

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 28 (1955)  
**Heft:** II-III

**Artikel:** Über das Schalenmodell für Atomkerne  
**Autor:** Bleuler, K. / Terreaux, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112611>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über das Schalenmodell für Atomkerne

von K. Bleuler und Ch. Terreaux

Theoretisch-physikalisches Seminar der Universität Zürich.

(15. III. 1955.)

*Abstract.* Within the framework of the shell-model the shape of the potential well and the distribution of the nucleons in space are calculated (this leads to the charge-distribution). A good agreement is found with the experimental results from high energy electron scattering. Some questions of the consistency of the model are treated and the charge independence of nuclear forces is tested in a new way. Finally a more detailed 2-dimensional representation of the level-scheme of shell-structure is given.

## § 1. Einleitung.

Das Schalenmodell für die Atomkerne wurde bisher hauptsächlich zur Deutung der Termschemata (Parität- und Drehimpulszuordnung) und zur Abschätzung der Grössen der magnetischen Momente und der Quadrupolmomente der Grundzustände verwendet. In dieser Arbeit dagegen sollen mit Hilfe desselben Modells diejenigen Kerndaten berechnet werden, welche in letzter Zeit experimentell sehr eingehend untersucht worden sind:

1. Die elektrische Ladungsverteilung im Innern des Kernes: sie wurde experimentell aus der Winkelverteilung schneller, gestreuter Elektronen bestimmt<sup>1-3</sup>). Dabei ergab sich das auffallende Resultat, dass der sogenannte Ladungsradius wesentlich kleiner ausfiel als die bisher angenommenen Kernradien. Im Innern ergab sich die Verteilung annähernd konstant, und der Abfall der Dichte erstreckte sich über einen wohlbestimmten Bereich.

2. Die Analyse der Streumessung von Neutronen an vielen schweren Kernen<sup>4</sup>) ergab einen neuen Wert für die Tiefe des mittleren Kernpotentials.

3. Mit Hilfe der Analyse der Termschemata der Spiegelkerne und der erfolgreichen Einführung der Quantenzahl für den isotopen Spin im Gebiete der leichten Kerne, konnte die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte sichergestellt werden. Es müssen sich deshalb die mittleren Kernpotentiale für Protonen und Neutronen gerade um die mittlere Coulombenergie pro Proton unterscheiden.

4. Durch weitere Messungen der sogenannten magnetischen Anomalie<sup>5)6)</sup> (Unterschied der magnetischen Aufspaltung im homogenen äusseren Felde gegenüber derjenigen im inhomogenen Feld der Elektronenhülle) ergab sich ein Hinweis dafür, dass die Stromverteilung im Kerne nicht homogen anzunehmen ist.

Es ist nun wichtig, zu bemerken, dass die Gültigkeit des Schalenmodells gerade an den hier besprochenen Kerneigenschaften weitgehend geprüft werden kann. Dieses Modell stellt nämlich vom mathematischen Standpunkte aus ein Näherungsverfahren der folgenden Art dar:

Um das wellenmechanische Mehrkörperproblem zu vereinfachen, werden zunächst sämtliche Kernkräfte durch ein mittleres Kernpotential  $W$  ersetzt, welches in gleicher Weise auf alle Protonen, resp. Neutronen wirkt (bei Ladungsunabhängigkeit muss für die Protonen nur das Coulombpotential hinzugefügt werden), zentral-symmetrisch und nur von Ort und Geschwindigkeit abhängig angenommen wird. Der allgemeinste Ansatz lautet dann:

$$W = V(r) + G(r) (\vec{l} \cdot \vec{s}). \quad (1)$$

Dieses Kernpotential mit Spin-Bahnkopplung liefert die folgenden Einpartikelzustände (Nukleonenbahnen)  $\psi_n$ :

$$E_n \psi_n = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi_n + W \psi_n. \quad (2)$$

Die Wellenfunktion des gesamten Kernes wird dann in dieser untersten Näherung durch das antisymmetrisierte Produkt dieser Einteilchenbahnen geschrieben:

$$\Psi^{(0)} = \sum_P (-1)^P \prod_n \psi_n, \quad (3)$$

während die Energieeigenwerte durch die entsprechende Summe der Eigenwerte aus (2) dargestellt sind:

$$E^{(0)} = \sum_n E_n. \quad (4)$$

Damit entsteht bereits ein Termschema des Kernes, wobei jeder Term durch eine bestimmte Besetzungsart der Einteilchenbahnen (aus (2)) charakterisiert ist\*). Diese Terme sind noch hochgradig entartet und beschreiben noch nicht die Wirklichkeit.

In einem zweiten Schritt müssen nun im Prinzip die individuellen Wechselwirkungen  $H^{(1)}$ , d. h. die Abweichungen vom angenommenen Mittelwert des Potentials zwischen den einzelnen Nukleonen berücksichtigt werden (Zwei- oder Mehrkörperkräfte). Dadurch

---

\*) Der tiefste Eigenwert  $E^{(0)}$  stellt gerade die Bindungsenergie des Kernes dar.

werden die soeben konstruierten Terme aufgespalten, und die neuen Eigenfunktionen können immer in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\Psi_i^{(1)} = \sum_k C_i^k \Psi_k^{(0)}. \quad (5)$$

(Die  $\Psi^{(0)}$  bilden ein vollständiges Orthogonalsystem.) Im Falle einer Störungsrechnung hätte man z. B.

$$C_i^k = \frac{-H_{ik}^{(1)}}{E_i^{(0)} - E_k^{(0)}}, \quad i \neq k \quad (6)$$

zu setzen, wobei  $H_{ik}^{(1)}$  das Matrixelement von  $H^{(1)}$  bezüglich der ungestörten Zustände  $\Psi^{(0)}$  bedeutet. Es ist nun sehr wesentlich für die Anwendung des Schalenmodells, dass die genannten zusätzlichen Kräfte  $H^{(1)}$  tatsächlich als Störung aufgefasst werden können. Wie durch Vergleich mit experimentellen Daten vielfach geprüft worden ist, werden nämlich die Termfolgen der ersten Näherung nicht wesentlich geändert. (Es ist aber dabei wichtig, dass die grosse Spin-Bahnkopplung bereits in der untersten Näherung mitberücksichtigt wird.) Damit ist aber ersichtlich, dass in den linearen Verbindungen nach (5) und (6) nur Zustände vorkommen, für welche die ungestörten Energiewerte  $E^{(0)}$  und infolgedessen auch die Besetzungszahlen der ungestörten Einteilchenfunktionen nicht stark untereinander abweichen. Handelt es sich z. B. um den Grundzustand des Kernes, so werden dem tiefsten, ungestörten Zustande der Form (3) (er entspricht einer „kompakten“ Besetzung der Einpartikelniveaus) nur Zustände beigemischt, welche sich in der Besetzung der obersten Energiestufen unterscheiden. Der Grossteil der Nukleonen bleibt aber in den selben ungestörten Bahnen. Ganz ähnliche Verhältnisse hat man etwa in einem Fermigas.

