0^r dt [\hat{\Phi}_0(k^2, t) \mathbf{V}(t) \hat{\mathbf{G}}(k^2, t, r) - \frac{2l+3}{t} \begin{pmatrix} 0; & V_{12}(t) \\ 0; & 0 \end{pmatrix} \hat{\Phi}_0(k^2, r)] \\
&\quad + (2l+3) \int_1^r dt t^{-1} \begin{pmatrix} 0; & V_{12}(t) \\ 0; & 0 \end{pmatrix} \hat{\Phi}_0(k^2, r); \\
(\hat{\mathbf{G}}(k^2, t, r))_{\mu\nu} &= \frac{\pi r}{2} [J_{l+\frac{1}{2}}(kt) N_{l+\frac{1}{2}}(kr) - J_{l+\frac{1}{2}}(kr) N_{l+\frac{1}{2}}(kt)] \delta_{\mu\nu}^*; \\
k &= \sqrt{E}, \quad \pi < \arg k \leq 2\pi. \quad (5)
\end{aligned}$$

Wendet man diesen Subtraktionsformalismus nicht an, so kann man eine Fredholmsche Gleichung verwenden. Die Fredholmsche Integralgleichung\*\*):

$$\Phi(E, r) = \Phi_0(r) + \int_0^R dt \Phi(E, t) [\mathbf{V}(t) - E \mathbf{1}] \mathbf{K}(t, r) \quad (6)$$

mit:

$$(\Phi_0)_{\mu\nu} = \alpha_\mu (2l_\mu + 1) r^{l_\mu+1} \delta_{\mu\nu}; \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{\mu\nu}(t, r) = -(2l_\mu + 1) \delta_{\mu\nu} \begin{cases} t \left(\frac{t}{r}\right)^{l_\mu} & (t \leq r) \\ r \left(\frac{r}{t}\right)^{l_\mu} & (t \geq r) \end{cases} \quad (8)$$

ist für beliebige  $n$  und  $l_\nu$  brauchbar im Intervall  $0 \leq r \leq R$ , solange die Fredholmsche Determinante von (6) nicht verschwindet. Sie soll im folgenden, neben anderem, benutzt werden, um die in der Inhaltsangabe behaupteten Tatsachen zu beweisen.

#### Die in $r = 0$ verschwindende Lösung $\Phi(E, r)$ .

Jede Zeile  $\varphi(E, r) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  der Matrixfunktion  $\Phi(E, r)$  genüge einzeln dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\varphi_\nu(E, r) &= \beta_\nu r^{l_\nu+1} + \int_0^R dt \sum_{\lambda, \mu} \varphi_\lambda(E, t) [V_{\lambda\mu}(t) - E \delta_{\lambda\mu}] K_{\mu\nu}(t, r) \quad (9) \\
&(\lambda, \mu, \nu = 1, \dots, n)
\end{aligned}$$

\*)  $J_n, N_n, H_n$  bedeuten resp. die Bessel-, Neumann-, Hankelschen Funktionen der Ordnung  $n$ .

\*\*) Ich verdanke diese Bemerkung einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. R. JOST.

mit konstanten  $\beta_\nu$ . Die in  $0 \leq r \leq R$  stetige Lösung von (9) ist für fast alle  $E$  gegeben durch die Fredholmsche Formel

$$\varphi_\nu(E, r) = \beta_\nu r^{l_\nu+1} + \int_0^R dt \sum_\mu \beta_\mu t^{l_\mu+1} \frac{\Delta_{\mu\nu}(E, t, r)}{D(E)}, \quad (D(E) \neq 0). \quad (10)$$

Dafür, dass diese Darstellung existiert, ist bekanntlich hinreichend, dass die Elemente der Matrix  $[\mathbf{V}(t) - E \mathbf{1}] \mathbf{K}(t, r)$  im abgeschlossenen Intervall  $0 \leq t, r \leq R$  stetig sind. Nach (8) ist diese Bedingung offenbar sicher erfüllt, wenn die Funktionen  $V_{\mu\nu}(r)$  in  $0 < r \leq R$  stetig sind und

$$\lim_{r \rightarrow 0} r V_{\mu\nu}(r) = 0, \quad (\mu, \nu = 1, \dots, n) \quad (11)$$

ist. Wir können im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $D(E) \neq 0$  annehmen.

