Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 30 (1957)
Heft: II-III

Artikel: Théorie de la radiation de photons de masse arbitrairement petite
Autor: Stueckelberg, E.C.G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112814

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Théorie de la Radiation de Photons de Masse Arbitrairement petite*)

par **E. C. G. Stueckelberg**
Institut de Physique de l'Université, Genève (Suisse).

(10. XI. 1956.)

If the photon has a mass $\hbar\mu \neq 0$, a canonical transformation yields a Hamiltonian containing the energies: 1. of the charged field (including the Yukawa potential energy); 2. of the transversal and longitudinal photons and 3. an interaction term. The interaction term between charge and longitudinal photons is smaller than the transversa term by a factor μ/ω, if $\hbar\omega$ is the photon energy. Thus the limit $\mu \to 0$, which replaces the Yukawa potential by the Coulomb potential, is possible. The longitudinal photons, presenting no interaction, can pass freely through the walls of a cavity and Planck's radiation law holds. The necessary and sufficient condition for this result is the continuity equation for electric charge.

1. Introduction et Résultat.

Dans une électrodynamique dont les photons ont une masse $\hbar\mu$**) non nulle, les potentiels $\vec{A}$ et Φ apparaissent explicitement, multipliés par μ^2, dans les premiers membres des équations inhomogènes de MAXWELL. Il s'ensuit que l'équation de continuité de la charge électrique cesse d'être une conséquence de ces équations. Le but de cet article est de démontrer que *la conservation de la charge* est essentiellement *la seule condition* qui doit être réalisée pour que, dans la limite où la masse du photon tend vers zéro ($\mu \to 0$), *seules les ondes de polarisation transversale* (t) *présentent une intéraction avec la matière.* Les ondes longitudinales (l) ne sont ni émises, ni absorbées. Ainsi, à la limite, une enceinte n'est en équilibre thermique qu'avec les photons transversaux, les photons longitudinaux traversant librement ses parois. La loi du rayonnement de PLANCK est donc assurée. BASS et SCHROEDINGER[1]) ont récemment illustré ce phénomène en prouvant que, dans la limite considérée, les photons longitudinaux ne peuvent être absorbés par un conducteur.

*) Recherche subventionnée par la Commission Suisse de l'Energie Atomique (C. S. A.).

**) La vitesse de la lumière est choisie comme unité de vitesse.

Nous avons montré ailleurs[2]) que la puissance rayonnée par un dipôle, oscillant avec la pulsation ω, comporte le terme habituel dû à l'onde transversale, et un terme plus petit dans le rapport $\mu^2/2\,\omega^2$ dû à l'onde longitudinale.

Dans cet article, nous démontrons le théorème suivant. Si l'hamiltonienne covariante H, dont résultent les équations de MAXWELL et les équations du mouvement de la matière en intéraction avec le champ électromagnétique, est une somme de deux termes:

$$H = H_{\text{e.m.}}[\vec{A}, \vec{E}, \varrho] + H_{\text{mat}}[p, q, \vec{A}] \tag{1.1}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique, ϱ la densité de charge, et où p et q symbolisent les variables canoniques décrivant la matière, *il existe une transformation canonique*, transformant une grandeur X en $\bar{X}$;

$$\bar{X} = X + \{F, X\} + \frac{1}{2!}\{F, \{F, X\}\} + \cdots {}^{*)} \tag{1.2}$$

telle que la transformée de H ait la forme:

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{n=1,2,3} a^*_{k,n}\, a_{k,n}\, \omega_{k,n} +$$
$$+ \frac{1}{8\pi} \int\int dV(\vec{x})\, dV(\vec{x}')\, \varrho(\vec{x})\, \frac{1}{r}\, e^{-\mu r} \varrho(\vec{x}') + H_{\text{mat.}}[p, q, \vec{A}^{(r)}]\, {}^{**)} \tag{1.3}$$

avec: $\omega_k = \sqrt{\mu^2 + |\vec{k}|^2}$, $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$. $a_{k,n}$ sont les amplitudes canoniques des ondes de vecteur d'onde $\vec{k}$ (compatible avec un volume de périodicité V). Les indices $n = 1, 2$ se réfèrent aux deux polarisations transversales $\vec{e}_{k,1}$ et $\vec{e}_{k,2}$, et $n = 3$ à la polarisation longitudinale $\vec{e}_{k,3}$. H est donc formée de la somme des énergies de toutes les ondes possibles, de l'énergie de Yukawa et de l'énergie de la matière soumise au champ de radiation $\vec{A}^{(r)}$ (dans lequel l'amplitude longitudinale $\vec{e}_{k,3}\, a_{k,3}$ apparaît réduite par le facteur μ/ω_k par rapport aux amplitudes transversales $\vec{e}_{k,1}\, a_{k,1}$ et $\vec{e}_{k,2}\, a_{k,2}$.