Hat man nun z. B. die Ladungsverteilung im Grundzustand zu berechnen, so genügt es offenbar, die ungestörte Eigenfunktion  $\Psi^{(0)}$  zu verwenden. Ebenso wird der ungestörte Eigenwert  $E^{(0)}$  schon eine gute Näherung für die gesamte Bindungsenergie des Kernes darstellen. Allgemein kann man sagen, dass alle physikalischen Grössen, für welche sämtliche Nukleonen gleichmässig beitragen, schon durch die erste (unterste) Näherung gut dargestellt werden können. Im ganzen handelt es sich um eine Verfeinerung des statistischen Modells; es wird sich aber zeigen, dass es sehr wesentlich ist, die Lösungen der Gleichung (2) an Stelle der einfachen ebenen Wellen zu verwenden.

Im zweiten Abschnitt wird nun zuerst gezeigt, wie man auf Grund dieser ersten Näherung mit Hilfe der empirisch gegebenen Bindungsenergien und Kernradien die Tiefe der Potentialmulden  $V$  für Proton



und Neutron schon festlegen kann. Damit wird bereits die Ladungssymmetrie verifiziert. Es ergibt sich auch eine quantitative Bestimmung des bekannten Termschemas des Schalenmodells, wenn man noch die Werte für die Spin-Bahnkopplung aus einer Analyse der Terme einiger leichten Kerne entnimmt.

Im dritten Abschnitt werden mit Hilfe der selben Näherung die Form der Dichteverteilung, insbesondere der Ladungsradius diskutiert werden. Für die Untersuchung der experimentell gefundenen Termschematas der Kerne ist die Berücksichtigung der direkten Wechselwirkung  $H^{(1)}$  zwischen den Nukleonen natürlich wesentlich. Hierzu braucht es aber besondere Annahmen (z. B. Paarabsättigung, welche für ungerade Kerne wieder zu Einpartikelzuständen führt, oder Diskussion allgemeiner Konfigurationen). Es ist wichtig, dass die Grössen, die hier berechnet werden, von diesen Annahmen noch unabhängig sind.

Nebenbei sei bemerkt, dass die hier betrachtete Näherung im Gebiet der leichten Kerne versagt ( $A \gg 1$  ist notwendig zur Definition des mittleren Potentials). Dagegen kommt es in diesem Falle vielfach zur Bildung relativ stabiler Strukturen ( $O^{16}$ ,  $C^{12}$ ), so dass die tiefliegenden Terme vieler ungerader Kerne in der folgenden Weise aufgefasst werden können: Ein „Leuchtnukleon“ bewegt sich im Kraftfelde, welches von einem stabilen Rumpfe erzeugt wird. Da dieses Feld wieder kugelsymmetrisch ist, hat man es wieder mit Lösungen der Gleichung (2) zu tun. Es gibt aber ein Zwischengebiet (Kerne bei  $A \sim 23$ ), wo man weder das Schalenmodell, noch die genannten Vereinfachungen für leichte Kerne verwenden kann. Es zeigt sich tatsächlich, dass dort viele Zustände durch kompliziertere Konfigurationen beschrieben werden müssen.

## § 2. Berechnung des mittleren Potentials, der Coulombenergie und des Niveauschemas.

### I. Das mittlere Potential.

Im Rahmen der besprochenen ersten Näherung gilt nun folgendes: Sind für einen bestimmten Kern der Radius und die Bindungsenergie empirisch gegeben, so können daraus mit Hilfe naheliegender Annahmen die Tiefen der Potentialmulden für Protonen und Neutronen bestimmt werden. Angenommen wird dabei folgendes:

1. Der Verlauf des mittleren Potentials wird bis auf zwei Parameter  $V_0$ ,  $R_0$  für Längenmaßstab und Tiefe vorgegeben:

$$V(r) = V_0 \cdot v\left(\frac{r}{R_0}\right) \quad (7)$$

( $V_0$  in MeV,  $R_0$  in  $10^{-13}$  cm).  $v(\xi)$  stellt eine dimensionslose Funktion dar, welche die Form des Potentialverlaufes charakterisiert.

2. Die Spin-Bahnkopplung wird für diese Betrachtung zunächst vernachlässigt. (Die entsprechende Aufspaltung der Terme hat einen sehr geringen Einfluss bei der Bildung der gesamten Bindungsenergie).

3. Bei der Besetzung der einzelnen Bahnen durch Protonen und Neutronen muss verlangt werden, dass die Energie der obersten durch ein Proton besetzten Bahn um 1,26 MeV höher liegt als diejenige für das entsprechende Neutron, oder mit anderen Worten: beim Auffüllen der Bahnen müssen die Grenzenergien für Protonen und Neutronen bis auf ihre Massendifferenz übereinstimmen ( $\beta$ -Stabilität; würde man noch den  $K$ -Einfang berücksichtigen, so wären anstelle von 1,26 nur 0,75 MeV zu verwenden).

Durch diese Methode sollen nun die Potentialmulden für alle Kerne des periodischen Systems bestimmt werden. Zur Durchführung der Aufgabe muss man sich zunächst eine Übersicht über den Verlauf der zu einer Potentialmulde gehörenden Eigenwerte als Funktion der beiden Parameter  $V_0$ ,  $R_0$  verschaffen. Dabei wurden 3 verschiedene Potentialformen  $v(\xi)$  untersucht:

1. Die flache Mulde,

$$v = 1: 0 \leq \xi \leq 1; \quad v = 0: \xi > 1.$$

2. Das Stufenpotential,

$$v = 2: 0 \leq \xi \leq \frac{1}{3}; \quad v = 1: \frac{1}{3} < \xi \leq 1; \quad v = 0: \xi > 1.$$

3. Das Oszillatorpotential.

Die zugehörigen Eigenwertprobleme (2) sind in längerer Arbeit gelöst worden. Die Resultate haben wir für die Formen 1. und 2. in Fig. 1 graphisch zusammengestellt. Die Lösung hat die Form (in üblicher Bezeichnung):

$$\psi_m = \frac{1}{r} \chi_n(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (8)$$

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left( -\chi_n'' + \frac{l(l+1)}{r^2} \chi_n \right) + V \chi_n = E_n \chi_n. \quad (9)$$

Daraus sieht man, dass die beiden Parameter  $V_0$ ,  $R_0$  nur in der dimensionslosen Kombination

$$X = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} V_0 R_0^2} \quad (10)$$

in die Eigenwertgleichung eingehen, wenn auch die Eigenwerte in der dimensionslosen Form

$$\varepsilon_n = \frac{E_n}{V_0} \quad (11)$$

geschrieben werden. Die Grössen  $\varepsilon_n$  sind deshalb als Funktionen von  $X$  in Fig. 1 aufgetragen worden. (Kurven  $\varepsilon_n(X)$  für die Potentialformen (1) und (2); dabei ist für jeden Eigenwert die Drehimpulszuordnung und die Besetzungszahl angegeben.) Der Parameter  $X$  stellt in gewissem Sinn ein Mass für das Fassungsvermögen einer Potentialmulde dar, wenn die Funktion  $v(\xi)$  in geeigneter Weise normiert wird\*).

In dieser Übersicht ist zu erkennen, dass der Verlauf derjenigen Eigenwerte, die einen hohen Drehimpuls (d. h. hohe Besetzungszahlen) aufweisen, für die beiden Potentialformen nicht wesentlich verschieden ist. Die Rechnung wird deshalb hier nur mit der flachen Mulde fortgeführt. Man wird später sehen, dass sich dieselbe für die schweren Kerne am besten eignet.

