

Zeitschrift:	Helvetica Physica Acta
Band:	29 (1956)
Heft:	[4]: Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory
Artikel:	Problèmes généraux d'intégration des équations de la relativité
Autor:	Lichnerowicz, André
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-112741

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Problèmes généraux d'intégration des équations de la relativité

par ANDRÉ LICHNEROWICZ (Collège de France)

Je me propose, dans cette conférence, de montrer quels sont les problèmes posés par l'étude mathématique des équations relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme et d'indiquer les principaux résultats obtenus dans cette voie au cours des dernières années. Cette conférence sera consacrée principalement à la relativité générale ‘classique’, mais, chemin faisant, je serai conduit à montrer que les problèmes mathématiques posés par les théories unitaires, qu’elles soient du type JORDAN-THIRY ou non symétriques, ne diffèrent guère de ceux concernant la relativité générale. Comme nous le verrons, les quelques faits mathématiques mis en évidence par ces théories contribuent à jeter quelques lueurs sur la difficulté fondamentale des théories unitaires: obtenir une interprétation physique précise des éléments des schémas géométriques raffinés qu’elles mettent en jeu.

J’ajouterais que l’esprit de mon exposé sera celui du physicien mathématicien.

1. La Structure des équations du champ

1. La variété espace-temps.

Dans toute théorie relativiste du champ gravitationnel, l’élément primitif est constitué par une variété «espace-temps» V_4 à 4 dimensions, douée d’une structure de variété différentiable qu’il semble désormais essentiel de préciser.

Pour des raisons étroitement liées à la covariance du formalisme et qui apparaîtront en détail par l’analyse des équations du champ gravitationnel, nous sommes amenés à supposer que dans l’intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées admissibles, les coordonnées locales d’un point dans l’un des systèmes sont des fonctions 4 fois dérivables, à jaco-

bien non nul, des coordonnées de ce point dans l'autre système, les dérivées premières et secondes étant continues, les dérivées troisièmes ou quatrièmes étant seulement continues par morceaux.

Nous traduirons ceci en disant que la variété V_4 est (C^2 , C^4 par morceaux).

Sur V_4 est définie une métrique riemannienne ds^2 , de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs. L'expression locale de cette métrique dans un système de coordonnées admissibles est:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta \text{ et tout indice grec } = 0, 1, 2, 3). \quad (1)$$

Le „tenseur de gravitation“ $g_{\alpha\beta}$ est supposé exactement (C^1 , C^3 par morceaux), ce qui est strictement compatible avec la structure imposée à V_4 . Toute précision globale supplémentaire de la structure différentiable ou de la métrique, au point de vue différentiabilité, doit être considérée comme dépourvue de sens physique.

L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point x de V_4 un cône réel C_x , le cône élémentaire en x . Son intérieur et son extérieur définissent respectivement pour une direction l'orientation dans le temps et l'orientation dans l'espace. Pour qu'une hypersurface Σ , définie localement par $f(x^\alpha) = 0$, soit orientée dans l'espace il faut et il suffit que

$$\Delta_1 f = g^{\alpha\beta} \delta_\alpha f \delta_\beta f > 0 \quad \left(\delta_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right). \quad (2)$$

Si la ligne L , orientée dans le temps, est représentée par $x^i = \text{const.}$ (i et tout indice latin $= 1, 2, 3$), on a $g_{00} > 0$ et les formes quadratiques, duales l'une de l'autre, de coefficients

$$g_{ij}^* = g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \quad g^{*ij} = g^{ij} \quad (3)$$

sont définies négatives.

La variété V_4 n'est pas topologiquement quelconque puisqu'elle admet un champ métrique de type hyperbolique normal; par recours à une métrique elliptique on voit que V_4 admet certainement un champ de directions orientées dans le temps. Les trajectoires de ce champ fournissent *un système global de «dignes de temps»*.

Lorsque des considérations topologiques sont nécessaires, on admet bien souvent, plus ou moins explicitement, que V_4 est le produit topologique d'une variété V_3 à 3 dimensions par une variété à 1 dimension, les sous-variétés facteurs de dimension 1 étant dans V_4 orientées dans le temps. Dans ce cas, pour beaucoup de problèmes, seule la topologie de V_3

importe. Les cas usuels sont ceux où V_3 est homéomorphe à l'espace ordinaire R^3 ou bien est une variété compacte.

Les différentes hypothèses explicitées sur la métrique (1) caractérisent les métriques dites *régulières*.

2. Les équations d'EINSTEIN de la relativité générale

Je désignerai dans la suite par $R_{\alpha\beta}$ le tenseur de RICCI de la métrique (1) et poserai

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (R + 2\lambda) \quad (\lambda \text{ constante cosmologique}).$$

Les équations d'EINSTEIN qui, dans le cadre de la relativité générale, limitent la généralité de la métrique peuvent s'écrire:

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$, qui joue le rôle de source du champ, décrit au mieux au point considéré de V_4 l'état de l'énergie (cas intérieur) ou bien, dans les régions non balayées par l'énergie, est identiquement nul (cas extérieur). Il généralise ainsi le second membre de l'équation de POISSON.