COESTER[3]) a trouvé ce même facteur μ^2/ω_k^2 dans le formalisme d'intéraction (matrice S). Dans ce formalisme, l'analogie formelle entre $\mu = 0$ et $\lim \mu = 0$ a aussi été démontrée par UMEZAWA[4]) et GLAUBER[5]). Ces trois auteurs sont obligés d'imposer une condition supplémentaire à un champ ayant plus de trois «polarisations», dont l'une correspond à des énergies négatives. Notre méthode évite ce

*) $\{F, X\}$ est la parenthèse de Poisson correspondant à $i[F, X]/\hbar$ en théorie quantique; (1.2) peut s'écrire dans ce cas: $\bar{X} = \exp(iF/\hbar)\, X \exp(-iF/\hbar)$.

**) $\hbar^{-\frac{1}{2}} a_{k,n}$ et $\hbar^{-\frac{1}{2}} a^*_{k,n}$ sont, en théorie quantique, les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon dans l'onde $(\vec{k}, n)$. L'indice k symbolise le vecteur $\vec{k}$ en $a_{k,n}$ et $\vec{e}_{k,n}$.

détour. On peut obtenir une matrice S invariante en suivant une méthode analogue à celle esquissée dans un article antérieur[6]).

Il est remarquable que la limite $\mu \to 0$ n'existe pas pour l'hamiltonienne initiale H (cf. 2,4). Par contre, elle peut être effectuée sans difficulté dans $\overline{H}$ et conduit au résultat attendu: $\vec{A}^{(r)}$ ne contient plus que les amplitudes transversales $\vec{e}_{k,1}\, a_{k,1}$ et $\vec{e}_{k,2}\, a_{k,2}$ et l'énergie de Yukawa devient l'énergie de Coulomb. La démonstration vaut en théorie classique aussi bien qu'en théorie quantique du fait de la correspondance entre parenthèses de Poisson et commutateurs.

Les conditions pour que la transformation canonique donnant (1.3) existe sont:

$$\{\vec{E}(\vec{x}), \varrho(\vec{x}')\} = 0; \quad \{\vec{A}(\vec{x}), \varrho(\vec{x}')\} = 0 \tag{1.4}$$

$$\{\varrho(\vec{x}), \varrho(\vec{x}')\} = 0 \tag{1.5}$$

$$\dot{\varrho} = \{H, \varrho\} = \{H_{\text{mat.}}, \varrho\} = -\operatorname{div} \vec{J} \tag{1.6}$$

où $\vec{J}$ est la densité de courant définie par:

$$J_i(\vec{x}) = -\frac{\delta H_{\text{mat.}}}{\delta A_i(\vec{x})} = J_i[p, q, \vec{A}]. \tag{1.7}$$

Les conditions (1.4) à (1.6) sont vérifiées en théorie non-relativiste et relativiste de particules ponctuelles, ainsi que par tous les types de champs matériels, même en présence d'intéraction mutuelle non électromagnétique, à condition qu'elle préserve l'équation de continuité (1.6).

2. L'Hamiltonienne Covariante.

Si $\mu \neq 0$, $\vec{A}$ est canoniquement conjugué au champ électrique $\vec{E}$;

$$\{A_i(\vec{x}), E_{i'}(\vec{x}')\} = \delta_{ii'}\, \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{2.1}$$

Les autres parenthèses s'annulent. Le champ magnétique $\vec{B}$ et le potentiel scalaire Φ sont *définis* par:

$$\vec{B}[\vec{A}] = \operatorname{rot} \vec{A} \tag{2.2}$$

$$\Phi[\vec{E}, \varrho] = \mu^{-2}(\varrho - \operatorname{div} \vec{E}). \tag{2.3}$$