Die Fredholmsche Determinante  $D(E)$  ist nämlich eine in  $R$  stetige, nicht identischverschwindende Funktion. Es sei nun für ein gewisses  $E_0$   $D(E_0) = 0$ . Dann gibt es sicher ein  $R'$  aus dem offenen Intervall  $(0, R)$ , so, dass die diesem entsprechende Fredholmsche Determinante für  $E = E_0$  nicht verschwindet. Das (9) analoge, zum Intervall  $0 \leq r \leq R'$  gehörende Gleichungssystem ist dann an der Stelle  $E = E_0$  für jede Inhomogenität  $\beta_\nu$  lösbar.

Wir zeigen nun, dass

$$\varphi_\nu(E, 0) = 0, \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (12)$$

Zu diesem Zwecke schreiben wir (9) in der Form:

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(E, r) = \beta_\nu r^{l_\nu+1} - \frac{r^{-l_\nu}}{2l_\nu+1} \int_0^r dt t^{l_\nu+1} \sum_\lambda \varphi_\lambda(E, t) P_{\lambda\nu}(E, t) \\ - \frac{r^{l_\nu+1}}{2l_\nu+1} \int_r^R dt t^{-l_\nu} \sum_\lambda \varphi_\lambda(E, t) P_{\lambda\nu}(E, t) \end{aligned} \quad (13)$$

worin

$$P_{\lambda\nu}(E, t) = V_{\lambda\nu}(t) - E \delta_{\lambda\nu}$$

gesetzt ist, und nehmen, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen, an, (13) sei lösbar.

Die Fredholmsche Formel (10) liefert uns die im abgeschlossenen Intervall  $0 \leq r \leq R$  stetige Lösung  $\varphi_\nu(E, r)$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ). Daher sind die Funktionen  $\varphi_\nu$  in diesem Intervall auch beschränkt:

$$|\varphi_\nu(E, r)| < C.$$



Nun ist aber nach (11) auch  $|r P_{\lambda \nu}| < C$  so, dass aus (13) folgt:

$$|\varphi_\nu(E, r)| < |\beta_\nu| r^{l_\nu+1} + C r^{-l_\nu} \int_0^r dt t^{l_\nu} + C r^{l_\nu+1} \int_r^R dt t^{-l_\nu-1} < C r \quad (14)$$

worin  $C$  eine beliebige von Null verschiedene Konstante bedeutet. Somit gilt also

$$\varphi_\nu(E, 0) = 0.$$

Aus (12) und (13) folgt, dass die Funktionen  $\varphi_\nu(E, r)$  dem Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\nu(E, 0) &= 0 \\ R \varphi'_\nu(E, R) + l_\nu \varphi_\nu(E, R) &= (2l_\nu + 1) \beta_\nu R^{l_\nu+1} \end{aligned} \right\} (\nu = 1, \dots, n) \quad (15)^*$$

genügen.

Die für unsere Zwecke allgemeinste Inhomogenität der Gleichung (6) lässt sich in der Gestalt

$$\mathbf{I}(r) = \mathbf{A} \{ (2l_\mu + 1) r^{l_\mu+1} \delta_{\mu\nu} \}, \quad (\text{Det } \mathbf{A} \neq 0) \quad (16)$$

schreiben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder  $D(E) \neq 0$  annehmen. Dann bezeichne  $\Phi$  die durch (6) und (15) definierte Matrix. Wir beweisen, dass

$$\text{Rang } (\Phi, \Phi') = n. \quad (17)$$

Aus (6) folgt nämlich

$$\mathbf{A}_{\mu\nu} = l_\nu \Phi_{\mu\nu}(E, R) + R \Phi'_{\mu\nu}(E, R). \quad (18)$$

Diese Gleichungen fassen wir in eine Matrixgleichung zusammen. Wir schreiben:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{M}_1)_{\mu\nu} &= R \delta_{\mu\nu} \\ (\mathbf{M}_2)_{\mu\nu} &= l_\mu \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \right\} (\mu, \nu = 1, \dots, n) \quad (19)$$

Damit lautet die Gleichung (18)

$$\begin{pmatrix} \Phi & \Phi' \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Der Rang des Faktors rechts ist wegen (19) derjenige der rechten Seite wegen (16) gleich  $n$ . Der Rang des Faktors links sei  $m \leq n$ . Fasst man nun diesen Faktor als Vektoroperator auf, so gilt für den Rang der Matrix  $\mathbf{A}$

$$n = \text{Rang } \mathbf{A} \leq m \leq n,$$

so, dass also  $m = n$  ist.

\*)  $\varphi'$  bezeichnet im folgenden  $d\varphi/dr$ .