Jetzt stellt sich die Aufgabe, für jeden Kern die richtigen Potentialmulden (d. h. die richtigen Parameterwerte  $V_0^P, R_0^P; V_0^N, R_0^N$ ) für Protonen und Neutronen zu bestimmen: Zunächst wählt man für die Radien  $R_0^P, R_0^N$  beider Mulden den empirischen Kernradius\*\*)  $R_k$ :

$$R_0^P = R_0^N = R_k = 1,4 A^{1/3}. \quad (13)$$

Für die beiden Parameter  $V_0^P$  und  $V_0^N$  bleiben dann gerade noch zwei Bedingungen:

1. Die experimentell gegebene Bindungsenergie  $B$  des Grundzustandes soll mit dem theoretischen Wert (4) der ersten Näherung übereinstimmen. Mit unserer neuen Bezeichnungsweise heisst dies

$$B = V_0^P \sum_{n=1}^Z \varepsilon_n(X^P) + V_0^N \sum_{n=1}^N \varepsilon_n(X^N). \quad (14)$$

---

\*) Will man verschiedene Potentialverläufe untereinander vergleichen, so ist die folgende Normierung von  $v(\xi)$  zweckmässig

$$\int_0^\infty \sqrt{v(\xi)} d\xi = 1. \quad (12)$$

Dies entspricht nach (11) einer eindeutigen Festlegung der Einheit für den Parameter  $X$ . Damit werden jetzt für gleiche  $X$  die Mittelwerte der  $\varepsilon_n$  (alle mit Gewicht 1) für verschiedene Potentialverläufe ungefähr gleich. Bei dieser Normierung hat man in Fig. 1 für das Stufenpotential den neuen Parameter  $X^{(2)} = 1,138 X$  zu verwenden.

\*\*) Die Verwendung dieses „alten“ Wertes für die Potentialmulden erweist sich als richtig (vgl. § 3).



einige Kerne, welche über das ganze periodische System gleichmässig verteilt sind, bestimmt.

Es handelt sich um ein schrittweises Anpassen mit Hilfe der graphischen Darstellung der  $\varepsilon_n(X)$  nach Fig. 1. Da die Grenzenenergien  $\varepsilon^P$  und  $\varepsilon^N$  in unserer Näherung als Funktion der Besetzungszahlen diskontinuierlich verlaufen, ist die Gleichung (15) nur im Mittel über ein bestimmtes Intervall im periodischen System erfüllt worden. Die numerischen Resultate sind zunächst in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

$El$	$Z$ $N$	$A$	$R$ $10^{-13}$ cm	$X^P$ $X^N$	$B(\text{Exp})$ MeV	$B_P$ $B_N$	$V_0^P$ $V_0^N$	$V_0^N-V_0^P$	$C$	$C'$	$\bar{V}_e$
O	8 8	16	3,53	2,87 2,97	58,3 127,2	24,40 26,13		1,73	15,7	3,0	1,59
Ca	20 20	40	4,79	3,90 4,05	153,6 342	24,37 26,32		1,95	72,2	7,5	3,24
Cr	24 28	52	5,22	4,29 4,45	208,5 459,2	24,90 26,77		1,87	95,2	8,7	3,60
Ag	47 60	107	6,65	5,12 5,71	325 906	21,80 27,18		5,38	287,2	16,9	5,75
Gd	64 91	155	7,51	5,58 6,49	406 1282	20,37 27,47		7,10	471	22,5	7,00
Pb	82 126	208	8,30	5,93 7,18	445 1626	18,81 27,58		8,77	701	28,3	8,20
U	92 146	238	8,68	6,05 7,46	451 1790	17,93 27,21		9,28	844	31,6	8,83

Mit diesen Resultaten kann man die Werte für das ganze periodische System durch Interpolation angeben. In Fig. 1 sind die Parameterwerte  $X^P$  und  $X^N$  als Funktion von Protonen- und Neutronenzahl durch zwei kontinuierliche Kurven dargestellt, ebenso die diskontinuierlich verlaufenden Grenzenenergien (Zackenkurven). Schliesslich sind in Fig. 2 alle physikalisch wichtigen Energien als Funktion der Nukleonenzahl  $A$  dargestellt: Energien der einzelnen Bahnen, Tiefen der Potentialmulden für Protonen und Neutronen, Mittelwerte der Grenzenenergien (d. h. Mittelwerte aus den Zackenkurven



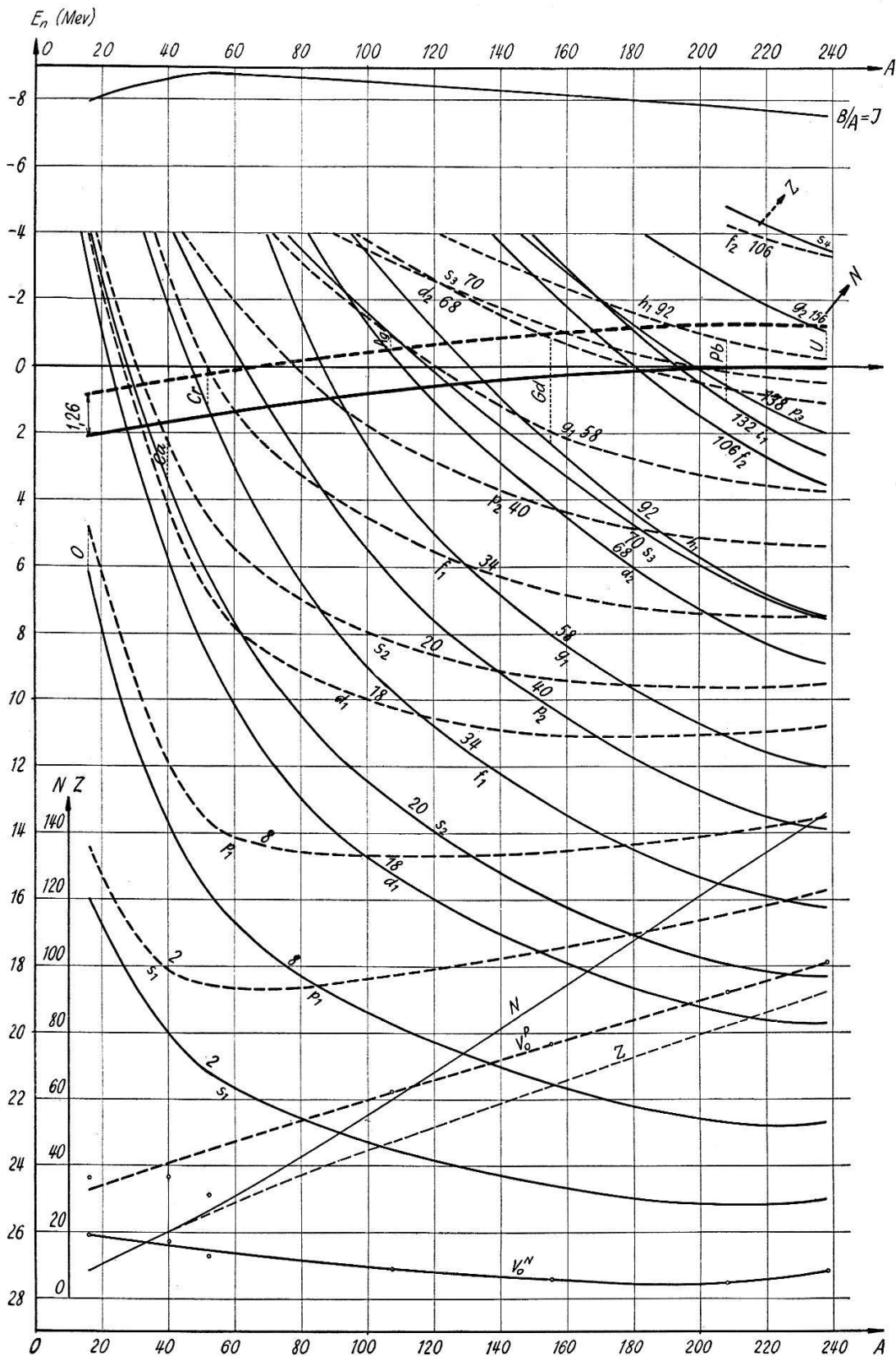


Fig. 2.

