

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	29 (1956)
<b>Heft:</b>	[4]: Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory
<b>Artikel:</b>	Les quatorze invariants de courbure de l'espace riemannien à quatre dimensions
<b>Autor:</b>	Géhéniau, J. / Debrever, R.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-112727">https://doi.org/10.5169/seals-112727</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## **Les quatorze invariants de courbure de l'espace riemannien à quatre dimensions**

par J. GÉHÉNIAU et R. DEBEVER

(Université libre de Bruxelles)

1. Un invariant de courbure de l'espace riemannien est une fonction du tenseur métrique  $g_{rs}$  et de ses dérivées premières et secondes par rapport aux variables  $x^u$ , de forme invariante pour les changements «quelconques» des coordonnées  $x^u$ . Le but de cette communication est de donner des expressions des quatorze invariants de courbure distincts de l'espace riemannien à quatre dimensions, principalement du point de vue algébrique.

2. Ces invariants ne dépendent que du tenseur métrique et du tenseur de RIEMANN  $R_{pqrs}$  [1]. Introduisons les notations

$$R_{pr} = R_{psr}^s, \quad R = R_p^p \quad (1)$$

$$g_{pqrs} = g_{pr} g_{qs} - g_{ps} g_{qr} \quad (2)$$

$$S_{pqrs} = R_{pqrs} - \frac{1}{12} R g_{pqrs} \quad (3)$$

$$S_{pr} = S_{psr}^s = R_{pr} - \frac{1}{4} R g_{pr} \quad (4)$$

$$2e_{pqrs} = g_{pr} S_{qs} - g_{ps} S_{qr} - g_{qr} S_{ps} + g_{qs} S_{pr} \quad (5)$$

$$C_{pqrs} = S_{pqrs} - e_{pqrs} \quad (6)$$

Ce dernier tenseur est le tenseur de WEYL; on a

$$C_{psr}^s = 0. \quad (7)$$

On peut vérifier facilement que les tenseurs  $R g_{pqrs}$ ,  $e_{pqrs}$  et  $C_{pqrs}$  sont formés par des combinaisons linéairement indépendantes des composantes du tenseur de RIEMANN.

3. Le seul invariant fonction linéaire des  $R_{pqrs}$  est  $R$ . On en obtient trois autres en développant le déterminant

$$\det(S_p^q - \lambda \delta_p^q) \quad (8)$$

par rapport aux puissances de  $\lambda$ . Ils sont respectivement du deuxième, troisième et quatrième degré en les  $R_{pqrs}$ . Avec  $R$  ils fournissent les quatre invariants distincts associés aux deux tenseurs  $R_{pq}$  et  $g_{pq}$ .

4. Avec le tenseur de WEYL, on peut former quatre invariants évidemment distincts des précédents. Pour les écrire nous utiliserons les tenseurs

$$\bar{C}_{pq}^{rs} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} C_{pq\bar{r}\bar{s}}$$

$$\pm C_{pq}^{rs} = C_{pq}^{rs} \pm \bar{C}_{pq}^{rs}$$

où  $g$  est le déterminant des  $g_{rs}$  et  $\bar{rs}$  est mis pour les deux chiffres qui forment avec  $rs$  une permutation paire de 1, 2, 3, 4.

Ces invariants sont les coefficients de  $\lambda^4$  et de  $\lambda^3$  des deux polynômes en  $\lambda$

$$\det(\pm C_{pq}^{rs} - \lambda \delta_{pq}^{rs}) \quad (9)$$

où  $\delta_{pq}^{rs} = \delta_p^r \delta_q^s - \delta_p^s \delta_q^r$ . Nous ne les écrirons plus explicitement ici que dans le cas des espaces de RIEMANN à forme définie positive. On peut alors choisir en un point le système de coordonnées de manière que

$$g_{rs} = \delta_{rs}, \quad (10)$$

et, en considérant les  $C_{pqrs}$  comme les éléments d'une matrice à six lignes ( $pq = 23, 31, 12, 14, 24, 34$ ) et six colonnes, on a