Jede stetige, im Nullpunkt verschwindende Lösung  $\psi_\nu(E, r)$  der Gleichung (13) ist in der Form  $a\Phi$  ( $a = \text{const.}$ ) darstellbar.  $\psi_\nu$  ist im abgeschlossenen Intervall  $0 \leq r \leq R$  stetig, also dort beschränkt. Die Funktionen

$$f_\nu = \psi_\nu + \frac{r^{-l_\nu}}{2l_\nu+1} \int_0^r dt t^{l_\nu+1} \sum_\lambda \psi_\lambda P_{\lambda_\nu} + \frac{r^{l_\nu+1}}{2l_\nu+1} \int_r^R dt t^{-l_\nu} \sum_\lambda \psi_\lambda P_{\lambda_\nu}$$

verschwinden in  $r = 0$ . Denn es ist offenbar  $|f_\nu| < Cr$ .

Weiter genügen sie der Gleichung (1) für  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ . Sie sind also von der Form  $f_\nu = \alpha_\nu r^{l_\nu+1}$ . Setzen wir nun in (13)  $\beta_\nu = \alpha_\nu$ ; so genügen ihr sowohl  $\psi_\nu$  als auch  $\varphi_\nu$ . Also genügt die Differenz  $\varphi_\nu - \psi_\nu$  der homogenen Gleichung. Wegen der Alternative ist aber  $\varphi_\nu - \psi_\nu \equiv 0$ , also  $\varphi_\nu \equiv \psi_\nu$ .

Nun sind aber die Gleichung (6) mit der Inhomogenität (9) und das Differentialgleichungssystem (1) mit dem Anfangswert  $\Phi(E, 0) = \mathbf{0}$  einander äquivalent. Es gibt daher im  $2n$ -dimensionalen Raum  $\{y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n\}$  der Lösungen von (1) eine genau  $n$ -dimensionale Schar von stetigen Lösungen  $\varphi_\nu(E, r)$ .

**Die Lösungen  $F(\pm k, r)$ , die sich wie ein- oder auslaufende Kugelwellen verhalten.**

Die Integralgleichung

$$\mathbf{F}(k, r) = \mathbf{F}_0(k, r) - \int_r^\infty dt \mathbf{F}(k, t) \mathbf{V}(t) \hat{\mathbf{G}}(k^2, t, r), \quad (20)$$

wobei

$$(\mathbf{F}_0)_{\mu\nu} = (-i) k^{l_\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r H_{l_\mu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \delta_{\mu\nu}, \quad (21)$$

und  $\hat{\mathbf{G}}$  durch (5) definiert ist, lässt sich für

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \varepsilon \leq r \\ \pi < \arg k \leq 2\pi \end{array} \right\} \quad (22)$$

durch Iteration lösen, sofern

$$\int_\varepsilon^\infty dt t^\alpha |\mathbf{V}(t)| < \infty, \quad \alpha = \begin{cases} 1 & (k \neq 0) \\ l_n - l_1 + 1 & (k = 0). \end{cases} \quad (23)$$

Die Matrixfunktion  $\mathbf{F}(k, r)$  ist in  $r$  stetig, für  $\text{Im } k < 0$  in  $k$  analytisch und stetig in  $k$  für  $\text{Im } k \leq 0$ .

Zum Beweis führen wir die folgenden Grössen ein: die Norm  $|\mathbf{M}|$  der quadratischen Matrix  $|\mathbf{M}|$  durch

$$|\mathbf{M}| = n \max_{\nu, \mu=1, \dots, n} |\mathbf{M}_{\mu\nu}| \quad (24)$$

ferner die Matrizen  $\Pi(\alpha)$

$$(\Pi(\alpha))_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu = \alpha) \\ 0 & (\mu, \nu \neq \alpha). \end{cases} \quad (25)$$

Bezeichnen wir weiter mit  $\varkappa$  den absoluten Betrag von  $\operatorname{Im} k$ , so gilt\*):

$$|k^{l_\mu}(-i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r H_{l_\mu + \frac{1}{2}}^{(2)}(kr)| \leq C e^{-\varkappa r} \left\{ \frac{1+|k|t}{t} \right\}^{l_\mu} \quad (26)$$

$$|G_{\mu\mu}(k^2, t, r)| \leq C e^{\varkappa(t-r)} \left( \frac{t}{1+|k|t} \right)^{l_\mu+1} \left( \frac{1+|k|r}{r} \right)^{l_\mu}, \quad (t \geq r). \quad (27)$$