Die Einteilchenniveaus sämtlicher Kerne für einen flachen mittleren Potentialverlauf ( $R_k = 1,40 A^{1/3}$ ). Eigenwerte  $E_n$  in MeV aufgetragen als Funktion der Nukleonenzahl  $A$  (ausgezogene Linien für Neutronen und gestrichelte Linien für Protonen) ohne Spinbahnaufspaltung. Tiefen der Potentialmulden  $V_0^P$ ,  $V_0^N$  für Protonen resp. Neutronen, Mittelwerten der Grenzenergien und Ionisationsenergie  $J$ .

von Fig. 1; diese erfüllen nach dem Gesagten die Bedingung (15)) und schliesslich die Ionisationsenergie für ein Nukleon. Für einen bestimmten Kern mit der Nukleonenzahl  $A$  können also auf einem Vertikalstrich sämtliche Grössen (in MeV) abgelesen werden. Es zeigt sich auch hier, dass die Tiefen der Potentialmulden für Neutronen über das ganze periodische System praktisch dieselben sind (ca. 27 MeV); da nach (13) auch die mittleren Nukleonendichten von  $A$  unabhängig sind, ist dieses Resultat eine gute Verifikation des Modells.

## II. Die Coulombenergie.

Es ist nun von Interesse, die Tiefen der Protonmulde mit derjenigen für die Neutronen zu vergleichen. Sind die Kernkräfte ladungsunabhängig, so müssen sich diese gerade um die mittlere

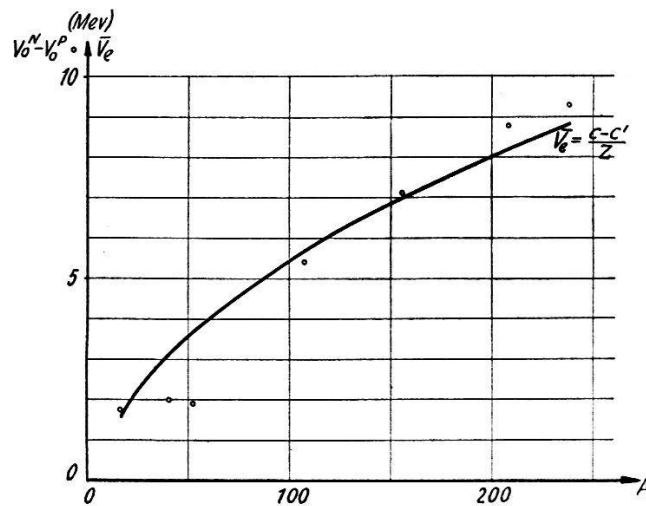


Fig. 3.

Vergleich der mittleren Coulombenergie pro Proton (ausgezogene Kurve) mit den berechneten Unterschieden der Tiefen der Potentialmulden für Neutronen und Protonen für die 7 gerechneten Kerne (kleine Kreise).

Coulombenergie  $\bar{V}_e$  pro Proton des entsprechenden Kernes unterscheiden.

$$\bar{V}_e = \frac{C-C'}{Z}, \quad C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_k} Z^2, \quad C' = \frac{3^{5/3}}{\pi^{2/3} 2^{8/3}} Z^{4/3}. \quad (16)$$

$C$  bedeutet den mittleren Wert der Coulombenergie einer homogenen Ladungsverteilung im Innern des Kernes, während  $C'$  den Beitrag des Austausches darstellt; er wurde mit Hilfe des statistischen Modells abgeschätzt<sup>7)</sup>, was im Hinblick auf den verhältnismässig kleinen Anteil (5% für schwere Kerne) erlaubt ist. Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 1 auch angegeben. In



Fig. 3 ist nun  $\bar{V}_e$  (ausgezogene Kurve) mit den berechneten Unterschieden der Potentialmulden (kleine Kreise) verglichen. Es zeigt sich im Gebiete der schwereren Kerne eine recht eindruckliche Übereinstimmung. Bei den leichteren Kernen, wie z. B. Ca, sind die Schwankungen der Nukleonenzahl noch zu gross, um eine kontinuierliche Kurve zu erhalten. Auch ist zu berücksichtigen, dass man in Formel (15) auch den kleineren Wert 0,75 MeV für die Differenz der Grenzenergien verwenden könnte.

### III. Die Lage der Grenzenergien.

Aus den Figuren 1 und 2 ist ersichtlich, dass die Grenzenergien alle in der Nähe des oberen Randes der Potentialmulde liegen. (Man vergleiche die „Zackenkurve“ in Fig. 1 und deren Mittelwert in Fig. 2 mit der Nulllinie). Dies bedeutet, anschaulich gesprochen, dass die Potentialmulden gerade vollständig mit Nukleonen ausgefüllt sind. Berücksichtigt man noch, dass man bei den leichteren Kernen von der hier angenommenen flachen Mulde allmählich zum Oszillatorpotential übergehen sollte, so ergibt sich ein vollständig horizontaler Verlauf in der Nähe der Nulllinie. Wir werden gleich sehen, dass diese auffallende Tatsache mit der Konsistenz des Modells in engem Zusammenhang ist.

Es muss aber zuerst bemerkt werden, dass wir die Kurven für die Energieeigenwerte in Fig. 1 und 2 immer ein Stück über die Nulllinie in das Gebiet der kontinuierlichen Zustände extrapoliert haben. Dies war notwendig, um in allen Fällen genügend Zustände für die Nukleonen des Kernes zur Verfügung zu haben. Dazu ist folgendes zu beachten: Das mittlere Potential  $V(r)$ , das hier verwendet wird, ist für die folgenden relativen Lagen der Nukleonen im Raume eine gute Näherung:

- a) Sämtliche Nukleonen befinden sich im Innern des Kernes (d. h. im praktisch realisierten Falle).
- b) Sämtliche Nukleonen im Aussenraume (mit dem Werte Null für  $V$  erhält man dann gerade den richtigen Wert (4) für die gesamte Bindungsenergie).

Betrachtet man aber z. B. den Ablösungsvorgang eines einzelnen Nukleons (d. h.  $A-1$  Nukleonen im Innern, 1 Nukleon im Äussern), so ist in unserem Falle gerade noch die Ionisationsenergie von ca. 8 MeV zum Potentialwall hinzuzufügen. Es muss nämlich berücksichtigt werden, dass beim Ablösungsvorgang eines Nukleons die mittlere Potentialmulde verkleinert wird (sie entspricht jetzt derjenigen von  $N-1$  Nukleonen) und dass dadurch sämtliche besetzten

Niveaus etwas gehoben werden. Die hierzu notwendige Energie wird gerade durch den zusätzlichen Potentialwall von 8 MeV dargestellt. Diese Verhältnisse sind in Fig. 4 graphisch dargestellt.