$${}^+C = \begin{pmatrix} {}^+A & {}^+A \\ {}^+_A & {}^+_A \end{pmatrix} \quad {}^-C = \begin{pmatrix} {}^-A & {}^-A \\ {}^-_A & {}^-_A \end{pmatrix} \quad (11)$$

où  ${}^\pm A$  sont deux matrices carrées indépendantes à trois lignes, symétriques et de traces nulles. On voit ainsi que les seuls invariants distincts donnés par (9) sont les coefficients de  $\lambda$  et de  $\lambda^0$  des polynômes

$$\det({}^\pm A - \lambda I) \quad (12)$$

où  $I$  est la matrice unité.

5. Deux nouveaux invariants sont obtenus de la même manière qu'au § 4, à partir du tenseur

$$D_{pqrs} = e_{pquv} C_{rs}^{uv}; \quad (13)$$

ce sont les coefficients de  $\lambda^4$  et  $\lambda^2$  dans le polynôme en  $\lambda$

$$\det(D_{pq}^{rs} - \lambda \delta_{pq}^{rs}) \quad (14)$$

ou encore, en utilisant (10), les coefficients de  $\lambda^4$  et  $\lambda^2$  dans le polynôme en  $\lambda$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda I & -sA \\ +s+A & -\lambda I \end{pmatrix} \quad (15)$$

où

$$\pm s = s_1 \pm s_2$$

$$(s_1)_{\alpha\beta} = -S_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} S, \quad S = S_{11} + S_{22} + S_{33} \quad (16)$$

$$(s_2)_{23} = S_{14}, \quad (s_2)_{31} = S_{24}, \quad (s_2)_{12} = S_{34}.$$

6. Les quatre derniers invariants s'obtiennent par la même méthode, à partir du tenseur

$$E_{pqrs} = e_{pquv} C^{uvmn} e_{mnr} \quad (17)$$

Ce sont les coefficients de  $\lambda^5$  et de  $\lambda^4$  des polynômes en  $\lambda$

$$\det(\pm E_{pq}^{rs} - \lambda \delta_{pq}^{rs}) \quad (18)$$

ou encore, en utilisant (10), les coefficients de  $\lambda^2$  et de  $\lambda$  des polynômes en  $\lambda$

$$\det(\pm s \pm A \pm s - \lambda I) \quad (19)$$

7. A l'aide de (12), (15) et (19) on démontre aisément que les invariants de courbure indiqués sont distincts. En résumé, nous avons écrit les quatorze invariants sous la forme de polynômes en les composantes du tenseur de RIEMANN.

### *Diskussion – Discussion*

L. INFELD: How do you know that these are all the invariants?

J. GÉHÉNIAU: Je ne puis qu'esquisser la démonstration du théorème qui se trouve dans les travaux que je viens de citer. On effectue une trans-

formation infinitésimale des coordonnées  $\delta x^r = \xi^r(x)$ . On calcule les transformations infinitésimales du tenseur  $g_{rs}$  et de ses dérivées premières et secondes; elles dépendent linéairement des dérivées premières, secondes et troisièmes des  $\xi^r$ . On exprime que la variation  $\delta I$  d'un invariant doit être nulle quels que soient les  $\xi^r$  et leurs dérivées. Il en résulte un nombre d'équations égal au nombre de fonctions  $\partial \xi^r / \partial x^s$ ,  $\partial^2 \xi^r / \partial x^s \partial x^u$ ,  $\partial^3 \xi^r / \partial x^s \partial x^u \partial x^t$ . On démontre que, pour  $n > 2$ , ces équations sont distinctes et forment un système complet. Le nombre d'invariants distincts est alors égal à la différence entre le nombre de fonctions  $g_{rs}$ ,  $\partial g_{rs} / \partial x^u$ ,  $\partial^2 g_{rs} / \partial x^u \partial x^t$  et ce nombre d'équations.

M. LUCINI: Existe-t-il un rapport général entre le nombre de dimensions d'un espace de RIEMANN et celui d'invariants de courbure?

