

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	29 (1956)
<b>Heft:</b>	[4]: Supplementum 4. Fünfzig Jahre Relativitätstheorie = Cinquantenaire de la Théorie de la Relativité = Jubilee of Relativity Theory
<b>Artikel:</b>	Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique
<b>Autor:</b>	Costa de Beauregard, O.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-112722">https://doi.org/10.5169/seals-112722</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique

par O. COSTA DE BEAUREGARD (Paris)

### 1. Particule libre de spin non spécifié

Avec MARCEL RIESZ [1] on considère les solutions de l'équation de GORDON ( $\lambda, \mu, \nu, \varrho = 1, 2, 3, 4; x_4 = i c t$ )

$$(\partial_\lambda^\lambda - k_0^2) \psi(x) = 0, \quad (1)$$

et l'on montre que,  $\eta(k) = 0$  désignant l'hyperboloïde

$$k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0, \quad (2)$$

$d\eta_\lambda$  son quadrivecteur élément de volume (colinéaire à  $k_\lambda$ ) et  $d\eta$  le module de celui-ci, tel que

$$k_\lambda d\eta = -k_0 d\eta_\lambda, \quad (3)$$

$\varepsilon(k)$  une fonction valant respectivement  $\pm 1$  sur les nappes des fréquences positives et négatives (pour abréger, l'on se limite aux transformations de LORENTZ orthochrones), la décomposition de FOURIER du  $\psi(x)$  peut s'écrire

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \int \int_{\eta} e^{i k_\lambda x^\lambda} \zeta(k) \varepsilon(k) d\eta. \quad (4)$$

Soit alors  $\sigma(x) = 0$  une hypersurface quelconque du genre espace,  $d\sigma_\lambda$  son quadrivecteur élément de volume, et

$$[\partial^\lambda] \equiv \begin{matrix} \partial^\lambda & \\ \rightarrow & \leftarrow \end{matrix} \quad (5)$$

l'opérateur du courant de GORDON: on montre que l'intégrale

$$\zeta(k) = -\frac{i}{2k_0} (2\pi)^{-3/2} \int \int \int_{\sigma} e^{-i k_\lambda x^\lambda} [\partial^\mu] \psi(x) d\sigma_\mu \quad (6)$$

est indépendante de  $\sigma$ , et qu'elle est la réciproque au sens de FOURIER de (4).

$\psi^*$  et  $\zeta^*$  désignant les conjugués de  $\psi$  et  $\zeta$ , et  $p$  et  $q$  numérotant deux solutions différentes de l'équation de GORDON, l'égalité de PARSEVAL covariante (au premier membre indépendant de  $\sigma$ ) s'écrit

$$-\frac{i}{2k_0} \int_{\sigma} \int \int \psi_p^* [\partial^\lambda] \psi_q d\sigma_\lambda = \int_{\eta} \int \int \zeta_p^* \zeta_q \varepsilon(k) d\eta. \quad (7)$$

Définitions covariantes du produit scalaire hermitien de deux  $\psi$  ou  $\zeta$  (fonctions de 4 variables liées par (1)):

$$\langle \psi_p | \psi_q \rangle_\sigma = \langle \psi_q | \psi_p \rangle_\sigma^* = -\frac{i}{2k_0} \int_{\sigma} \int \int \psi_p^* [\partial^\lambda] \psi_q d\sigma_\lambda, \quad (8)$$

$$\langle \zeta_p | \zeta_q \rangle_\eta = \langle \zeta_q | \zeta_p \rangle_\eta^* = \int_{\eta} \int \int \zeta_p^* \zeta_q \varepsilon(k) d\eta. \quad (9)$$

Posons encore

$$e(kx) = e^*(-kx) = \begin{cases} (2\pi)^{-3/2} e^{ik_\lambda x^\lambda} & \text{si } k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0, \\ 0 & \text{si } ,, \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

(4), (6), (7) se récrivent

$$\psi(x) = \langle e(-kx) | \zeta(k) \rangle_\eta, \quad (11)$$

$$\zeta(k) = \langle e(kx) | \psi(x) \rangle_\sigma, \quad (12)$$

$$\langle \psi_p | \psi_q \rangle_\sigma = \langle \zeta_p | \zeta_q \rangle_\eta. \quad (13)$$

La norme (nombre d'occupation) d'un  $\psi$  ou  $\zeta$ , l'orthogonalité de deux  $\psi$  ou  $\zeta$ , se définissent comme d'habitude à partir de (13).