Man verifiziert anhand dieser Zeichnung leicht, dass man jetzt durch sukzessive Ionisation wieder zum richtigen Werte (4) für die gesamte Bindungsenergie kommt. Damit erhält man nun das gesamte Potential, welches z. B. für die Neutronstreuung verwendet werden muss. Die Tiefe beträgt  $27 + 8 = 35$  MeV und die Breite

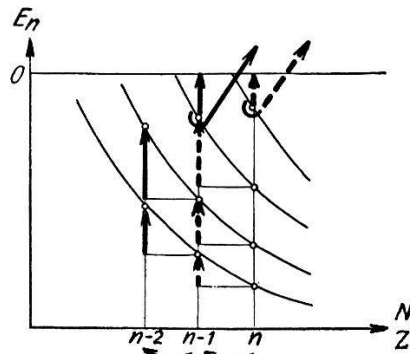


Fig. 4.

Zur Diskussion der Ionisationsenergie.

etwas mehr als  $1,4 A^{1/3}$ . Diese Werte entsprechen ungefähr dem exp. Befund<sup>4)</sup>. Mit dem zusätzlichen Potentialwall erhält man aber auch auf den extrapolierten Stücken der Eigenwertkurven noch stationäre Zustände und die Eigenwerte werden hauptsächlich für die grösseren Drehimpulse (wegen dem entsprechend grossen Drehimpulswall) und für Protonen (Coulombwall) noch gute Näherungen bilden. Man sieht aber, dass für die kleineren Drehimpulse bei Neutronen bereits Abweichungen zu erwarten sind und dass es für die Konsistenz der ganzen Methode sehr wesentlich ist, dass man mit den Grenzenenergien nur wenig über die Nulllinie kommt. In gewissem Sinne stellen also die experimentellen Radien  $R_k = 1,40 A^{1/3}$  gerade minimale Werte dar; ein kleinerer Wert für  $R_k$  würde nämlich bei der vorgegebenen Bindungsenergie zur Besetzung vieler Zustände über der Nulllinie führen. Die zugehörigen Eigenfunktionen würden dann eine Dichteverteilung der Nukleonen ergeben, die wesentlich über die ursprünglich angenommene Potentialmulde hinausreicht (vgl. § 3).

#### IV. Das Termschema des Schalenmodells.

Nachdem nun sämtliche Grössen, welche in der ersten Näherung eingehen, bestimmt worden sind, ist es jetzt möglich, die Spin-Bahnkopplung quantitativ richtig zu berücksichtigen: Bei einigen leichten Kernen lässt sich der Wert der Spin-Bahnaufspaltung

direkt ablesen: 2,5 MeV für die  $p_{3/2}$ - $p_{1/2}$ -Aufspaltung bei  $H_e^5$ , ca. 5 MeV für die Aufspaltung  $d_{5/2}$  —  $d_{3/2}$  bei  $C^{13}$ ,  $N^{13}$ ,  $F^{17}$ . Da die Tiefe des entsprechenden Kernpotentials bei diesen leichten Kernen ungefähr denselben Wert besitzt, lässt sich diese Spin-Bahnaufspaltung

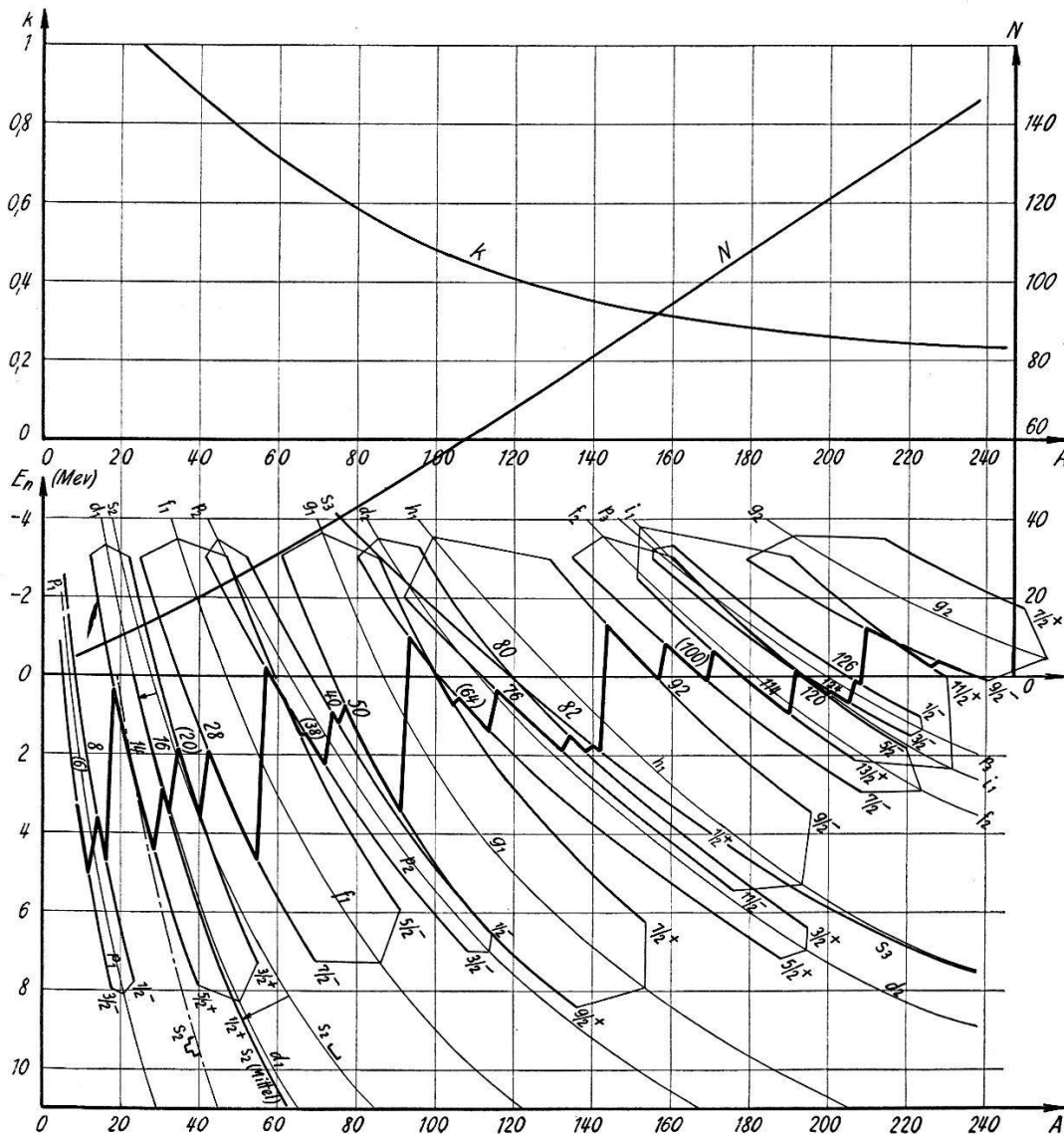


Fig. 5.