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$, d'origine géométrique, qui ne dépend que des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres, est linéaire par rapport aux dérivées du second ordre et satisfait aux *identités de conservation*

$$\nabla_\beta S_\alpha^\beta = 0 \quad (\nabla_\beta \text{ opérateur de dérivation covariante}). \quad (5)$$

Le système des équations d'EINSTEIN présentant, comme nous allons le voir, le caractère hyperbolique normal, le premier problème que nous devons nous poser est le problème de CAUCHY qui est étroitement lié au déterminisme relativiste. Nous commencerons par une étude élémentaire locale et, pour nous réduire à l'essentiel, nous n'introduirons pas de second membre et n'envisagerons que le problème de CAUCHY extérieur. Son étude préalable est d'ailleurs nécessaire pour le problème de CAUCHY avec second membre. Notre problème est donc le suivant: *Problème. Etant donné, sur une hypersurface Σ , les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières, déterminer en dehors de Σ les potentiels supposés satisfaire aux équations d'EINSTEIN du cas extérieur.*

Sur Σ , représentée localement par $x^0 = 0$, les «données de CAUCHY» sont les valeurs des $g_{\alpha\beta}$ et des $\delta_0 g_{\alpha\beta}$. Nous désignerons par $f(d \cdot C)$ une fonction dont la valeur sur Σ peut se déduire des données de CAUCHY par des opérations algébriques et des dérivations le long de Σ .

Nous supposerons pour le moment Σ orientée dans l'espace ($g^{00} > 0$). Si l'on cherche à mettre en évidence, dans les équations d'EINSTEIN, les dérivées secondes $\delta_{00} g_{\alpha\beta}$ dont les valeurs sur Σ demeurent inconnues, on est conduit à remplacer ces équations par le système équivalent composé des deux groupes d'équations :

$$R_{ij} - \lambda g_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \delta_{00} g_{ij} + F_{ij} (d \cdot C) = 0 \quad (6)$$

$$S_a^0 \equiv G_a (d \cdot C) = 0 \quad (7)$$

Une condition nécessaire pour que le problème de CAUCHY soit possible est que les équations (7) soient satisfaites sur Σ par les données de CAUCHY. D'autre part g^{00} étant $\neq 0$, les équations (6) fournissent les valeurs sur Σ des $\delta_{00} g_{ij}$. Aucune équation ne contient les 4 dérivées $\delta_{00} g_{\lambda 0}$ et il nous faut analyser ce fait.

Notre étude purement locale a été faite dans le domaine d'un certain système de coordonnées. Mais la donnée sur Σ , dans le domaine envisagé, des données de CAUCHY laisse subsister la possibilité de changement de coordonnées conservant les valeurs numériques des coordonnées de tout point de S ainsi que les données de CAUCHY. Le changement de coordonnées

$$x^{\lambda'} = x^\lambda + \frac{(x^0)^3}{6} [\varphi^{(\lambda)}(x^i) + \varepsilon^{(\lambda)}] \quad (\lambda' = \lambda \text{ numériquement}) \quad (8)$$

où $\varepsilon^{(\lambda)}$ est infiniment petit en même temps que x^0 , répond à la question. Dans un tel changement de coordonnées, les dérivées $\delta_{00} g_{ij}$ ne sont pas modifiées, tandis que les $\delta_{00} g_{\lambda 0}$ peuvent recevoir des valeurs arbitraires. En utilisant un changement de coordonnées où les $\varphi^{(\lambda)}$ sont différents de part et d'autre de Σ , ce qui est permis par la structure choisie pour V_4 , on peut faire apparaître ou disparaître des discontinuités éventuelles de ces dérivées secondes, discontinuités qui sont donc dépourvues de toute signification physique. Ainsi les $\delta_{00} g_{ij}$ sont continues à la traversée de Σ et on peut astreindre les $\delta_{00} g_{\lambda 0}$ à l'être aussi pour un système de coordonnées convenables.

Nous saisissons là le mécanisme qui relie la covariance du formalisme à la structure choisie pour V_4 . Ceci posé, il est facile de voir que le système des équations d'EINSTEIN est en involution: si un ds^2 satisfait aux équations (6) et, sur Σ , aux équations (7), il satisfait aussi en dehors de Σ aux équations (7). Ceci est une conséquence immédiate des identités de conservation (5). Notre problème initial doit être ainsi partagé en deux problèmes distincts: *Problème I ou des conditions initiales*. Il consiste dans la recherche de données de CAUCHY satisfaisant sur Σ au système $S_a^0 = 0$ ou système des conditions initiales. *Problème II ou problème de*

l'évolution. Il consiste dans l'intégration du système (6) pour des données de CAUCHY satisfaisant aux conditions du premier problème.