H est la quatrième composante du quadrivecteur impulsion-énergie, le terme $H_{\text{e. m.}}$ ayant la forme:

$$\begin{aligned} H_{\text{e. m.}}[\vec{A}, \vec{E}, \varrho] &= \frac{1}{2} \int dV\, [B^2 + E^2 + \mu^2(\Phi^2 + A^2)] \\ &= H^0_{\text{e. m.}}[\vec{A}, \vec{E}] + \frac{1}{2\mu^2} \int dV(-2\varrho \operatorname{div} \vec{E} + \varrho^2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les équations du mouvement résultant de (2.4) sont, en vertu de (1.4)—(1.7) et (2.1):

$$\dot{\vec{A}} = \{H, \vec{A}\} = -\frac{\delta H}{\delta \vec{E}} = -\vec{E} - \operatorname{grad} \Phi \tag{2.5}$$

$$\dot{\vec{E}} = \{H, \vec{E}\} = \frac{\delta H}{\delta \vec{A}} = \operatorname{rot} \vec{B} + \mu^2 \vec{A} - \vec{J}. \tag{2.6}$$

(2.2) et (2.5) donnent les deux équations de Maxwell homogènes:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \dot{\vec{B}} = -\operatorname{rot} \vec{E}. \tag{2.7}$$

(2.3) et (2.6) sont les équations inhomogènes de Maxwell, qui ont pour conséquence:

$$\dot{\varrho} + \operatorname{div} \vec{J} = \mu^2 (\dot{\Phi} + \operatorname{div} \vec{A}) \tag{2.8}$$

ce qui montre que la conservation de la charge n'est pas une conséquence des équations de Maxwell si $\mu \neq 0$.

Pour donner à l'hamiltonienne $H^0_{\text{e. m.}}$ du champ électromagnétique libre la forme:

$$H^0_{\text{e. m.}} = \sum_{\vec{k}} \sum_{n=1,2,3} a^*_{k,n} a_{k,n} \omega_k \tag{2.9}$$

$$\{a_{k,n}, a^*_{k',n'}\} = i\, \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{n,n'}; \quad \{a_{k,n}, a_{k',n'}\} = 0 \tag{2.10}$$

il faut d'abord décomposer $\vec{E}$ et $\vec{A}$ en parties transversale (t) et longitudinale (l):

$$\vec{E} = \vec{E}^{(t)} + \vec{E}^{(l)}; \quad \vec{A} = \vec{A}^{(t)} + \vec{A}^{(l)}. \tag{2.11}$$

On obtient:

$$H^0_{\text{e. m.}}[\vec{A}, \vec{E}] = \frac{1}{2} \int dV [\vec{A}^{(t)} Y^{-1} \vec{A}^{(t)} + |\vec{E}^{(t)}|^2 + \\ + \mu^{-2} \vec{E}^{(l)} Y^{-1} \vec{E}^{(l)} + \mu^2 |\vec{A}^{(l)}|^2] \tag{2.12}$$

utilisant l'opérateur:

$$Y^{-1} = \mu^2 - \Delta; \quad Y^{-1} e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{x}} = \omega_k^2 e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{x}} \tag{2.13}$$

(2.12) donne (2.9), compte tenu de (2.10), si l'on y introduit des développements en ondes planes. Les développements des composantes transversales ont la forme habituelle:

$$\vec{A}^{(t)} = \sum_{\vec{k}} \sum_{n=1,2} (2 V \omega_k)^{-\frac{1}{2}} [a_{k,n} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} + a^*_{k,n} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}}] \vec{e}_{k,n}{}^*) \tag{2.14}$$

$$\vec{E}^{(t)} = i \sum_{\vec{k}} \sum_{n=1,2} (\omega_k / 2V)^{\frac{1}{2}} [a_{k,n} e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} - a^*_{k,n} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}}] \vec{e}_{k,n}{}^*) \tag{2.15}$$

La masse μ apparaît explicitement dans le développement des composantes longitudinales:

$$\vec{A}^{(l)} = \mu^{-1} \sum_{\vec{k} \neq 0} (\omega_k / 2V)^{\frac{1}{2}} \left[a_{k,3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^*_{k,3}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \vec{e}_{k,3}\,{}^{*)} \tag{2.16}$$

$$\vec{E}^{(l)} = i\,\mu \sum_{\vec{k} \neq 0} (2V\,\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left[a_{k,3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a^*_{k,3}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \vec{e}_{k,3}\,{}^{*)} \tag{2.17}$$

Les trois vecteurs $\vec{e}_{k,n}$ sont orthonormaux, $\vec{e}_{k,3}$ étant parallèle à $\vec{k}$. On vérifie que ces développements conduisent effectivement à (2.9) et que (2.1) est une conséquence de (2.10).

