Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 29 (1956)

Heft: [4]: Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory

Artikel: La solution générale des équations d'Einstein

Autor: Tonnelat, M.A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112742

La solution générale des équations d'Einstein

$$g_{\underset{+-}{\mu\nu};\rho} = 0$$

par Mme M. A. TONNELAT (Paris)

1. Au moyen d'un principe variationnel, la théorie d'EINSTEIN-SCHROEDINGER permet de déduire d'une densité

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) \qquad \mathfrak{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \cdot g^{\mu\nu}$$

deux groupes d'équations. Le premier – le seul auquel nous nous intéressons ici – découle des variations $\delta \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ de la connexion affine. Il peut toujours se ramener aux 64 équations

$$\mathfrak{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\varrho} = 0. \tag{1}$$

Pour ne pas restreindre *a priori* la généralité du problème, nous allons considérer ici l'ensemble des 64 équations (1) en supposant qu'elles se rapportent à une connexion tout à fait quelconque. Soit $\Delta^{\varrho}_{\mu\nu}$ cette connexion.

Les équations (1) s'écrivent encore

$$g_{\underset{+-}{\mu\nu};\varrho} \equiv \partial_\varrho g_{\mu\nu} - \Delta^{\sigma}_{\mu\varrho} g_{\sigma\nu} - \Delta^{\sigma}_{\varrho\nu} g_{\mu\sigma} = 0\,. \tag{2}$$

La solution de ces équations doit expliciter complètement la valeur de la connexion affine en fonction des champs $g_{\mu\nu}$ et de leur derivées premières.

Nous avons donné en 1949—51 la solution générale des équations (2). Depuis, plusieurs auteurs se sont attaqués à ce problème sans avoir eu connaissance de nos résultats et sans parvenir, semble-t-il, à une solution tout à fait explicite en fonction du tenseur fondamental.

2. Ecrivons la décomposition du tenseur $g_{\mu\nu}$ en parties symétrique et antisymétrique sous la forme suivante:

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu} \tag{3}$$

et appelons g,γ et φ les déterminants formés par les $g_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$; $gg^{\mu\nu}$, $\gamma\gamma^{\mu\nu}$ et $\varphi\varphi^{\mu\nu}$ les mineurs relatifs à ces mêmes éléments.

La connexion affine quelconque $\Delta^{\varrho}_{\mu\nu}$ peut s'écrire

$$\Delta^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ {\varrho \atop \mu\,\nu} \right\}_{\gamma} + u^{\varrho}_{\mu\nu} + \Delta^{\varrho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \tag{4}$$

et comprend 3 parties.

a) La première $\left\{ {\varrho \atop \mu\,\nu} \right\}_{\gamma}$ représente les symboles de Christoffel formés avec la partie symétrique $\gamma_{\mu\nu}$ du tenseur fondamental. C'est donc une quantité connue.

b) La seconde $u^{\varrho}_{\mu\nu}$ désigne le reste de la partie symétrique de la connexion affine. Elle s'exprime complètement de la manière suivante en fonction de la partie antisymétrique

$$u^{\varrho}_{\mu\nu} = -\gamma^{\varrho\sigma} \left(\varphi_{\mu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\sigma}} + \varphi_{\nu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\sigma}} \right). \tag{5}$$

Tout revient donc finalement à déterminer les 24 coefficients antisymétriques $\Delta^{\varrho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$.

c) Les coefficients antisymétriques $\Delta_{\underset{\vee}{\mu\nu},\,\varrho} = \gamma_{\varrho\sigma} \Delta^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ ont l'expression suivante en fonction du tenseur fondamental:

Introduisons tout d'abord la divergence cyclique:

$$\varphi_{\mu\nu\varrho} = \partial_{\mu}\varphi_{\nu\varrho} + \partial_{\varrho}\varphi_{\mu\nu} + \partial_{\nu}\varphi_{\varrho\mu} \tag{6}$$

et aussi la divergence

$$f^{\lambda} = \gamma^{\lambda\sigma} f_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \partial_{\mu}\left(\sqrt{-g} \cdot g^{\underset{\vee}{\lambda\mu}}\right) \tag{7}$$

cette dernière quantité étant nulle ($f_{\lambda} = 0$) quand on part du tenseur de Ricci.