Les résultats de cette première analyse ne sont pas totalement modifiés si Σ est orientée dans le temps. Au contraire si Σ est tangente au cône élémentaire, c'est-à-dire si $g^{00} = 0$, les dérivées secondes des potentiels d'une solution des équations d'EINSTEIN peuvent être discontinues à la traversée de Σ ; il peut exister une infinité de solutions des équations d'EINSTEIN correspondant aux mêmes données de CAUCHY sur Σ . On reconnaît là des résultats classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles concernant les *variétés caractéristiques* (ou fronts d'onde). Ainsi C_x est cône caractéristique pour les équations d'EINSTEIN et les variétés caractéristiques sont les variétés tangentes à ces cônes; ce sont les solutions de

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \delta_\alpha f \delta_\beta f = 0.$$

On en déduit immédiatement que les *bicaractéristiques* – ou rayons – sont les géodésiques de longueur nulle du ds^2 . Celles de ces courbes qui sont issues d'un point x de V_4 engendrent les deux nappes du *conoïde caractéristique* de sommet x .

Dans le cas du problème de CAUCHY intérieur, avec un schéma fluide par exemple, une analyse analogue peut être faite, mais à (7) se trouvent substituées les équations

$$S_a^0 = \chi T_a^0$$

qui relient *sur* Σ les données de CAUCHY et les éléments matériels. Le problème d'intégration concerne alors un système du type (2–3) mais avec un second membre et les équations de conservation

$$\nabla_\beta T_a^\beta = 0.$$

On met en évidence trois sortes de variétés exceptionnelles: les ondes de gravitation, les variétés engendrées par des lignes de courant, les ondes hydrodynamiques.

Toujours dans le cadre de la relativité générale, nous pouvons introduire le champ électromagnétique astreint à satisfaire aux équations de MAXWELL et apportant, au second membre des équations d'EINSTEIN une contribution. L'analyse du problème de CAUCHY pour les équations de MAXWELL montre que, dans le cas du vide, C_x est encore cône caractéristique pour ces équations ce qui établit l'identité des propagations des deux champs; mais ici toutes les dérivées premières du champ électromagnétique sur une hypersurface non tangente à une caractéristique, peuvent être déterminées.

3. Les équations de la théorie unitaire de JORDAN-THIRY¹⁾

Dans la théorie de JORDAN-THIRY, l'élément initial est constitué par une variété différentiable V_5 de classe (C^2 , C^4 par morceaux) munie d'une métrique $d\sigma^2$ que je supposerai *hyperbolique normale* et admettant un groupe à 1 paramètre d'isométries de V_5 , ne laissant invariant aucun point, à trajectoires homéomorphes à un cercle et orientées $d\sigma^2 < 0$.

La variété V_4 quotient de V_5 par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries est identifiée à la variété différentiable espace-temps de la relativité générale. Par passage au quotient, on déduit de la métrique de V_5 une métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ de type hyperbolique normal, une forme antisymétrique $\beta F_{\alpha\beta}$ ($\beta = \text{const.}$) à différentielle extérieure nulle et un scalaire ξ intrinsèquement défini sur V_4 . Volontairement, je ne discuterai pas pour le moment les interprétations physiques que l'on peut donner de ce schéma.

Comme équations de champ, on adoptera dans V_5 des équations identiques à celles de la relativité générale (4). Traduites dans V_4 , ces équations s'écrivent dans le cas dit unitaire extérieur :

$$\left. \begin{aligned} S_{\alpha\beta} - \frac{\beta^2 \xi^2}{2} \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} F^2 - F_\alpha^\varrho F_{\beta\varrho} \right] - \frac{1}{\xi} [\nabla_\alpha (\delta_\beta \xi) - g_{\alpha\beta} \Delta \xi] &= 0 \\ \nabla_\beta (\xi^3 F_\alpha^\beta) &= 0 \\ \frac{1}{\xi} \Delta \xi + \frac{\beta^2 \xi^2}{2} F^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Pour $\xi = 1$ les 14 premières équations se réduisent aux équations du schéma champ électromagnétique pur de la relativité générale (théorie de KALUZA-KLEIN). L'analyse du problème de CAUCHY pour une hypersurface de V_5 engendrée par des trajectoires du groupe d'isométries ainsi que sa décomposition sont semblables aux précédentes, les variétés exceptionnelles dans V_4 étant toujours les variétés tangentes aux cônes élémentaires $ds^2 = 0$.

4. Les équations de la théorie unitaire non symétrique²⁾

Dans la théorie unitaire non symétrique, nous nous donnons, sur une variété différentiable V_4 toujours de classe (C^2 , C^4 par morceaux),

¹⁾ un champ de tenseurs non symétriques $g_{\alpha\beta}$ de classe (C^1 , C^3 par morceaux) à déterminant $g \neq 0$ et dont la forme quadratique associée est hyperbolique normale,

¹⁾ GONSETH et JUVET ont aussi étudié, dans un travail classique, une théorie pentadimensionnelle.