*Das Termschema des Schalenmodells für Neutronen.*

Einpartikelniveaus  $E_n$  in MeV mit Spinbahnaufspaltung auftragen als Funktion der Nukleonenzahl  $A$ . Der Wert der Spinbahnaufspaltung ( $k \cdot l \cdot 2,5$  MeV) ist proportional  $l$  und dem Faktor  $k(A)$ , welcher ein Mass für den Gradienten des Potentials darstellt. (Kurve  $k$  als Funktion  $A$  in der oberen Hälfte.) Die Zackenkurve stellt die Grenzenergie für die Grundzustände dar: Das Auftreten der magischen Zahlen ist aus den grossen Sprüngen bei  $N = 8, 28, 50, 82, 126$  ersichtlich (Kurve  $N(A)$ ). Alle Terme sind für flache Potentialmulden gerechnet. Für leichte Kerne ist noch der Übergang zum Stufenpotential angegeben ( $s_2$ ).

in folgender Weise auf die schweren Kerne übertragen. Die Aufspaltung wird proportional den folgenden Grössen angenommen:

Bahndrehimpuls  $l$  und einem gemittelten Wert  $k$  des Gradienten des Potentials, wobei als Gewicht das Quadrat der Wellenfunktion verwendet wird. Damit ergibt sich das vollständige Termschema der Einnukleonzustände (Fig. 5). Es ist hier instruktiv die erwähnte „Zackenkurve“ für die Grenzenenergien in entsprechender Weise einzutragen. Die grossen Stufen, welche jetzt das System der Kerne vollständig in einzelne Gruppen aufteilen, geben in eindrucklicher Weise das Auftreten der magischen Zahlen wieder:

$$8, \quad 28, \quad 50, \quad 82, \quad 126.$$

Die kleineren Stufen bei

$$6, \quad 20, \quad 38, \quad 64, \quad \text{eventuell } 100$$

entsprechen den sogenannten halbmagischen Zahlen. Die Zahlen 38 und 64 sind auch schon bei der Untersuchung der angeregten Zustände von geraden Kernen in eindrucklicher Weise in Erscheinung getreten<sup>8)</sup>. Im Gegensatz zu den üblichen eindimensionalen Darstellungen des Termschemas trägt unsere zweidimensionale Form den Verschiebungen der Niveaus mit wachsendem  $A$  Rechnung. Auch sind die Aufspaltungen durch Analyse der leichten Kerne bestimmt, und das ganze Schema ist im wesentlichen ohne irgendwelche Anpassung gezeichnet worden (nur bei den höchsten Drehimpulsen ( $l = 5$  und  $6$ ) wurde bei der entsprechenden grossen Aufspaltung der Schwerpunkt aus den beiden Zweigen etwas nach oben verschoben). Für Protonen wäre nach Fig. 2 ein etwas anderer Verlauf zu erwarten. Auch müsste man bei den leichteren Kernen den Übergang zum Oszillatorpotential durchführen. Die Spin-Bahnaufspaltung ergab sich etwas grösser als in den meisten Termschematas, welche bisher angegeben wurden, was zur Folge hat, dass die Aufteilung der Terme in einzelne Gruppen noch deutlicher wird als früher.

Beim Vergleich mit der Erfahrung muss man beachten, dass bei Berücksichtigung der zweiten Näherung die Reihenfolge der einzelnen Terme innerhalb der Gruppen zwischen je zwei magischen Zahlen verändert werden kann. Es hängt dies im Rahmen der zweiten Näherung davon ab, wieviele energetisch benachbarte Zustände bereits in der ersten Näherung existieren, mit welchen ein herausgegriffener Einpartikelzustand kombinieren kann. Die energetisch grossen Sprünge bei den magischen Zahlen werden aber nie überbrückt; es gilt ausnahmslos die Regel, dass die Zuordnungen der Grundzustände und der tiefsten angeregten Niveaus eines unge-

raden Termes aus einer Gruppe zwischen zwei magischen Zahlen zu finden sind: Wohl aber werden die Energiestufen bei den magischen Zahlen durch die nächste Näherung etwas verkleinert. Sind zwei Gruppen nur durch eine halbmagische Zahl getrennt, so können gelegentlich Überbrückungen vorkommen. Aus diesen Tatsachen kann man sich auf empirischem Wege eine Vorstellung darüber verschaffen, wie gross der Einfluss der direkten Wechselwirkungskräfte (2. Näherung) auf das Termschema ist; doch soll auf diese Frage in einer späteren Arbeit näher eingegangen werden.

### § 3. Berechnung der Ladungsverteilung.

#### I. *Das Näherungsverfahren.*

Die wichtigste Anwendung der ersten Näherung ist nun die Bestimmung der Dichteverteilung der Nukleonen, insbesondere der Verteilung der Protonen, welche zur experimentell bestimmten Ladungsverteilung des Kernes führt. Nachdem nämlich der Vergleich der experimentellen Resultate über die Drehimpulszuordnungen bei ungeraden Kernen mit der ersten Näherung zeigt, dass eine Mischung der Zustände nur in relativ geringem Umfange vorkommt, kann man jetzt mit einigem Vertrauen diese Näherung allein zur Bestimmung der Dichteverteilung verwenden.

Für diese Rechnung darf man die Spin-Bahnkopplung wieder vernachlässigen. Um aber das experimentell gut untersuchte Verhalten der elektrischen Ladungsverteilung am Rande des Kernes besser wiederzugeben, wird jetzt eine Potentialmulde mit abgeschrägten Wänden verwendet. In Fig. 6 sind die verschiedenen Masse, welche für den Ag-Kern angenommen werden, angegeben\*). Jetzt stellt sich aber die Frage für diese Mulde die Eigenfunktionen durch ein geeignetes Näherungsverfahren zu bestimmen. Die folgende, sehr einfache graphische Methode führt, wie wir uns durch Vergleich bei explizit lösbaren Problemen überzeugt haben, bereits zum Ziele: Die Gleichung (9) für die Radialabhängigkeit, welche nun zu lösen ist, hat die Form eines eindimensionalen Eigenwertproblem, und zwar handelt es sich für  $l \neq 0$  darum, den 1. eventuell 2. Eigenwert einer eindimensionalen, einfachen Potentialmulde zu bestimmen. Die Randbedingung auf der linken Seite verlangt allerdings das Verschwinden von  $\chi$  bereits bei  $r = 0$  (an Stelle  $r \rightarrow -\infty$ ). Nun wird auf graphischem Wege diejenige Parabel gesucht, welche die

\*) Die Mulde ist so konstruiert, dass das „Fassungsvermögen“ gegenüber dem früheren Fall dasselbe bleibt. Der Coulombwall kann hier gegenüber den hohen Drehimpulswällen noch vernachlässigt werden.



vorgegebene Potentialmulde unseres Problems am besten annähert (vgl. Fig. 6); die dazugehörigen Eigenfunktionen des Oszillators bilden dann im wesentlichen die gesuchte Näherung. (Um den richtigen Eigenwert zu erhalten, genügt es offenbar, den Potentialverlauf nur in demjenigen Intervall anzunähern, in welchem die

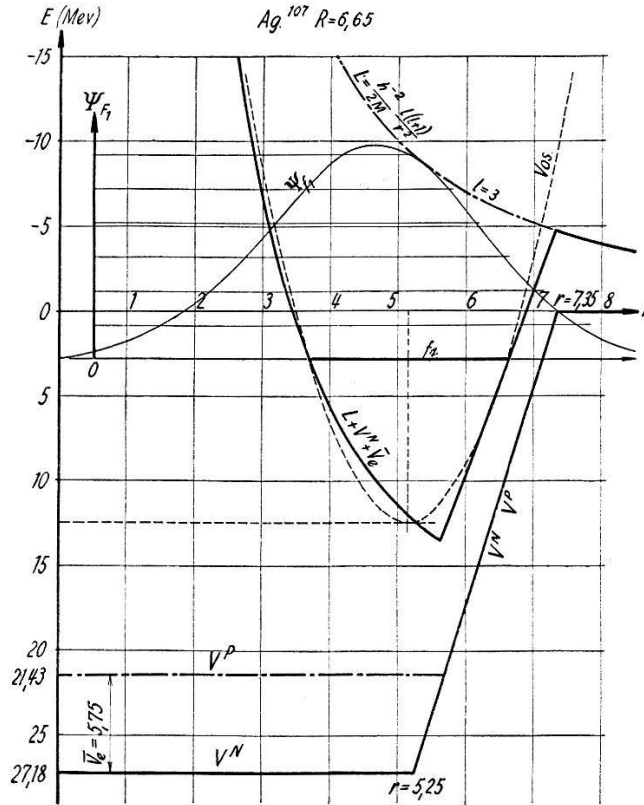


Fig. 6.