Définissons ensuite la quantité suivante:

$$
\begin{aligned}
R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = & -\frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\varrho} + \nabla_\varrho\varphi_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\,\varphi^{*}_{[\mu\nu]\varrho} + \frac{\sqrt{\varphi}}{4\sqrt{-\gamma}}\,\varphi^{*}_{\mu\nu}\varphi^{\sigma\tau}\varphi_{\sigma\tau\varrho} \\
& -\varphi_{\mu\nu}\,\partial_\varrho \log\frac{g}{\gamma} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\varphi^{\lambda\sigma}\,\partial_\lambda\log\frac{g}{\gamma} - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}}\,\varepsilon^{*}_{[\mu\nu]\varrho\lambda}\varphi^{\sigma\lambda}\,\partial_\sigma\log\frac{g}{\varphi} \\
& + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\,\varphi^{*}_{\mu\nu}\,\partial_\varrho\log\frac{g}{\varphi} \qquad\qquad (8) \\
& + \gamma^{\sigma\lambda}\Big\{\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}(f_\lambda - f_{\bar{\bar{\lambda}}}) + \varphi_{\lambda\varrho}\big[\varphi_{\mu\nu}(f_\sigma - f_{\bar{\bar{\sigma}}}) + \varphi_{\sigma\mu}(f_\nu - f_{\bar{\bar{\nu}}}) + \\
& \qquad\qquad + \varphi_{\nu\sigma}(f_\mu - f_{\bar{\bar{\mu}}})\big]\Big\}
\end{aligned}
$$

où ne figurent que des quantités connues, ∇_ϱ désignant la dérivation covariante écrite avec les symboles $\left\{ {\varrho \atop \mu\nu} \right\}_\gamma$. Les astérisques et barres représentent

$$
\begin{aligned}
\varphi^{*}_{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\gamma^{\varrho\lambda}\gamma^{\sigma\pi}\varphi_{\lambda\pi} \\
\varphi^{*}_{[\mu\nu]\varrho} &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\gamma^{\sigma\pi}\varphi_{\tau\pi\varrho} \qquad (9) \\
f_{\bar{\bar{\varrho}}} &= \varphi_{\varrho\sigma}\gamma^{\sigma\lambda}\varphi_{\lambda\tau}\gamma^{\tau\mu}f_\mu\,.
\end{aligned}
$$

Les mêmes notations avec astérisques et barres sont introduites pour la quantité $R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$, c'est à dire

$$
\begin{aligned}
R^{*}_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} &= \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}\gamma^{\lambda\sigma}\gamma^{\tau\pi}R_{\underset{\smile}{\sigma\pi},\varrho} \qquad (10) \\
R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\bar{\bar{\varrho}}} &= \varphi_{\varrho\sigma}\gamma^{\sigma\lambda}\varphi_{\lambda\pi}\gamma^{\pi\tau}R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\tau}
\end{aligned}
$$

et l'on peut définir

$$
S_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = \left(2 - \frac{g}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right)R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\,R^{*}_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} - R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\bar{\bar{\varrho}}}\,. \qquad (11)
$$

Dans ces conditions la partie antisymétrique $\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = \gamma_{\varrho\sigma}\,\Delta^{\sigma}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ de la connexion affine s'écrit simplement

$$
(a^2 + b^2)\,\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = a\,S_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} + b\,S^{*}_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} \qquad (12)
$$

avec

$$
a = 2 - \frac{g}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}, \qquad b = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\left(3 - \frac{g}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right). \qquad (13)
$$

La connexion affine totale s'écrit donc

$$\Delta^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{\gamma} - \gamma^{\varrho\sigma} \left(\varphi_{\mu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\smile}{\nu\sigma}} + \varphi_{\nu\lambda} \Delta^{\lambda}_{\underset{\smile}{\mu\sigma}}\right) + \Delta^{\varrho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}} \tag{14}$$

$\Delta^{\varrho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ s'exprimant en fonction de $R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$, c'est à dire de quantités où figure explicitement et uniquement le tenseur fondamental.

3. Les conditions d'existence de la solution $\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ sont immédiates. Si l'on suppose, comme il est naturel de le faire, $\gamma \neq 0$, ces conditions se réduisent à

$$g\,(a^2 + b^2) \equiv g\left[\left(2 - \frac{g}{\gamma} + 6\,\frac{\varphi}{\gamma}\right)^2 - 4\,\frac{\varphi}{\gamma}\left(3 - \frac{g}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right)^2\right] \neq 0\,. \tag{15}$$

4. Examinons rapidement l'application de cette solution générale à 3 cas particuliers:

a) Si $\varphi_{\mu\nu} = 0$, les quantités $R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ donc $S_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ donc $\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho}$ sont identiquement nulles et la connexion se réduit à la valeur purement riemannienne

$$\Delta^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \varrho \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}. \tag{16}$$