²⁾ () et [] sont les symboles de symétrisation et antisymétrisation.

2^o une connexion affine de classe (C^0 , C^2 par morceaux) dont nous désignerons par S_a le vecteur de torsion.

$R_{\alpha\beta}$ étant le tenseur de RICCI de la connexion, les équations du champ peuvent être fondées sur un principe variationnel portant sur l'intégrale

$$I = \int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^3$$

et qui généralise le principe variationnel de la relativité générale. En substituant à la connexion initiale la connexion à vecteur de torsion nulle admettant le même parallélisme, on obtient les équations du champ sous une forme commode qui fait intervenir les $g_{\alpha\beta}$, la nouvelle connexion $L_{\beta\gamma}^a$, et le vecteur S_a . Selon une étude due à Madame TONNELAT et à HLAVATY, l'un des systèmes partiels fournit algébriquement, sauf dans un cas exceptionnel que nous écartons, la connexion en fonction des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières. On est ainsi amené à définir le champ par l'ensemble $(g_{\alpha\beta}, S_a)$ astreint aux équations.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\delta_\alpha S_\beta - \delta_\beta S_\alpha) = 0 \quad \delta_\varrho (g^{[\varrho\beta]} \sqrt{|g|}) = 0 \quad (9)$$

où $R_{\alpha\beta}$ est maintenant relatif à la nouvelle connexion et considéré comme fonction des $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres.

L'existence d'un principe variationnel entraîne, selon un procédé classique, celle d'identités de conservation. D'autre part à l'aide du changement de coordonnées déjà utilisé en relativité générale, on peut voir sans calculs explicites qui seraient inextricables, quelles dérivées secondes relatives à une hypersurface Σ interviennent dans $R_{\alpha\beta}$. Par une étude trop longue pour être donnée ici, ces résultats permettent d'établir que le système (9) est en involution et que moyennant l'introduction d'une condition auxiliaire de normalisation de S_a , par exemple

$$\delta_\alpha (g^{(\alpha\beta)} S_\beta \sqrt{|g|}) = 0,$$

il présente la même cohérence mathématique locale que le système des équations de la relativité générale; en particulier les valeurs des δ_{00} ($g^{(0\lambda)} \sqrt{|g|}$) sur Σ ($x^0 = 0$) ne peuvent intervenir.

Le principal résultat de cette étude est que (9) admet les variétés caractéristiques définies par la forme quadratique de type hyperbolique normal de coefficients

$$l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}$$

et qui diffère de la forme quadratique interprétée par EINSTEIN comme

définissant la partie gravitationnelle. Les bicaractéristiques sont ici les géodésiques de longueur nulle de

$$ds^2 = l_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

où $l_{\alpha\beta}$ est dual de $l^{\alpha\beta}$. Un second cône défini par une combinaison linéaire $\gamma_{\alpha\beta}$ de $l_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$ apparaît aussi¹⁾. Cette étude conduit ainsi à penser que c'est $l^{\alpha\beta}$ ou un tenseur proportionnel qui doit être interprété comme tenseur gravitationnel.

2. Existence et unicité pour les équations du champ

5. Le théorème de Mme FOURÈS

L'étude précédente conduit naturellement à rechercher, sans hypothèses d'analyticité, des théorèmes d'existence et d'unicité au moins locaux pour les problèmes d'évolution des différentes théories. C'est là un difficile problème de la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles et c'est en vue de ce problème que Madame FOURÈS a étudié les systèmes du type suivant:

$$E_S \equiv A^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} W_S + f_S = 0 \quad (S = 1, 2, \dots, N)$$

Les W sont des fonctions inconnues de 4 variables indépendantes x^α , les $A^{\alpha\beta}$ et f_S des fonctions données des W_R , $\delta_\alpha W_R$ et des x^α , la forme quadratique $A^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ est de type hyperbolique normal. Sur l'hypersurface $\Sigma (x^0 = 0)$ les données de CAUCHY sont:

$$W_S(x^i, 0) = \varphi_S(x^i) \quad \delta_0 W_S(x^i, 0) = \psi_S(x^i)$$

Sur le système (E_S) et les données de CAUCHY les hypothèses suivantes sont faites:

1⁰ Dans un voisinage D_0 de Σ entourant un point y de coordonnées (y^i) et défini par $|x^i - y^i| \leq d$, φ_S et ψ_S admettent des dérivées jusqu'aux ordres 6 et 5, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de LIPSCHITZ.