Nun lösen wir (20) durch Iteration, indem wir schreiben:

$$\Delta \mathbf{F}(k, r) = \mathbf{f}(k, r) - \int_r^\infty dt \Delta \mathbf{F}(k, t) \mathbf{V}(t) \mathbf{G}(k^2, t, r) \quad (28)$$

wo

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_0$$

$$\mathbf{f} = \int_r^\infty dt \mathbf{F}_0(k, t) \mathbf{V}(t) \mathbf{G}(k^2, t, r); \quad (29)$$

und bilden damit

$$\Delta \mathbf{F} = \sum_{m=0}^\infty \mathbf{F}^{(m)};$$

$$\mathbf{F}^{(0)} = \mathbf{f}, \mathbf{F}^{(m)} = \int_r^\infty dt \mathbf{F}^{(m-1)}(k, t) \mathbf{V}(t) \mathbf{G}(k^2, t, r). \quad (30)$$

Da nach (24)–(29)

$$\begin{aligned} |\Pi(\alpha) \mathbf{F}^{(m)}(k, r)| &\leq \frac{C^{m+2}}{m!} e^{-\varkappa r} \left( \frac{1+|k|r}{r} \right)^{l_n} \int_r^\infty dt |\mathbf{V}| \left( \frac{t}{1+|k|t} \right)^{l_n-l_\alpha+1} \times \\ &\times \left( \int_r^\infty dt |\mathbf{V}| \frac{t}{1+|k|t} \right)^m \end{aligned}$$

---

\*) Vgl. z. B. R. G. NEWTON, l. c.

gilt, ist

$$|\Pi(\alpha) \Delta \mathbf{F}(k, r)| \leq C^2 e^{-\kappa r} \left( \frac{1+|k|r}{r} \right)^{l_n} \int_r^\infty dt |\mathbf{V}(t)| \left( \frac{t}{1+|k|t} \right)^{l_n-l_\alpha+1} \\ \cdot \exp C \int_r^\infty dt |\mathbf{V}(t)| \frac{t}{1+|k|t}. \quad (31)$$

Daraus folgen ohne weiteres die Behauptungen. Aus den asymptotischen Darstellungen

$$(\mathbf{F}_0(k, r))_{\alpha\alpha} = \begin{cases} (ik)^{l_\alpha} e^{-ikr} + O[r^{-1} k^{l_\alpha-1} e^{-\kappa r}] & (r \rightarrow \infty) \\ \frac{(2l_\alpha-1)!!}{r^{l_\alpha}} + O[r^{-l_\alpha-2} k^2] & (r \rightarrow 0) \end{cases}$$

folgen nach (31) für  $r \rightarrow \infty^*$ :

$$\Pi(\alpha) \mathbf{F}(k, r) = \begin{cases} \Pi(\alpha) ((ik)^{l_\alpha} e^{-ikr} \mathbf{1} + O[r^{-1} e^{-\kappa r}]) & (k \neq 0) \\ \Pi(\alpha) \left( \frac{(2l_\alpha-1)!!}{r^{l_\alpha}} \mathbf{1} + o[r^{-l_\alpha-2}] \right) & (k = 0). \end{cases} \quad (32)$$

Für reelle  $k$  gilt, da das Potential  $\mathbf{V}(r)$  reell ist,

$$\mathbf{F}(-k, r) = \mathbf{F}^*(+k, r); \quad (33)$$

so dass sich für solche  $k$  die Funktionen  $\mathbf{F}(-k, r)$  und  $\mathbf{F}(+k, r)$  für grosse  $r$  wie ein- resp. auslaufende Kugelwellen verhalten.

### Verhalten der Lösung $\Phi(E, r)$ für grosse $r$ .

Setzt man für zwei Lösungen  $\Phi$  und  $\psi$  von (1)<sup>13</sup>:

$$\mathbf{W}(\Phi, \psi) = \Phi(\psi^T)' - \Phi' \psi^T \quad (34)$$

( $\psi^T$  bedeutete die zu  $\psi$  transponierte Matrix), so folgt wegen  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T$  aus (1)

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{W} = 0.$$

Mit der asymptotischen Darstellung (32) ergibt sich daher:

$$\mathbf{W}(\mathbf{F}(\pm k, r), \mathbf{F}(\pm k, r)) = 0; \quad (35)$$

---

\*)  $\mathbf{O}[f]$  bedeutet eine Matrix, bei der alle Elemente  $O[f]$  sind. Entsprechend ist die Matrix  $\mathbf{o}[f]$  definiert.

und weiter nach (32) und (33):