Introduisons le propagateur de JORDAN-PAULI

$$D(x - x') = (2\pi)^{-3} \int_{\eta} \int \int e^{ik_\lambda (x-x')^\lambda} \varepsilon(k) d\eta; \quad (14)$$

on a

$$D(x'' - x') = \langle e(-kx') | e(-kx'') \rangle_\eta = \langle D(x - x') | D(x - x'') \rangle_\sigma, \quad (15)$$

ce qui montre en particulier que deux fonctions de  $x$ ,  $D(x - x')$  et  $D(x - x'')$ , sont orthogonales si  $x'' - x'$  est du genre espace. Substituant (6) dans (4) il vient la formule de SCHWINGER résolvant le problème de CAUCHY

$$\psi(x) = \langle D(x' - x) | \psi(x') \rangle_{\sigma'}. \quad (16)$$

Formules analogues dans le 4-espace  $k$ :

$$D(k', k'') = \langle e(k' x) | e(k'' x) \rangle_{\sigma} = \langle D(k, k') | D(k, k'') \rangle_{\eta}, \quad (17)$$

$$\zeta(k) = \langle D(k, k') | \zeta(k') \rangle_{\eta}. \quad (18)$$

(4) et (18) donnent le développement d'une solution de (1) sur les ondes planes; les coefficients sont donnés par (6) et la réciproque de (18); la fonction de distribution correspondante est le second membre de (13) avec  $p = q$ . (6) et (16) donnent le développement d'une solution de (1) sur les ondes  $D(x - x')$  attachées à une  $\sigma'$ ; les coefficients sont donnés par (4) et la réciproque de (16); la fonction de distribution correspondante est le premier membre de (13) avec  $p = q$  et  $\sigma = \sigma'$ . Les ondes  $D(x - x')$  sont complémentaires au sens de BOHR des ondes planes; elles expriment une localisation exacte du corpuscule traversant l'hypersurface  $\sigma'$ , toutes ses localisations passées et futures étant contenues dans le cône isotrope de sommet  $x'$ .

L'ensemble de ces formules se situe dans le prolongement direct de la célèbre chèse de 1924 de M. L. DE BROGLIE. Elles représentent l'essentiel de la «mécanique ondulatoire».

## 2. Particule libre à spin

Les équations d'onde sont de la forme ( $\bar{\psi} = \psi^+ \beta$ )

$$(a_{\lambda} \partial^{\lambda} + k_0) \psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x) (a_{\lambda} \partial^{\lambda} - k_0) = 0, \quad (19)$$

ou

$$(a_{\lambda} k^{\lambda} - i k_0) \zeta(k) = 0, \quad \bar{\zeta}(k) (a_{\lambda} k^{\lambda} - i k_0) = 0; \quad (20)$$

quelle que soit l'algèbre des  $a_{\lambda}$ , elles entraînent (1) et (2). On montre que (8), (9), (7) se récrivent

$$\langle \psi_p | \psi_q \rangle_{\sigma} = \langle \psi_q | \psi_p \rangle_{\sigma}^* = i \iint \bar{\psi}_p a^{\lambda} \psi_q d\sigma_{\lambda}, \quad (21)$$

$$\langle \zeta_p | \zeta_q \rangle_{\eta} = \langle \zeta_q | \zeta_p \rangle_{\eta}^* = i \iint \bar{\zeta}_p a^{\lambda} \zeta_q \varepsilon(k) d\eta_{\lambda}, \quad (22)$$

$$i \iint \bar{\psi}_p a^{\lambda} \psi_q d\sigma_{\lambda} = i \iint \bar{\zeta}_p a^{\lambda} \zeta_q \varepsilon(k) d\eta_{\lambda}. \quad (23)$$

Symboliquement (car  $e(kx)$  n'est pas solution de (20)) l'on a

$$\psi(x) = \langle\langle e(-kx) | \zeta(k) \rangle\rangle_n, \quad (24)$$

la formule réciproque étant

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi)^{-3/2}}{2k_0} \iiint_{\sigma} e^{-ik\lambda x^\lambda} (k^\mu - [a^\mu a^\nu - a^\nu a^\mu] k_\nu + i k_0 a^\mu) \psi(x) d\sigma_\mu; \quad (25)$$

dans le cas de l'électron de DIRAC, ceci se simplifie sous la forme (implicitelement) donnée par SCHWINGER

$$\zeta_{(1/2)}(k) = \left\langle \frac{i}{2k_0} (\gamma_\mu \partial^\mu - k_0) e(kx) | \psi_{(1/2)}(x) \right\rangle_\sigma. \quad (26)$$

De (24), et (25) ou (26), on déduit une formule résolvant le problème de CAUCHY.

### 3. Particule plongée dans un champ

Ici, les intégrales de FOURIER réciproques, l'égalité de PARSEVAL etc..., sont nécessairement des intégrales quadruples (bien que la norme physique reste une intégrale triple: l'hyperflux du courant de présence). Par exemple, le  $\psi$  d'une particule liée à un champ indépendant du temps prend la forme

$$\psi(x) = (2\pi)^{-2} \iiint e^{ik\lambda x^\lambda} \zeta(k) d^4 k \quad (27)$$

dès qu'on exprime les fonctions propres de l'hamiltonien dans l'espace des  $\vec{k}$  [3].

#### Bibliographie

- [1] RIESZ, M., *Actes du 10<sup>ème</sup> Congrès des mathématiciens scandinaves*, Copenhague (1946), p. 123–148.
- [2] SCHWINGER, J., *Physical Review* 74 (1948), p. 1439–1461 et 75 (1949), p. 677–679.
- [3] LEVY, M., *Proc. Roy. Soc. 204 [A]* (1950), p. 149.
- [4] COSTA DE BEAUREGARD, O., *Journal de Physique* 15 (1954), p. 810–816, 16 (1955) p. 770–780 et 17 (sous presse, 1956). — *Comptes Rendus* 239 (1954) p. 1357.