2⁰ Dans un domaine D défini par $|x^i - y^i| \leq d$, $|x^0| \leq \varepsilon$ et pour des valeurs des inconnues telles que:

$$|W_S - \varphi_S| \leq 1 \quad |\delta_i W_S - \delta_i \varphi_S| \leq 1 \quad |\delta_0 W - \psi_S| \leq 1,$$

a) les $A^{\alpha\beta}$ et f_S admettent des dérivées jusqu'à l'ordre 5 continues, bornées et satisfaisant à des conditions de LIPSCHITZ;

¹⁾ Ajouté sur épreuves.

b) la forme quadratique $A^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ est de type hyperbolique normal, la variable x^0 présentant le caractère temporel et les variables x^i le caractère spatial ($A^{00} > 0$, $A^{ij} X_i X_j$ définie négative).

Sous ces conditions, Mme FOURÈS a établi que *le problème de CAUCHY relatif à (E_S) admet une solution et une seule dans un certain voisinage de D_0* . Dans le cas où les $A^{\alpha\beta}$ ne contiennent que les W et non leurs dérivées, ce qui est le cas dans les applications relativistes, une unité peut être gagnée dans tous les ordres de dérivableité.

Il m'est impossible d'esquisser ici la longue étude qui conduit à ces résultats. Je me bornerai à dire qu'une généralisation des classiques formules de KIRCHHOFF y joue un rôle essentiel: dans le cas linéaire, ces formules expriment les valeurs des fonctions inconnues en un point x_1 voisin de D_0 à partir de leurs valeurs sur la surface du conoïde caractéristique de sommet x_1 et des données de CAUCHY dans la région de Σ intérieure à ce conoïde.

6. Existence pour les équations d'EINSTEIN

Les résultats précédents s'appliquent d'une manière élégante aux équations d'EINSTEIN de la relativité générale grâce à l'introduction de coordonnées *isothermes*. L'idée consiste à associer au système d'EINSTEIN une équation à une seule fonction inconnue f qui admette les mêmes caractéristiques que ce système¹⁾. La manière la plus simple d'y parvenir est de considérer l'équation de LAPLACE dans V_4

$$\Delta f \equiv g^{\lambda\mu} (\delta_{\lambda\mu} f - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \delta_\rho f) = 0 .$$

Un système (x^ϱ) de coordonnées locales dans V_4 est isotherme si les

$$F^\varrho = \Delta x^\varrho = -g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\varrho \quad (10)$$

sont nuls pour tout ϱ . On montre aisément, en particulier à l'aide du théorème de Mme FOURÈS, qu'étant donné une hypersurface locale Σ orientée dans l'espace, elle peut toujours être envisagée comme variété coordonnée $x^0 = 0$ d'un système de coordonnées isothermes.

Les quantités F^ϱ interviennent d'une manière simple dans l'expression des composantes du tenseur de RICCI. On a en effet identiquement

$$R_{\alpha\beta} \equiv -G_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} \quad (11)$$

¹⁾ La théorie et l'interprétation des coordonnées isothermes sont dues à GEORGES DARMOIS.

avec

$$G_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} \quad (12)$$

et

$$L_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} \delta_\beta F^\mu + g_{\beta\mu} \delta_\alpha F^\mu) \quad (13)$$

les $H_{\alpha\beta}$ désignant des polynomes par rapport aux $g_{\lambda\mu}$, $g^{\lambda\mu}$ et à leurs dérivées premières. C'est la structure des $R_{\alpha\beta}$ ainsi mise en évidence que nous allons exploiter. Pour simplifier les écritures, nous nous limiterons aux équations sans constante cosmologique.

Considérons donc dans V_4 une hypersurface Σ portant les données de CAUCHY. Sur Σ ($x^0 = 0$) ces données satisfont à

$$(S_a^0)_{x^0=0} = 0. \quad (14)$$

De plus, comme nous nous proposons d'utiliser des coordonnées isothermes relativement à la métrique cherchée, nous supposerons, sans nuire à la généralité, qu'elles satisfont à

$$(F^\mu)_{x^0=0} = 0. \quad (15)$$

Nous nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité du problème de CAUCHY pour le système d'EINSTEIN

$$R_{\alpha\beta} \equiv -G_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} = 0$$

dont les premiers membres sont liés par les identités de conservation. Les stades du raisonnement sont les suivants.

1^o *Résolution du problème de CAUCHY pour le système $G_{\alpha\beta} = 0$.* Ce système est du type de Mme FOURÈS; nous ferons donc les hypothèses suivantes dans un voisinage D_0 de Σ .

a) Les données de CAUCHY $g_{\alpha\beta}$ et $\delta_0 g_{\alpha\beta}$ admettent des dérivées partielles jusqu'aux ordres 5 et 4 continues, bornées et satisfaisant à des conditions de LIPSCHITZ.

b) Sur Σ la forme $g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ est de type hyperbolique normal avec $g^{00} > 0$ et $g^{ij} X_i X_j$ définie négative. Sous ces conditions, le problème de CAUCHY pour les $G_{\alpha\beta} = 0$ admet une solution unique au voisinage de D_0 , solution qui admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 4 continues et bornées.

