Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 29 (1956)

Heft: [4]: Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory

Artikel: Le problème de Cauchy dans la théorie relativiste de l'électro-magnetisme et dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry

Autor: Fourès-Bruhat, Y.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112723

Le problème de Cauchy dans la théorie relativiste de l'électromagnetisme et dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry

par Mme Y. Fourès-Bruhat (Aix-Marseille)

1. En relativité générale le champ électromagnétique, forme extérieure (cf. [1]) $F = F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, et la métrique, forme quadratique $g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ sont liés par les équations d'Einstein

$$S_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}\, R = \chi\, T_{ij} \tag{1}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4} g_{ij}\, F_{hk}\, F^{hk} - F_{ih}\, F^h_j$$

et les équations de Maxwell qu'on peut écrire (pour un vecteur courant nul):

$$dF = \delta F = 0 \tag{2}$$

où dF et δF désignent la différentiation et codifférentiation dans la métrique g.

Je cherche d'abord une solution telle que $F = d\varphi$. L'équation (2) prend alors la forme

$$\delta d\varphi = 0\,. \tag{2'}$$

On se donne, à l'instant initial $x^4 = 0$, φ et g et les dérivées $\partial \varphi_j / \partial x^4$, $\partial g_{ij} / \partial x^4$ satisfaisant aux conditions nécessaires

$$S^4_i = 0\,, \quad (\delta d\varphi)^4 = 0\,. \tag{3}$$

Les coordonnées initiales étant isothermes (cf. [2]),

$$F^i \equiv \nabla_j\, g^{(i)j} \equiv g^{jh}\, \Gamma^i_{jh} = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0 \tag{4}$$

et le potentiel vecteur φ étant normalisé par

$$\delta\varphi = -\nabla_i\, \varphi^i = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0\,. \tag{5}$$

On déduit de (3), (4) et (5)

$$\partial F^i / \partial x^4 = \partial(\nabla_i \varphi^i) / \partial x^4 = 0 \quad \text{pour } x^4 = 0\,.$$

Les identités

$$R_{ij} \equiv \frac{1}{2}\, g^{hk} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h\, \partial x^k} + H_{ij}(\partial_h\, g_{lk},\, g_{lk}) + \frac{1}{2}\, g_{ih}\, \partial_j F^h + \frac{1}{2}\, g_{jh}\, \partial_i F^h \tag{6}$$

$$(\delta d\varphi)_i \equiv g^{hk} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^h\, \partial x^k} + P_i(\partial_k\, \varphi_h,\, \partial_k\, g_{lh},\, g_{lh}) + \partial_i\, (\nabla_h\, \varphi^h + F^h\, \varphi_h) \tag{7}$$

montrent qu'en coordonnées isothermes, et pour un potentiel vecteur normalisé par $\delta\,\varphi = 0$ les équations de MAXWELL-EINSTEIN prennent la forme d'un système d'équations du second ordre hyperboliques, non-linéaires ou les dérivées du second ordre sont séparées et ont mêmes coefficients pour toutes les équations. J'ai construit [3] sans hypothèse d'analyticité une solution (unique) du problème de CAUCHY pour un tel système: sa valeur en un point ne dépend que des données initiales intérieures à un conoïde de sommet ce point (d'où propagation par ondes et identité des propagations de la gravitation et de l'électromagnétisme) et dépend continuement des données initiales.

Les identités de conservation et l'identité $\delta\delta\psi = 0$ permettent de montrer que cette solution est isotherme et que φ vérifie bien la condition $\delta\psi = 0$. On a donc effectivement construit une solution des équations de MAXWELL-EINSTEIN (1) et (2). On montre que cette solution est physiquement unique.

On peut également déterminer F par $\square\, F \equiv d\delta F + \delta dF = 0$ sans utiliser le potentiel vecteur φ dont le raisonnement précédent suppose l'existence (φ pourrait n'exister que localement). Un théorème d'unicité assure alors l'existence de φ moyennant son existence à l'instant initial.

2. *Théorie unitaire de* JORDAN-THIRY: les quinze inconnues $\gamma_{\lambda\mu}$ sont les coefficients de la métrique d'un espace de RIEMANN à cinq dimensions, cylindrique par rapport à x^0:

$$ds^2 = \gamma_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = -\xi^2\, (dx^0 + \beta\, \varphi_i\, dx^i) + d\hat{s}^2$$

$d\hat{s}^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ est la métrique de l'espace-temps, φ_i le potentiel vecteur, ξ un quinzième potentiel dont on peut discuter l'interprétation (cf. la conférence de A. LICHNEROWICZ).

Les inconnues $\gamma_{\lambda\mu}$ satisfont en dehors des masses aux équations:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{8}$$

($R_{\alpha\beta}$, tenseur de Ricci de l'espace à cinq dimensions). On se donne à l'instant initial $x^4 = 0$ les $\gamma_{\lambda\mu}$, $\partial\gamma_{\lambda\mu}/\partial x^4$ (c'est à dire g_{ij}, φ_i, ξ et leurs dérivées premières) satisfaisant aux conditions nécessaires:

$$S_\lambda^4 = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = 0\,. \tag{9}$$

Les coordonnées initiales étant isothermes

$$F^\mu \equiv \nabla_\lambda \gamma^{\lambda(\mu)} = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = 0\,, \tag{10}$$

on déduit de (9) et (10)

$$\partial_4 F^\mu = 0 \quad \text{pour} \quad x^4 = 0\,.$$

Une décomposition analogue à (6) permet de résoudre les équations (8) en coordonnées isothermes, les conditions de conservations $\nabla_\lambda\, S_\mu^\lambda \equiv 0$ montrant encore qu'on a ainsi effectivement une solution, physiquement unique, de ces équations. Cette solution dépend continuement des données initiales (en particulier ξ reste sensiblement constant s'il en est ainsi à l'instant initial).

Si l'on fait $\xi =$ const. dans les quatorze premières équations de la théorie unitaire de Jordan-Thiry, on obtient les équations de la théorie de Kaluza-Klein, équivalentes aux équations de Maxwell-Einstein, ce qui permet de retrouver les résultats du § 1.

Bibliographie

[1] Lichnérowicz, A., *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson (1955).
[2] Darmois, G., *Equations de la gravitation einsteinienne*, Memorial Sci. Math. (1927).
[3] Fourès-Bruhat, Y., Acta Matem. (1952).