Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 27 (1954)
Heft: VII

Artikel: Acausalité de l'interaction non-locale
Autor: Stueckelberg, E.C.G. / Wanders, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112535

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Acausalité de l'interaction non-locale

par **E. C. G. Stueckelberg** et **G. Wanders***).
Institut de Physique de l'Université, Genève (Suisse).

(21 X 54.)

Summary. The possibility of a unitary and causal $\boldsymbol{S}[V]$-matrix containing a form-factor is investigated. A necessary and sufficient causality condition is established and it is shown that it can be satisfied in second approximation (the result being different from that given by perturbation methods). However it is found impossible to satisfy the condition in third approximation. Thus we conclude that form factor theories necessarily contradict causality requirements.

1. Introduction.

De nombreux auteurs ont admis qu'il devait être possible d'éviter les difficultés de convergence rencontrées dans l'application de méthodes de perturbation aux problèmes de la théorie des champs, en substituant à l'interaction ponctuelle une interaction étendue, caractérisée par un *facteur de forme*. Une généralisation de la méthode de YANG et FELDMAN a permis de construire le développement de la matrice de transition résultant d'une telle interaction. Ce développement ne s'exprimant pas, comme l'a signalé RAYSKI[5]), à l'aide des propagateurs causaux $D^c(x-y)$, il n'est plus possible d'interpréter les processus décrits en termes de créations et d'annihilations de quanta virtuels. Il est cependant couramment admis qu'un choix convenable du facteur de forme permet de limiter ses effets acausaux à de petites régions spatio-temporelles, et rétablit ainsi l'interprétation causale. Le but du présent article est de montrer que ces spéculations ne se vérifient pas en fait.

Une suite de travaux antérieurs[1])[2])[3]) a permis de montrer que, dans le cas d'une interaction ponctuelle dite renormalisable, le développement de la matrice de transition $\boldsymbol{S}[V]$ est univoquement fixé par les conditions d'invariance, d'unitarité et de causalité, après normalisation de certaines constantes. Il était donc intéressant d'examiner si des circonstances analogues sont réalisées lorsque l'interaction est étendue, en particulier de chercher si les conditions

*) Recherche subventionnée par la Commission Suisse de l'Energie Atomique (C. S. A.).

dans lesquelles un développement causal est possible sont réalisées par une interaction étendue. Dans ce but nous établissons au § 2 une condition de causalité nécessaire et suffisante, puis nous examinons s'il est possible de la satisfaire dans les trois premières approximations d'une théorie scalaire.

Partant donc d'une interaction scalaire étendue entre un champ chargé et un champ neutre scalaires, contenant un facteur de forme $\Gamma(x, y, z)$ (§ 3), nous montrons au § 4 qu'il est possible de construire une deuxième approximation unitaire, causale et convergente, différente toutefois de celle fournie par la méthode de perturbation. Le § 5 est consacré à l'examen du terme trilinéaire de la troisième approximation. Nous montrons que des acausalités graves sont inévitables. Ce résultat n'étant pas lié au cas particulier de la théorie scalaire envisagée, *nous pouvons affirmer qu'une matrice* $\boldsymbol{S}[V]$ *unitaire et causale, contenant un facteur de forme est impossible.*

2. La condition de causalité.

Dans ce paragraphe nous présentons une condition de causalité nécessaire et suffisante, telle qu'elle ressort de la signification physique que nous donnons à cette notion. Les conditions utilisées dans les précédents travaux[2)3)] apparaissent comme des conditions suffisantes (donc trop fortes), excluant d'emblée une interaction étendue.

L'amplitude de probabilité de la transition entre un état initial de N' quanta distribués sur les paquets $\varphi'_1, \cdots, \varphi'_{N'}$ et un état final de N'' quanta distribués sur $\varphi''_1, \cdots, \varphi''_{N''}$ est donnée en $n^{\text{ième}}$ approximation par:

$$S_n[\varphi''_1 \cdots / \cdots \varphi'_{N'}; V] = \int\limits_{V, x''_1} \cdots \int\limits_{V, x'_{N'}} \varphi''^{\dagger}_1(x''_1) \cdots \varphi''^{\dagger}_{N''}(x''_{N''}) \cdot$$

$$\cdot D^c_{nm}(x''_1, \cdots, x'_{N'}; V)\, \varphi'_1(x'_1) \cdots \varphi'_{N'}(x'_{N'})$$

$$m = N' + N''; \int\limits_{V, x} \cdots = \int (dx)^4\, V(x) \cdots^{*}). \tag{2.1}$$

$V(x)$ est une fonction continue, indéfiniment dérivable, de support V (donc nulle en dehors et sur la frontière de V, *domaine d'évolution*); dans V elle est égale à 1, sauf dans une couche étroite en bordure de V[2)4)]. Soit un ensemble de fonctions positives $v_A(x)$, continues, indéfiniment dérivables, et de supports V_A, définissant