Die Masse der Potentialmulden  $V^N$  und  $V^P$  für Protonen und Neutronen mit abgeschrägten Wänden für Ag.

Graphische Darstellung des Näherungsverfahrens. Die gestrichelte Kurve stellt die gewählte Näherungsparabel  $V_{os}$  dar, für das Gesamtpotential, welches aus der schrägen Mulde und dem Drehimpulsterm gebildet ist. Das genäherte Niveau  $f_1$  für Protonen und die dazu gehörige Wellenfunktion  $\Psi_{f_1}$  sind angegeben.

Eigenfunktion wesentlich von Null verschieden ist; im äusseren Gebiet wird die Eigenfunktion durch eine andere einfache Näherung dargestellt; doch ist dies nur für die  $p$ -Zustände tatsächlich notwendig. Für die  $S$ -Zustände können die Eigenfunktionen der entsprechenden rechteckigen Potentialmulde verwendet werden.)

## II. Die Ladungsverteilung.

Auf diese Weise wurde die Ladungsverteilung für den Silberkern bestimmt (Fig. 7). Es zeigt sich nun in recht eindrücklicher Weise, dass die Dichteverteilung im Innern des Kernes annähernd konstant ausfällt, während dieselbe am Rande über eine bestimmte Breite

gleichmässig abfällt. Die Konstanz kommt anschaulich gesprochen dadurch zustande, dass sich die ringförmig verteilten Dichten, welche zu den verschiedenen Drehimpulswerten gehören, der Reihe nach aneinander lagern (Fig. 7). Andererseits verhält sich der Abfall

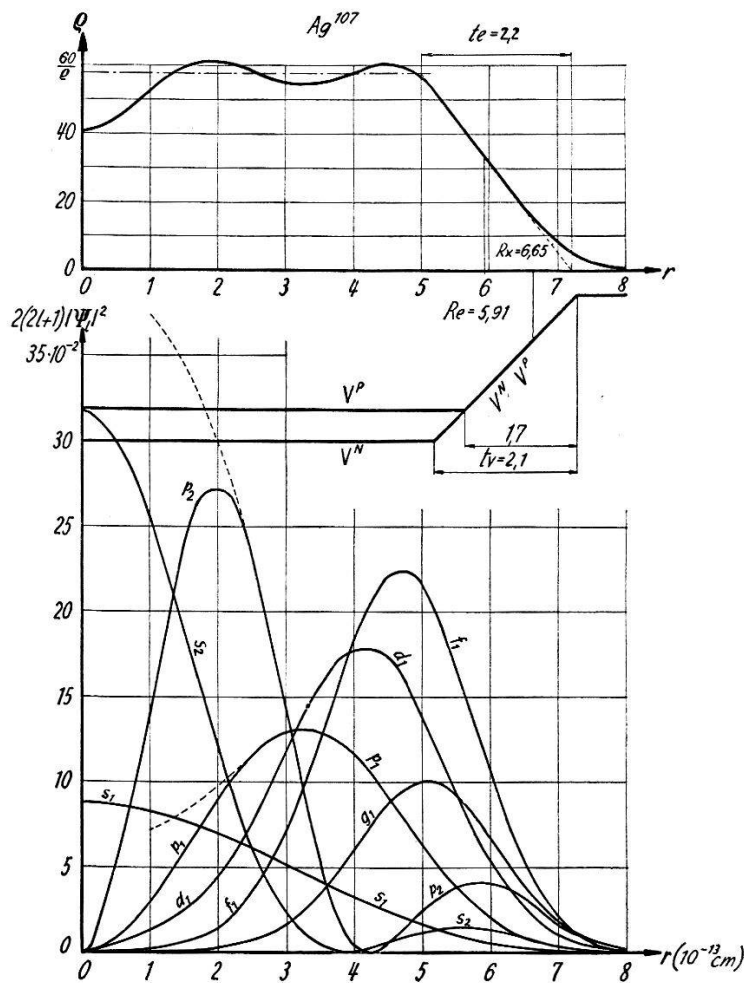


Fig. 7.

1. Die Dichteverteilungen der verschiedenen Schalen  $s_1, s_2, p_1 \dots$  für die Protonen des Ag-Kernes. (Abgeschrägtes Potential  $V^p$ .) Aufgetragen ist die Gesamtdichte bei vollständig gefüllten Schalen als Funktion des Abstandes  $r$  vom Zentrum (die letzte Schale  $g_1$  enthält nur 7 Protonen). Gestrichelte Kurve: Verlauf der Oszillatorlösung ohne Korrektur, welche nur bei den  $p$ -Niveaus notwendig ist.
2. Oben: Verlauf der gesamten Protonendichte für den Silberkern (Summe aus den Beiträgen der verschiedenen Schalen). Der mittlere Ladungsradius  $R_e$  und die Abfallsbreite  $t_e$  sind eingetragen. Der angegebene Wert  $R_x = 1,4 A^{1/3}$  entspricht dem Radius einer flachen Potentialmulde, welche dasselbe Fassungsvermögen besitzt, wie der hier verwendete abgeschrägte Potentialverlauf.

im äusseren Gebiet ähnlich wie der Verlauf der Potentialmulde\*). Man hat also erreicht, dass der Gesamtverlauf der Dichteverteilung ziemlich gut der Form der Potentialmulde entspricht. Diese „Selbst-

\*) Eine Potentialform mit etwas weniger steilen Wänden würde die Verhältnisse etwas besser darstellen ( $t_e = 2,8$  in Fig. 7).



konsistenz“ ist schon im ersten Schritt erfüllt worden, da sich zeigt, dass erst eine wesentliche Änderung des Potentialverlaufes eine merkliche Änderung der Dichteverteilung hervorbringt. Die kleine Einsenkung der konstruierten Dichteverteilung im Zentrum des Kernes nimmt nur einen sehr geringen Bruchteil des Kernvolumens ein; sie wird verschwinden, sobald beim Übergang zu schwereren Kernen der nächste *S*-Zustand aufgefüllt wird. Die auf diese Weise konstruierte Dichteverteilung ist nun mit dem eingangs erwähnten Resultat aus der Streumessung für Elektronen zu vergleichen<sup>1-3</sup>). Wir erhalten für den Ag-Kern den Ladungsradius  $R_e = 1,24 \cdot A^{1/3}$  und die „Abfallbreite“  $s = 1,35^*$ ); dies entspricht dem experimentellen Resultat, welches für den Goldkern gewonnen wurde recht gut ( $R_e = 1,2 A^{1/3}$ ,  $s = 1,65$ ). Die Form der Ladungsverteilung, d. h. der mittlere Ladungsradius und die Breite des Abfalls stimmen also gut mit der Elektronenstreumessung überein\*\*), während andererseits unsere Potentialmulde (nach Abschnitt 2) den Resultaten entspricht, welche kürzlich durch Analyse der Streumessungen von Neutronen an verschiedenen Kernen erhalten wurde<sup>4</sup>). Die in dieser Analyse verwendete Methode des komplexen Potentials lässt sich gut mit den hier angegebenen Vorschriften interpretieren: Der reelle Teil dieses Potentials stellt die Wirkung unseres mittleren Potentials dar (dieses kann nur eine elastische Streuung erzeugen), während der imaginäre Teil die Wirkung der individuellen Wechselwirkung zwischen den Nukleonen im Sinne unserer zweiten Näherung charakterisiert. (Diese beschreibt in der Tat alle weiteren Prozesse, welche das einfallende Neutron ausführen kann.)