2^o *La solution trouvée vérifie les conditions d'isothermie.* En effet de (14) et (15) il résulte

$$(\delta_0 F^\mu)_{x^0=0} = 0.$$

D'autre part pour toute solution de $G_{\alpha\beta} = 0$, les identités de conservation se réduisent aux équations

$$g^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} F^\mu + P^\mu(\delta_\alpha F^\alpha) = 0$$

où P^μ est linéaire par rapport aux $\delta_\alpha F^\alpha$, les coefficients étant des polynômes en $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières. Ce système est du type de Madame FOURÈS et l'unicité du problème de CAUCHY correspondant entraîne $F^\mu = 0$.

Ainsi la solution trouvée des $G_{\alpha\beta} = 0$ est une solution du système d'EINSTEIN $R_{\alpha\beta} = 0$ compatible avec les données de CAUCHY et rapportée à des coordonnées isothermes. Nous avons ainsi obtenu un théorème local d'existence pour le système d'EINSTEIN, sans hypothèse d'analyticité.

7. Unicité pour les équations d'EINSTEIN

Il est clair que l'unicité du problème de CAUCHY pour le système d'EINSTEIN doit être entendue dans un sens tout à fait différent de l'unicité usuelle, celle qui intervient ici, par exemple pour le système $G_{\alpha\beta} = 0$. Nous entendons, pour le système d'EINSTEIN, l'unicité *modulo un changement de coordonnées conservant les valeurs numériques des coordonnées de tout point de Σ ainsi que les données de CAUCHY sur Σ* . En ce sens, il est permis de parler d'*unicité physique*.

Pour établir cette unicité physique, il faut montrer que toute solution du problème de CAUCHY relatif aux $R_{\alpha\beta} = 0$ peut se déduire, par un changement de coordonnées satisfaisant aux hypothèses précédentes, de la solution unique du même problème pour les $G_{\alpha\beta} = 0$. L'existence d'un tel changement de coordonnées fait encore intervenir un système du type de Madame FOURÈS, ce qui établit l'unicité cherchée. Cette unicité avait été antérieurement établie par STELLMACHER à la suite des travaux de FRIEDRICH et HANS LEWY.

J'ai développé ici méthodes et résultats pour les équations de la relativité générale. Cette méthode peut être adaptée, sans difficultés majeures, à la théorie de JORDAN-THIRY. Au contraire les théorèmes analogues pour la théorie unitaire non symétrique présentent des difficultés liées aux propriétés des «coordonnées isothermes» dans cette théorie.

3. Modèles d'univers et Problèmes globaux

8. Modèles d'univers en relativité générale

Les études précédentes étaient purement locales, mais en fait les problèmes mathématiques fondamentaux de toute théorie relativiste du champ doivent être de nature essentiellement globale.

Je me limiterai d'abord à la gravitation et à la théorie de la relativité générale¹⁾. La question qui se pose est la suivante: *quand avons-nous effectivement résolu un problème de gravitation?*

Je propose d'appeler *modèle d'univers* une variété V_4 munie d'une métrique partout régulière, satisfaisant aux équations d'EINSTEIN des différents cas et éventuellement à des conditions asymptotiques. Au voisinage des hypersurfaces, orientées dans le temps, séparant les régions balayées par l'énergie des régions vides, il doit exister, conformément à nos axiomes généraux, des coordonnées locales admissibles telles qu'à la traversée des hypersurfaces, les potentiels correspondants et leurs dérivées premières soient continus, les dérivées secondes étant discontinues.

C'est lorsqu'il est possible de construire un tel modèle d'univers que le champ extérieur peut être considéré comme *effectivement produit* par les différentes masses ou distributions énergétiques en mouvement et c'est le raccordement des champs intérieurs des différentes distributions avec un même champ qui assure *l'interdépendance des mouvements*. Ce qu'on nomme le principe des géodésiques est un corollaire aisé de ce fait et l'outil fondamental est au fond *la continuité, à la traversée de $\Sigma (x^0 = 0)$ des quantités S_α^0* .

Seul un tel modèle d'univers est susceptible d'interprétation physique. Dans un domaine Δ_0 de V_4 où elle n'est pas régulière, une métrique n'est susceptible d'aucune interprétation. On devra, pour chercher à aboutir à un modèle d'univers, voir s'il est possible de *meubler* un tel domaine, c'est-à-dire de choisir une hypersurface Σ limitant un domaine Δ contenant Δ_0 et de construire dans Δ une distribution énergétique et une métrique reliées par les équations d'EINSTEIN, la métrique étant partout régulière dans Δ et se raccordant le long de Σ avec la métrique précédemment donnée. Il est à noter qu'un tel problème est de nature essentiellement globale et présente quelque analogie avec des problèmes classiques en hydrodynamique. Sur la solution de tels problèmes, on ne sait à peu près rien.

Dans un modèle d'univers, au sens où nous l'avons défini, il devrait être impossible d'introduire de nouvelles distributions énergétiques dont les métriques associées se raccordent avec le champ extérieur. On doit donc étudier la validité, en relativité, de la proposition suivante: *L'introduction de distributions énergétiques dans un champ extérieur donné ne peut s'effectuer que dans des domaines où ce champ n'est pas régulier* (proposition A).