3. La Transformation Canonique.

Nous allons montrer que la transformation canonique (1.2) engendrée par:

$$F[\vec{A}, \varrho] = \int dV\, \varrho \operatorname{div} Y\vec{A} = -\int dV\, \vec{A} \operatorname{grad} Y\varrho \tag{3.1}$$

où Y est l'opérateur intégral associé au potentiel de Yukawa:

$$Y\varrho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int dV(\vec{x}')\, \frac{1}{r}\, e^{-\mu r}\, \varrho(x') \tag{3.2}$$

$$Y^{-1}\, Y - 1 = (\mu^2 - \Delta)\, Y - 1 = 0 \tag{3.3}$$

transforme (1.1) en (1.3) si $H_{\text{e. m.}}$ est donnée par (2.4) et si l'équation de continuité (1.6) est valable. Désignant les champs transformés par $\bar{\vec{A}}, \ldots$, (1.2) et (3.1) donnent:

$$\bar{\vec{A}} = \vec{A} \tag{3.4}$$

$$\bar{\vec{E}} = \vec{E} - \operatorname{grad} Y\varrho \tag{3.5}$$

$$\bar{\varrho} = \varrho\,. \tag{3.6}$$

$\vec{E}$ est maintenant le *champ électrique de radiation*, qui s'obtient en soustrayant de $\bar{\vec{E}}$ le champ de Yukawa dû à la distribution de charge ϱ. Le remplacement de $\vec{A}$, $\vec{E}$ et ϱ par $\bar{\vec{A}}$, $\bar{\vec{E}}$, et $\bar{\varrho}$ dans (2.4)

*) $k_i = 2\pi\, m_i / L_i$; $m_i = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty$. $V = L_1 L_2 L_3$. Les composantes transversales sont définies par $\operatorname{div} \vec{A}^{(t)} = \operatorname{div} \vec{E}^{(t)} = 0$, les développements de $\vec{A}^{(t)}$ et $\vec{E}^{(t)}$ contiennent *trois* polarisations pour $k = 0$, alors qu'il n'existe pas de terme correspondant à $\vec{k} = 0$ dans $\vec{A}^{(l)}$ et $\vec{E}^{(l)}$. Voir équation (3.13).

donne $\bar{H}_{\text{e.m.}}[\bar{\vec{A}}, \bar{\vec{E}}, \bar{\varrho})$; utilisant (3.4)—(3.6), on obtient l'expression de $\bar{H}_{\text{e.m.}}$ en fonction de $\vec{A}$, $\vec{E}$ et ϱ:

$$\begin{aligned}\bar{H}_{\text{e.m.}}[\vec{A},\vec{E},\varrho] = H_{\text{e.m.}}[\bar{\vec{A}},\bar{\vec{E}},\bar{\varrho}] = H^0_{\text{e.m.}}[\vec{A},\vec{E}] + \\ + \int dV \varrho\,[Y - \mu^{-2}(\Delta Y + 1)]\,\operatorname{div}\vec{E} \qquad (3.7)\\ + \frac{1}{2}\int dV \varrho\,[-Y\Delta Y + \mu^{-2}(\Delta Y)^2 + \mu^{-2}(2\Delta Y + 1)]\,\varrho.\end{aligned}$$

Le deuxième terme (couplage entre $\vec{E}$ et ϱ) est nul en vertu de (3.3). En appliquant deux fois l'identité (3.3) on réduit le troisième terme à $\frac{1}{2}\int dV\,\varrho\,Y\varrho$. Ainsi, la transformée de $H_{\text{e.m.}}$, exprimée en termes des grandeurs initiales, est identique à la somme des deux premiers termes de (1.2).