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}\mathbf{F}(+k, r), \mathbf{F}(-k, r)) &= 2ik \begin{pmatrix} (-k)^{l_1} & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \\ & & & (-k)^{l_n} \end{pmatrix} \\ &\equiv 2ik \mathbf{T}(k) \quad (k \text{ reell}). \end{aligned} \quad (36)$$

Aus (35) und (36) folgt daher für reelle  $k$ :

$$\Phi(k^2, r) = \frac{1}{2ik} [\mathbf{F}^T(+k) \mathbf{F}(-k, r) - \mathbf{F}^T(-k) \mathbf{F}(+k, r)] \quad (37)$$

worin

$$\mathbf{F}(k) = \mathbf{T}(k) \mathbf{W}(\mathbf{F}(+k, r), \Phi(k^2, r)) \quad (38)$$

gesetzt ist. Damit sind nun alle aufgestellten Behauptungen bewiesen.

Es wäre nun freilich noch zu zeigen, dass die so bestimmten Lösungen  $\varphi_r(E, r)$  für das Intervall  $0 \leq r < \infty$  ein vollständiges Funktionensystem bilden. Um die Vollständigkeit z. B. mit der Methode von TITCHMARSH<sup>18)</sup> zu beweisen, wäre es nötig,  $\Phi(E, r)$  als in  $E$  ganze Matrix zu definieren, und ferner ihr asymptotisches Verhalten für  $E \rightarrow \infty$  zu kennen. Das erste Problem lässt sich\*) im wesentlichen mit den im Appendix B der Arbeit von NEWTON<sup>15)</sup> dargestellten Gedanken und den dort zitierten Sätzen von HELMER<sup>19)</sup> erledigen.

Ich möchte nicht versäumen, auch hier meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. FIERZ, von dem die Anregung zu dieser Arbeit stammt, für seinen lebenswürdigen Beistand herzlich zu danken. Ebenso fühle ich mich auch Herrn Prof. Dr. R. JOST für sein lebenswürdiges und wertvolles Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte, zu grossen Dank verpflichtet.

### Literatur.

- 1) HEISENBERG, W., Z. Phys. **120**, 513 (1943); **120**, 573 (1943).
- 2) MØLLER, C., Kgl. Danske Vid. Selskab. **23**, Nr. 1 (1945); **24**, Nr. 19 (1946).
- 3) MA, S. T., Phys. Rev. **69**, 668 (1946); **71**, 195 (1947).
- 4) TER HAAR, D., Physica **12**, 501 (1946).
- 5) JOST, R., Physica **12**, 509 (1946).
- 6) JOST, R., Helv. Phys. Acta **20**, 256 (1947).
- 7) JOST, R., und KOHN, W., Kgl. Danske Vid. Selskab. **27**, Nr. 9 (1953).
- 8) KODAIRA, K., Amer. J. Math. **71**, 921 (1949).
- 9) BARGMANN, V., Phys. Rev. **75**, 301 (1949); Rev. mod. Phys. **21**, 488 (1949).
- 10) JOST, R., und KOHN, W., Phys. Rev. **87**, 977 (1952); Phys. Rev. **88**, 382 (1952).

\*) Briefliche Mitteilung von Herrn Prof. Dr. R. JOST.

- <sup>11)</sup> LEVINSON, N., Kgl. Danske Vid. Selskab. **25**, Nr. 9 (1948); Phys. Rev. **89**, 755 (1953).
  - <sup>12)</sup> GELFAND, I. M., and LEVITAN, B. M., Doklady Akad. Nauk. SSSR. N.S. **77**, 557 (1951); Izvestija Akad. Nauk. SSSR. **15**, 309 (1951).
  - <sup>13)</sup> NEWTON, R. G., e JOST, R., Nuovo Cimento **1**, 590 (1955).
  - <sup>14)</sup> PLEMELJ, J., Monatsh. f. Math. u. Phys. **19**, 211 (1908).
  - <sup>15)</sup> NEWTON, R. G., Phys. Rev. **100**, 412 (1955).
  - <sup>16)</sup> NEIGAUZ, M. G., Doklady Akad. Nauk. SSSR. N.S. **102**, 25 (1955).
  - <sup>17)</sup> JOST, R., Helv. Phys. Acta **29**, 410 (1956).
  - <sup>18)</sup> TITCHMARSH, E. C., Eigenfunction Expansions associated with second Order Differentialequations, Oxford, 1946.
  - <sup>19)</sup> HELMER, O., Duke Math. J. **6**, 351 (1940); Bull. Am. Math. Soc. **49**, 225 (1943).
-