Etroitement liée à cette proposition est la suivante: *Un modèle d'univers constitué par un champ extérieur partout régulier doit être trivial c'est-à-dire localement euclidien* (proposition B).

¹⁾ en l'absence de constante cosmologique pour simplifier.

L'introduction d'un champ électromagnétique en relativité générale ou la théorie de JORDAN-THIRY conduisent à des concepts et à des énoncés analogues en ce qui concerne l'ensemble des deux champs.

De telles propositions ne semblent pas valables sous les axiomes généraux que j'ai indiqués, comme le montrent des contre-exemples un peu tétralogiques. Mais, comme nous allons le voir, elles sont valables pour des champs stationnaires et par suite pour des champs suffisamment voisins de champs stationnaires, ce qui apparaît comme rassurant.

Une définition de ce qu'on nommerait un modèle d'univers en théorie unitaire non symétrique n'a jamais été donnée. Si l'on veut éviter l'introduction artificielle de sources – et c'était manifestement la volonté d'EINSTEIN – il conviendrait de faire passer, si j'ose dire, au second membre et d'interpréter physiquement certains termes des équations de champ, les nouveaux premiers membres satisfaisant encore à des conditions de conservation. Dans cette voie, rien de valable n'a encore été fait.

9. Problèmes globaux pour des champs stationnaires

En relativité générale, un champ est stationnaire si la variété riemannienne V_4 admet un groupe à 1 paramètre d'isométries à trajectoires orientées dans le temps (lignes de temps). La métrique peut s'écrire :

$$ds^2 = \xi^2 [(dx^0)^2 + 2 \varphi_i dx^0 dx^i] + g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

où les potentiels sont indépendants de la variable temporelle x^0 ($\xi^2 = g_{00} > 0$). Ces hypothèses correspondent physiquement à un état de régime permanent.

Je suppose de plus, bien que ce ne soit pas strictement nécessaire, que V_4 est homéomorphe au produit topologique d'une variété à 3 dimensions par une ligne, les variétés-facteurs W_3 de V_4 pouvant être représentées par $x^0 = \text{const.}$, les lignes facteurs étant les lignes de temps. Les W_3 sont munies de la métrique définie négative de coefficients :

$$g_{ij}^* = g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} .$$

Par des calculs locaux on établit sur W_3

$$\xi R_0^0 = \text{div}^* h \quad (16)$$

$$\Delta^* \xi = \frac{\xi^3}{2} H^2 \quad (\text{pour un champ extérieur}) \quad (17)$$

$$\xi \varphi_i R_0^i = \frac{\xi^3}{2} H^2 - \text{div}^* p \quad (18)$$

où h et p sont des vecteurs de W_3 ne dépendant que des potentiels et de leurs dérivées premières et où $H^2 = 0$ exprime que la congruence des lignes de temps est une congruence de normales pour des sections d'espace.

A l'aide de (16) on établit aisément la proposition *A* pour des champs stationnaires. En ce qui concerne la proposition *B*, on suppose W_3 compacte ou admettant un domaine à l'infini avec comportement asymptotique euclidien; sa démonstration utilise alors les relations (17) et (18) et procède par réduction du cas du champ stationnaire au cas du champ statique, au sens de LEVI-CIVITA, c'est-à-dire à $H^2 = 0$. Les résultats ainsi obtenus s'étendent sans difficultés au cas où il y a un champ électromagnétique ou à la théorie de JORDAN-THIRY.

Il ne peut exister, en l'absence de constante cosmologique, de modèle d'univers stationnaire à W_3 compact. Pour un modèle d'univers stationnaire à domaine à l'infini pour lequel les lignes de courant à l'intérieur des masses coïncident avec les lignes de temps, on peut déduire par intégration de (18) que $H^2 = 0$ partout. Il en résulte en particulier que les postulats usuellement introduits pour la formation du modèle d'univers de SCHWARZSCHILD sont surabondants.

10. Approximations et équations du mouvement

Si beaucoup des problèmes rigoureux de la théorie de la relativité semblent dépasser nos forces, il est possible de traiter par approximations le problème du mouvement de n masses gravitantes.

On suppose les coordonnées choisies isothermes, la métrique quasi-euclidienne et à comportement asymptotique euclidien et on développe les potentiels selon les puissances de c^{-2} . A la technique initiale d'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN qui use d'une représentation des masses par de pures singularités du champ extérieur, représentation qui pourrait être fallacieuse, il est préférable de substituer une technique où le tenseur d'impulsion-énergie joue son rôle. Une telle technique qui donne des résultats satisfaisants a été amorcée par FOCK et par PAPAPETROU, et a été développée plus rigoureusement par Madame HENNEQUIN. Les équations du mouvement des masses proviennent essentiellement de l'intégration, dans les tubes balayés par celles-ci, de divergences suggérées par les premiers membres des conditions de conservation, de manière à exprimer que les quantités S_a^0 sont nulles au bord de ces tubes.