*) $\int_x \cdots$ signifiera l'intégration sur tout l'espace-temps.

une *partition de l'unité dans* V ($1 = \Sigma_A v_A(x)$ si x est dans V; les domaines V_A définissent un recouvrement localement fini de V[6])). Alors:

$$V(x) = \Sigma_A V_A(x), \quad \text{si} \quad V_A(x) = V(x)\, v_A(x)\,. \tag{2.2}$$

Introduisant (2,2) dans (2.1) on obtient une somme dont le terme général est proportionnel à

$$\int_{V_{A_1''},\, x_1''} \cdots \int_{V_{A_{N'}'},\, x_{N'}'} \exp\left[-i(k_1'' x_1'' + \cdots + k_{N''}'' x_{N''}'')\right] \cdot$$
$$\cdot D^c_{nm}(x_1'', \cdots; V) \exp\left[+i(k_1' x_1' + \cdots + k_{N'}' x_{N'}')\right] \tag{2.3}$$

si les paquets φ sont des ondes planes. (2.3) est l'amplitude d'un processus au cours duquel les *quanta émergeants* (*incidents*) *d'énergie-impulsion* $k_1'', \cdots$ ($k_1', \cdots$) *sont créés* (*annihilés*) *dans les domaines* $V_{A_1''}, \cdots$ ($V_{A_1'}, \cdots$). Si l'étendue temporelle ΔT des domaines V_A est assez grande:

$$\Delta T \gg \mu^{-1} \tag{2.4}$$

μ = masse des quanta les plus légers

ces créations et annihilations correspondent à des émissions et absorptions d'énergie, l'incertitude d'énergie ΔE (résultant de la localisation temporelle), ne pouvant inverser le signe de leur bilan d'énergie ($\Delta E\, \Delta T \sim \frac{1}{4}$).

Nous sommes maintenant en mesure de préciser la notion de causalité. Un *processus* (2.3) est *causal* (*anticausal*) si un ensemble quelconque de créations et d'annihilations se soldant par une *émission* (*absorption*) *d'énergie* est localisé dans le *futur* de l'ensemble restant de créations et d'annihilations se soldant par une *absorption* (*émission*) *d'énergie*. Les qualificatifs «causal» et «anticausal» se rapportant au déroulement énergétique d'un processus n'ont de sens que si (2.4) est vérifiée et si le noyau D^c_{nm} assure la conservation de l'énergie, c'est-à-dire si V s'étend à tout l'espace-temps ($V(x) \equiv 1$). La condition de *causalité* exige alors que les *processus anticausaux macroscopiques* (pour lesquels les deux ensembles d'événements sont séparés par une grande durée) apportent une *contribution asymptotiquement négligeable* à l'amplitude totale (2.1)*). En d'autres termes, les processus dans lesquels de l'énergie négative se propage vers le futur ne doivent asymptotiquement pas contribuer à l'amplitude de transition[8]).

*) Les fonctions $V_A(x)$ ayant un spectre de fréquences illimité, il n'est pas possible d'annuler exactement l'amplitude d'un processus anticausal.

Imaginons que le noyau D^c_{nm} se décompose en un terme «*à grande distance*» $\mathcal{D}^c_{nm}$ et un terme «*à courte distance*» Δ_{nm}

$$D^c_{nm} = \mathcal{D}^c_{nm} + \Delta_{nm}. \tag{2.5}$$

Δ_{nm} étant tel que sa contribution à un processus macroscopique, causal ou anticausal, soit négligeable;

$$\lim_{T\to\infty} T^p \int_{V_{A_1''}, x_1''} \cdots \int_{V_{A_1'}, x_1'} \cdots \int_{V_{B_1''}, y_1''} \cdots \int_{V_{B_1'}, y_1'} \cdots \exp[-i(k_1'' x_1'' + \cdots + p_1'' y_1'' + \cdots)] \cdot$$

$$\cdot \Delta_{nm}(x_1'', \cdots, y_1'', \cdots; V) \exp[+i(k_1' x_1' + \cdots + p_1' y_1' + \cdots)] = 0 \tag{2.6}$$

c'est-à-dire que cette contribution décroît plus fortement que toute puissance de T, si chaque domaine $V_{A_1''}, \cdots, V_{A_1'}, \cdots$ est séparé de tout domaine $V_{B_1''}, \cdots, V_{B_1'}, \cdots$ par une durée plus grande que T et quelles que soient les énergies-impulsions finies $k_1'', \cdots$*). Autrement dit, Δ_{nm} ne rayonne pas et n'est pas soumis à une condition de causalité.