J. GÉHÉNIAU: Il existe une formule qui donne le nombre  $N$  d'invariants de courbure distincts en fonction du nombre  $n$  de dimensions de l'espace. Cette formule a été donnée pour la première fois, je pense, par S. LIE, puis par M. DE DONDER dans des cas plus généraux, et HASKING a publié un travail fort important sur ce sujet, il y a une cinquantaine d'années. Il y a bien d'autres travaux sur cette question; l'historique en sera faite dans un exposé plus développé [2]. La formule demandée est  $N = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$  pour  $n > 2$ .

MME. A. TONNELAT: Peut-on donner explicitement les invariants dans le cas où les  $g_{ik}$  ne sont pas symétriques?

J. GÉHÉNIAU: Le raisonnement qui fournit le nombre d'invariants de courbure distincts est applicable au cas des  $g_{ik}$  non symétriques. Nous n'avons pas essayé d'étendre nos calculs à ce cas, mais cela me paraît possible.

Anschließend an eine Bemerkung von P. G. BERGMANN entstand eine Diskussion, deren Resultat von P. G. BERGMANN und E. P. WIGNER folgendermaßen formuliert wurde.

Die Frage, die entschieden werden sollte (und die auch Herr KOMAR in Princeton angegriffen hatte) betraf die Charakterisierung wesentlich verschiedener Lösungen der EINSTEINSCHEN Gravitationsgleichungen. Zwei Lösungen der Gravitationsgleichungen werden als wesentlich *identisch* angesehen, wenn eine ein-eindeutige Zuordnung der Punkte  $P$  und  $P'$  der zugehörigen RIEMANNSCHEN Räume existiert, die längentreu ist, d. h. so beschaffen, daß wenn  $P_1$  und  $P_2$  zwei benachbarte Punkte des ersten Raumes und  $P'_1$  und  $P'_2$  die zugehörigen Punkte des zweiten Raumes sind, der Abstand  $P_1P_2$  im ersten Raum gleich dem Abstand  $P'_1P'_2$  des zweiten Raumes ist. Wenn eine derartige Zuordnung der Punkte der beiden Räume nicht hergestellt werden kann, gelten sie als wesentlich verschieden.

Falls eine Zuordnung der angegebenen Art zwischen zwei RIEMANN-schen Räumen existiert, werden die Werte, die die Invarianten im ersten Raum in einem Punkte  $P$  annehmen, den Werten, die dieselben Invarianten im zugeordneten Punkt  $P'$  im zweiten Raum annehmen, gleich sein. Wie schon Herr KOMAR beobachtet hat, ermöglicht dies das Auffinden zugeordneter Punkte in den zu vergleichenden RIEMANNSchen Räumen. Wenn man vier Invarianten als Koordinaten einführt, so werden die Koordinaten von Punkten, die einander zugeordnet sind, gleich sein. Um zwei RIEMANNSche Räume zu vergleichen, die beide die Gravitationsgleichungen erfüllen, kann man daher in beiden die vier nicht-verschwindenden Invarianten von GÉHÉNIAU und DEBEVER als Koordinaten einführen. Falls dies möglich ist, wird sich die wesentliche Verschiedenheit zweier Lösungen der Gravitationsgleichungen in der Verschiedenheit der Werte weiterer Invarianten äußern, wenn diese als Funktionen der vorerwähnten vier Invarianten ausgedrückt werden. Die Untersuchung der Herren GÉHÉNIAU und DEBEVER lehrt uns, daß diese weiteren Invarianten auch höhere als zweite Differentialquotienten der  $g_{ik}$  enthalten müssen.

#### Bibliographie

- [1] HASKING, Trans. of the Am. Soc., 3, 71 (1902).
- [2] J. GÉHÉNIAU et R. DEBEVER, Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. des Sc., XLII, 114 (1956).  
J. GÉHÉNIAU, Id., 252 (1956).  
R. DEBEVER, Id., 313 et 608 (1956).