Je n'entrerai pas dans le détail de cette technique, mais je signalerai que le même procédé vient d'être appliqué aux équations de la théorie de JORDAN-THIRY et que les approximations obtenues suggèrent l'interprétation suivante qui diffère de celle initialement donnée par les auteurs de la théorie: avec les notations du § 3, c'est $\bar{ds}^2 = \xi ds^2$ qui représente

la métrique gravitationnelle; le champ électromagnétique est représenté par l'ensemble des deux tenseurs proportionnels

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \quad \bar{H}_{\alpha\beta} = \xi^3 F_{\alpha\beta}$$

où \bar{F} est à différentielle extérieure nulle et où ξ^3 joue le rôle d'un pouvoir diélectrique du vide. Dans le cas unitaire extérieur les équations du champ s'écrivent avec la métrique \bar{ds}^2 :

$$\bar{S}_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta} = \frac{\beta^2}{2} \bar{\tau}_{\alpha\beta}$$

$$\bar{V}_\beta (\bar{H}_\alpha^\beta) = 0$$

$$\bar{A} \log \xi + \frac{\beta^2}{2} (\bar{F}, \bar{H}) = 0$$

où les $K_{\alpha\beta}$ ne dépendent que des dérivées premières de $\log \xi$ et où $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'impulsion-énergie du champ électromagnétique

$$\bar{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \bar{F}_{\lambda\mu} \bar{H}^{\lambda\mu} - \bar{F}_{\alpha\varrho} \bar{H}_\beta^\varrho .$$

Le facteur de gravitation $\beta^2/2$ est alors constant.

Nous avons cherché à passer en revue les thèmes mathématiques proposés par les équations relativistes du champ. Beaucoup de travail reste à faire.

Diskussion – Discussion

D. VAN DANTZIG: 1. Les équations de gravitation n'étant pas linéaires, le cône des bicaractéristiques dépendra en général de la solution considérée. Est-ce qu'il est connu sous quelles conditions on peut être sûr que, en prolongeant une solution locale, la signature de g_{ij} sera conservée, plus spécialement que le cône des bicaractéristiques ne sera pas dégénéré?

2. Est-ce que la solution à données de CAUCHY peut être représentée au moyen d'intégrales ordinaires, soit sur le cône, soit au dedans du cône (ou une combinaison des deux), ou est-ce que des difficultés du type de HADAMARD, où l'on doit prendre la „partie finie“ d'une intégrale infinie, sont inévitables?

Mme Y. FOURÈS-BRUHAT: 1. On ne sait pas, dans le cas général, sous quelles conditions on peut prolonger une solution donnée. Ceci résoudrait d'ailleurs le problème de l'existence de solutions globales régulières, problème dont il serait très important de connaître la réponse, mais certainement très difficile.

2. La solution est obtenue par résolution d'équations intégrales (portant sur des intégrales ordinaires prises sur le cône des bicaractéristiques) par approximations successives. La solution dépend des données initiales interieures au cône (propagation par ondes, en général diffusées).

Mme A. TONNELAT: Je voudrais faire observer qu'il est possible aussi de définir des systèmes de coordonnées isothermes dans la théorie non symétrique ($g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$). Leur emploi devrait conduire à un grand nombre de simplifications. Néanmoins, à ma connaissance, aucune application sérieuse de ce choix de coordonnées n'a été proposé.

Bibliographie

Les différents mémoires d'EINSTEIN et de ses collaborateurs et EINSTEIN et PAULI Ann. of Math. 44, p. 131–138 (1943).

BERGMANN, P. G., *Introduction to the theory of relativity.*, Prentice Hall, New-York (1950).

DARMOIS, G., *Les équations de la gravitation einsteinienne*, Mém. Sc. Math., Paris (1927).

FOURÈS, MME Y., Acta Math. 88, p. 141–225 (1952).

HADAMARD, J., *Leçons sur la propagation des Ondes* (Hermann, Paris 1903).

HENNEQUIN, MME, *Différentes notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (1954 et 1955).

HILBERT, D., Math. Ann. 92, p. 1–32 (1924).

JORDAN, P., Ann. Physik 32, p. 219 (1947).

LICHNEROWICZ, A., *Problèmes globaux en mécanique relativiste* (Hermann, Paris, 1939); C. R. Acad. Sc. 222, p. 432 (1946). *Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* (Masson, Paris 1955).

RACINE, CH., *Le problème des n corps en théorie de la relativité* (Thèse, Paris 1934).

STELLMACHER, K., Math. Ann. 115, p. 136–152 (1938).

THIRY, Y., C. R. Acad. Sc. 226, p. 216 et 1881 (1948), Journ. math. p. et appl. 30, p. 275–396 (1951).