Pour le troisième terme de (1.2), on démontre l'identité, terme à terme, des deux développements:

$$\begin{aligned}\bar{H}_{\text{mat.}}[p,q,\vec{A}] = H_{\text{mat.}}[p,q,\vec{A}] + \{F, H_{\text{mat.}}\} + \\ \frac{1}{2!}\{F,\{F,H_{\text{mat.}}\}\} + \cdots \qquad (3.8)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}H_{\text{mat.}}[p,q,\vec{A}^{(r)}] = H_{\text{mat.}}[p,q,\vec{A}] + \int dV \sum_i \frac{\delta H_{\text{mat.}}}{\delta A_i} D_i \\ + \frac{1}{2!}\int dV \int dV' \sum_i \sum_{i'} \frac{\delta^2 H_{\text{mat.}}}{\delta A_i\,\delta A'_{i'}} D_i D'_{i'} + \cdots \qquad (3.9)\end{aligned}$$

avec $\vec{A}^{(r)} = \vec{A} + \vec{D}$, et où l'on a écrit $\vec{A}$, $\vec{A}'$ pour $\vec{A}(\vec{x})$ et $\vec{A}(\vec{x}')$. Cette démonstration utilise (1.6) et (1.7). Pour la première parenthèse de (3.8) on trouve:

$$\begin{aligned}\{F, H_{\text{mat.}}\} = -\int dV\,\dot{\varrho}\,\operatorname{div} Y\vec{A} = \int dV \operatorname{div}\vec{J}\operatorname{div} Y\vec{A} = \\ = -\int dV\,\vec{J}\operatorname{grad}\operatorname{div} Y\vec{A} = \int dV \frac{\delta H_{\text{mat.}}}{\delta \vec{A}} \cdot \Delta Y \vec{A}^{(l)}. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Les développements (3.8) et (3.9) sont donc identiques au premier ordre si: $\vec{D} = \Delta Y\,\vec{A}^{(l)}$, c'est-à-dire:

$$\vec{A}^{(r)} = \vec{A}^{(t)} + \vec{A}^{(l)} + \Delta Y \vec{A}^{(l)} = \vec{A}^{(t)} + \mu^2 Y \vec{A}^{(l)}. \qquad (3.11)$$

En vertu de (cf. 2.13):

$$Y e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \omega_k^{-2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad (3.12)$$

le développement de $\vec{A}^{(r)}$ s'écrit:

$$\vec{A}^{(r)}\vec{x} = \sum_{\vec{k}} (2V\omega_k)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{n=1,2} a_{k,n}\vec{e}_{k,n} + \frac{\mu}{\omega_k} a_{k,3}\vec{e}_{k,3}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \text{compl. conj.}\right]. \tag{3.13}$$

Les amplitudes longitudinales apparaissent réduites par le facteur μ/ω_k. Vu la définition des sommes sur $\vec{k}$ (cf. la note relative à l'éq. (2.14)), l'onde longitudinale ne contient pas de terme correspondant à $\vec{k} = 0$ (pour lequel $\mu/\omega_k = 1$). Ainsi, dans la limite $\mu \to 0$, on a rigoureusement:

$$\lim_{\mu\to 0} (\vec{A}^{(r)} - \vec{A}^{(t)}) = \lim_{\mu\to 0} \mu^2\, Y\vec{A}^{(l)} = 0 \tag{3.14}$$

c'est-à-dire: le champ de radiation qui intéragit avec la matière est uniquement composé de la composante transversale $\vec{A}^{(t)}$.

Pour les termes suivants de (3.8), on a:

$$\{F, \{F, H_{\text{mat.}}\}\} = \int dV \left\{F, \frac{\delta H_{\text{mat.}}}{\delta \vec{A}}\right\} \vec{D} =$$

$$= \int dV \int dV' \sum_i \sum_{i'} \frac{\delta^2 H_{\text{mat.}}}{\delta A_i\, \delta A'_{i'}} D_i D'_i, \text{ etc.} \tag{3.15}$$

du fait que $\{F, \vec{D}\} = 0$. Remarquons pour terminer que des calculs analogues donnent pour le courant transformé, à l'aide de (1.7), l'expression:

$$\vec{\bar{J}} = \vec{J}[p, q, \vec{A}^{(r)}]. \tag{3.16}$$

Références.

1) L. Bass et E. Schroedinger, Proc. Roy. Soc. **A 232,** 1 (1955).
2) E. C. G. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta **14,** 51 (1941), formule (3.9), p. 63.
3) F. Coester, Phys. Rev. **83,** 788 (1951).
4) H. Umezawa, Progr. Theor. Phys. **7,** 551 (1952).
5) R. J. Glauber, Prog. Theor. Phys. **9,** 295 (1953).
6) E. G. G. Stueckelberg et A. Petermann, Helv. Phys. Acta **26,** 499 (1953), équations (5.16) et (5.17).