Aus der Konstruktion nach Fig. 6 ist zu ersehen, dass die ringförmige räumliche Struktur der Schalen, welche zu grossen Bahndrehimpulsen  $l$  gehören, durch den hohen Drehimpulswall erzeugt wird. Damit wird ersichtlich, dass dieser Konzentrationseffekt bei Protonen in sehr schweren Kernen durch den ähnlich verlaufenden Coulombwall noch etwas verstärkt wird. Die Ringstruktur, welche zu kleinen Relativabständen der Nukleonen führt (Fig. 7), ist aber für die grossen Paarungsenergien verantwortlich. Diese werden jetzt durch den Coulombwall noch vergrössert: Man hat also eine Erklärung für die merkwürdige Tatsache, dass die Paarungsenergie in schweren Kernen für Protonen etwas grösser ist als für Neutronen<sup>9</sup>).

\*)  $s$  ist aus unserer graphischen Darstellung nach der von den genannten Autoren<sup>3</sup>) verwendeten Definition bestimmt.

\*\*) Der scheinbare Widerspruch, welcher bisher zwischen verschiedenen Angaben über die Radien bestand, klärt sich auf: Es handelt sich immer um geeignete Mittelwerte (Definitionen), die erst gebildet werden können, wenn die entsprechenden Verteilungen (Ladungsdichte, Potentialverlauf) berechnet sind.

### III. *Diskussion einiger experimenteller Resultate.*

Verschiedene Messungen über die Winkelverteilung von  $\mu$ -Mesonen<sup>10, 11)</sup> liessen zunächst vermuten, dass die Ladungsverteilung im Kerne eine Konzentration im Zentrum aufweisen könnte. Nach den jetzigen Betrachtungen scheint dies für die schweren Kerne ausgeschlossen zu sein, in Übereinstimmung mit den Resultaten der Elektronenstreuversuche und den Messungen über das  $\mu$ -Mesic-Atom<sup>12, 13)</sup>. Der Ausweg muss wohl in einer Geschwindigkeitsabhängigkeit der Wechselwirkung zwischen Nukleon und  $\mu$ -Meson gesucht werden.

Ein experimentelles Resultat, das sich in diesem Rahmen gut interpretieren lässt, ist der verhältnismässig grosse Wert der magnetischen Anomalie. Diese gibt Aufschluss über die Verteilung des magnetischen Momentes (oder besser Stromverteilung) im Innern des Kernes. Die empirischen Resultate haben nämlich gezeigt, dass man eine gute Übereinstimmung erhält, wenn man für die Kernwellenfunktion einen Ein-Partikelzustand verwendet, während ein homogen über den Kern verteiltes magnetisches Moment viel zu kleine Werte liefert<sup>5) 6)</sup>. Man muss in unserem Modell allerdings annehmen, dass durch die zweite Näherung verschiedene Zustände gemischt werden. Doch hat sich gezeigt, dass nur solche aus derselben Schale kombiniert werden können. Diese Zustände ergeben aber noch keine homogene Verteilung, sondern immer noch eine ausgeprägt ringförmige Verteilung (vgl. Fig. 7).

### **Zusammenfassung.**

Im ganzen kann man wohl sagen, dass die Annahme eines mittleren Kernpotentials (durch die individuelle Wechselwirkung als Störungsterm ergänzt) für die schweren Kerne oberhalb  $A = 40$  recht gute Resultate liefert:

1. Die berechneten Tiefen der Potentialmulden stimmen mit den experimentellen Werten überein; sie bleiben über das ganze periodische System praktisch konstant. Dies ist im engen Zusammenhang mit dem konstanten Wert der mittleren Dichte, der nach dem  $A^{1/3}$ -Gesetz für die Kernradien zu erwarten ist.
2. Es ergeben sich die richtigen Werte für die Coulomb-Kräfte, wenn man die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte annimmt.
3. Die Schalenstruktur der Einpartikelterme ergibt sich in natürlicher Weise durch Verwendung der Werte der Spinbahnaufspaltung, die sich aus den Termstrukturen einiger leichter Kerne ergeben.

4. Man erhält die richtige, experimentell bekannte Ladungsverteilung; die verschiedenen Werte für die Kernradien lassen sich leicht interpretieren.

Herrn Professor Dr. W. HEITLER möchten wir für sein grosses Entgegenkommen während diesen Untersuchungen recht herzlich danken. Einer von uns (Ch. T.) möchte auch an dieser Stelle dem Forschungsrat des schweizerischen Nationalfonds seinen besten Dank für die weitere Gewährung eines Forschungsstipendiums aussprechen. Herrn cand. phil. A. SCHRÖDER sind wir für die Ausführung einiger Rechnungen sehr dankbar.

### Literatur.

- <sup>1)</sup> D. R. YENNIE, D. G. RAVENHALL, R. N. WILSON, P. R. **95**, 500 (1954).
  - <sup>2)</sup> R. HOFSTÄDTER, B. HAHN, A. W. KNUDSEN und J. A. MCINTYRE, P. R. **95**, 512 (1954).
  - <sup>3)</sup> D. G. RAVENHALL, D. R. YENNIE, P. R. **96**, 239 (1954).
  - <sup>4)</sup> H. FESHBACH, C. E. PORTER und V. F. WEISSKOPF, P. R. **95**, 448 (1954).
  - <sup>5)</sup> E. BRUN und H. H. STAUB, Helv. Phys. Acta **26**, 821 (1953).
  - <sup>6)</sup> A. BOHR und V. F. WEISSKOPF, P. R. **77**, 94 (1950).
  - <sup>7)</sup> H. A. BETHE und R. F. BACHER, R. M. P. **8**, 82 (1936). Insbesondere: S. 162 Formel 177 b.
  - <sup>8)</sup> P. PREISWERK und P. STÄHELIN, Helv. Phys. Acta **24**, 623 (1951).
  - <sup>9)</sup> R. KATZ, P. R. **91**, 1487 (1953).
  - <sup>10)</sup> R. GATTO, Nuovo Cimento **10**, 1559 (1953).
  - <sup>11)</sup> E. AMALDI und G. FIDECARO, Nuovo Cimento **7**, 535 (1950).
  - <sup>12)</sup> L. N. COOPER und E. M. HUNLEY, P. R. **92**, 801 (1953).
  - <sup>13)</sup> V. L. FITCH und J. RAINWATER, P. R. **92**, 789 (1953).
-