Si, d'une façon moins radicale, on a $\varphi = 0$ la connexion est simplement

$$a\,\Delta_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = a\,R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} - R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\bar{\bar{\varrho}}} \tag{17}$$

avec

$$\begin{aligned} R_{\underset{\smile}{\mu\nu},\varrho} = & -\frac{1}{2}\,\varphi_{\mu\nu\varrho} + \nabla_{\varrho}\,\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{8\sqrt{-\gamma}}\,\overset{*}{\varphi}_{\mu\nu}\,\varepsilon^{\sigma\tau\lambda\pi}\,\varphi_{\lambda\pi}\,\varphi_{\sigma\tau\varrho} \\ & -\varphi_{\mu\nu}\,\partial_{\varrho}\log\frac{g}{\gamma} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{\mu\nu}\partial_{\varrho} + \varphi_{\varrho\mu}\partial_{\nu} + \varphi_{\nu\varrho}\partial_{\mu}\right)\log\frac{g}{\gamma} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda}\,\varphi_{\lambda\varrho}\left[\varphi_{\mu\nu}\,(f_{\sigma} - f_{\bar{\bar{\sigma}}}) + \varphi_{\sigma\mu}\,(f_{\nu} - f_{\bar{\bar{\nu}}}) + \varphi_{\nu\sigma}\,(f_{\mu} - f_{\bar{\bar{\mu}}})\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Les conditions d'existence (15) se ramènent alors aux suivantes

$$a = 2 - \frac{\gamma}{g} = 1 - \frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\varrho}\,\gamma^{\nu\sigma}\,\varphi_{\mu\nu}\,\varphi_{\varrho\sigma} \neq 0\,. \tag{19}$$

Ceci est en particulier valable dans le cas où l'on choisit un système de référence dans lequel un seul des champs — φ_{pq} ou φ_{p4} — disparaît.

b) Dans le cas particulier d'une symétrie sphérique, et si l'on choisit pour le tenseur $g_{\mu\nu}$ la forme indiquée par PAPAPETROU

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & w \\ 0 & -\beta & f\sin\vartheta & 0 \\ 0 & -f\sin\vartheta & -\beta\sin^2\vartheta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{20}$$

la substitution de cette forme particulière dans la solution générale conduit dans le cas statique aux valeurs de la connexion affine calculées directement par BONNOR dans ce cas particulier. Dans le cas non-statique on obtient une généralisation immédiate des valeurs trouvées par BONNOR.

Enfin la substitution des valeurs particulières dans la condition générale d'existence conduit à

$$g\left[\left(1-\frac{f^2}{\beta^2}\right)^2 + 4\,\frac{w^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2}\right]\left[\left(1+\frac{w^2}{\alpha\sigma}\right)^2 + 4\,\frac{w^2 f^2}{\alpha\sigma\beta^2}\right] \neq 0 \tag{21}$$

trouvée directement par BONNOR dans ce cas particulier. La solution particulière déterminée par BONNOR constitue donc un test convaincant pour la validité de la solution générale.

c) On peut trouver à partir de la solution générale les valeurs approchées de la connexion affine et par conséquent des équations du champ sans qu'il soit besoin de passer par une série d'approximations successives.

Si l'on se borne au 2-ème ordre d'approximation on retrouve les résultats indiqués d'une part par EINSTEIN et Mme KAUFMAN, d'autre part par SCHROEDINGER. On peut assez facilement écrire les équations au 3-ème et 4-ème ordre d'approximation.

Ceci est le travail de 1949. J'ajoute la remarque finale suivante: Les équations résolues ici

$$g_{\underset{+\,-}{\mu\nu};\varrho} = 0 \tag{2}$$

font intervenir la décomposition du tenseur fondamental

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Pour des raisons pertinentes, LICHNEROWICZ associe les grandeurs physiques de la théorie — métrique et champ électromagnétique — au tenseur contravariant $g^{\mu\nu}$ que nous écrirons

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}. \tag{3'}$$

On peut en principe, passer de la solution de (2) en $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$ à la solution de $\overset{\mu\nu}{g}{}_{+-;\varrho} = 0$ en $h^{\mu\nu}$, $f^{\mu\nu}$ en utilisant les relations fondamentales entre les $\gamma_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}$, $h^{\mu\nu}$, $f^{\mu\nu}$. Mais ce procédé s'avère pratiquement inextricable et il est plus simple de chercher directement la solution de (2'). Ce travail a été fait par un de mes collaborateurs Stamatia Mavrides et vient d'être publié. La résolution de (2') est plus pénible encore que celle de (2) mais la solution — c'est à dire l'expression de la connexion affine $\Delta^{\varrho}_{\mu\nu}$ en fonction des champs contravariants est aussi simple. Elle permet de passer aisément, soit à des solutions particulières — à symétrie sphérique ou cylindrique — exprimées en fonction des $h^{\mu\nu}$ et $f^{\mu\nu}$, soit à des valeurs approchées à quelque ordre que ce soit sans approximations successives.

Bibliographie

Bose., S. N., Ann. of Mathematics, *59*, 1952. p. 171.

Hlavaty, Proc. Nat. Acad. Sci., *38*, 1952, p. 415 et 1952.

Mavrides, S., C. R. Acad. Sci. *241*, 1955, p. 173.

Tonnelat, M. A., C. R. Acad. Sci., *230*, 1950, p. 182, *231*, 1950, p. 470, 487 et 512; *239*, 1954, p. 1468; Journ. Phys. Rad. *12*, 1951 p. 81; *13*, 1952, p. 177; *16*, 1955, p. 21; La théorie du champ unifié (Gauthier Villars, 1955).