Par contre, la causalité impose à $\mathcal{D}^c_{nm}$ une condition sur son spectre de fréquences:

$$\mathcal{D}^c_{nm}(x_1'', \cdots y_1'', \cdots x_1', \cdots y_1', \cdots) = \int dk_1'' \cdots \int dp_1'' \cdots \int dk_1' \cdots \int dp_1' \cdots$$

$$\Theta^+(k_1''^4 + \cdots - k_1'^4 - \cdots)\, \mathcal{D}^c_{nm}(k_1'', \cdots p_1'', \cdots k_1', \cdots p_1', \cdots)$$

$$\exp[+i(k_1'' x_1'' + \cdots + p_1'' y_1'' + \cdots) - i(k_1' x_1' + \cdots + p_1' y_1' + \cdots)] \tag{2.7}$$

si $$\mathcal{D}^c_{nm}(x_1'', \cdots) = \lim_{V\to\infty} \mathcal{D}^c_{nm}(x_1'', \cdots; V)$$

et $$x_1''^4, \cdots x_1'^4, \cdots \gg y_1''^4, \cdots, y_1'^4, \cdots.$$

Ainsi, pour que la condition de causalité soit satisfaite, *il faut et il suffit que D^c_{nm} puisse être décomposé selon* (2.5), les deux termes satisfaisant (2.6) et (2.7). Les conditions de causalité formulées antérieurement omettaient la possibilité de fonctions «à courte distance» Δ_{nm} et introduisaient D^c_{nm} dans (2.7)[3].

Esquissons pour terminer comment la condition de *causalité* jointe à celle d'*unitarité* fixe le développement de $\boldsymbol{S}[V]$ en série de puissances de la constante de couplage g ($\boldsymbol{S}[V] = \boldsymbol{1} + \Sigma_n g^n \boldsymbol{S}_n[V]$).

*) L'existence de telles fonctions, malgré l'invariance, a été démontrée par Chrétien et Peierls[7]).

La *condition d'unitarité* donne la *partie hermitienne* de $\boldsymbol{S}_n$ en termes des approximations précédentes[2]):

$$\boldsymbol{H}_n = -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1} \boldsymbol{S}_m \boldsymbol{S}_{n-m}^{\dagger};\ \boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{H}_n + \boldsymbol{A}_n;\ \boldsymbol{H}_n = \boldsymbol{H}_n^{\dagger};\ \boldsymbol{A}_n = -\boldsymbol{A}_n^{\dagger}. \quad (2.8)$$

La *condition de causalité* définit une *décomposition* de $\boldsymbol{H}_n$ en *parties causale et anticausale:*

$$\boldsymbol{H}_n = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}_n^c + \boldsymbol{S}_n^a);\ \boldsymbol{S}_n^a = (\boldsymbol{S}_n^c)^{\dagger}. \quad (2.9)$$

$\boldsymbol{A}_n$ est alors définie par:

$$\boldsymbol{A}_n = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}_n^c - \boldsymbol{S}_n^a) \quad (2.10)$$

de telle sorte que $\boldsymbol{S}_n$ soit causale, égale à $\boldsymbol{S}_n^c$. La décomposition (2.9) résulte d'une décomposition des noyaux D_{nm}^1 de $\boldsymbol{H}_n$:

$$D_{nm}^1 = \frac{1}{2}(D_{nm}^c + D_{nm}^a) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}_{nm}^c + \Delta_{nm} + \mathcal{D}_{nm}^a + \Delta_{nm}^*). \quad (2.11)$$

On voit que la partie imaginaire de Δ_{nm} est indéterminée, il s'ensuit que, si la décomposition (2.11) est possible, D_{nm}^c est *univoquement définie*, à une *fonction* (*imaginaire*) «*à courte distance*» *près.*

3. La première approximation.

Nous passons maintenant au cas particulier d'un champ chargé $\boldsymbol{u}(x)$ et d'un champ neutre $\boldsymbol{\varphi}(x)$, tous deux scalaires:

$$(\Box - \varkappa^2)\,\boldsymbol{u}(x) = 0;\ (\Box - \mu^2)\,\boldsymbol{\varphi}(x) = 0;\ 2\varkappa > \mu \quad (3.1)$$

en interaction scalaire, caractérisée par la première approximation:

$$\boldsymbol{S}_1[V] =$$

$$= i\int_{V,x}\int_{V,y}\int_{V,z} \boldsymbol{h}(x,y,z) = i\int_{V,x}\cdots(\boldsymbol{u}^{\dagger}(x)\,\boldsymbol{\varphi}(x)\,\boldsymbol{u}(x))^{\sim}\,\Gamma(x,y,z)^*) \quad (3.2)$$

*) $\sim$ signifie que les opérateurs sont bien ordonnées (produit S de WICK).

où $\Gamma(x, y, z)$ est le facteur de forme. L'interaction ponctuelle correspond au cas particulier $\Gamma(x, y, z) = \delta(x-y)\ \delta(z-y)$. L'invariance du facteur de forme est assurée soit par la représentation de FOURIER:

$$\Gamma(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int (dp)^4 \int (dq)^4\, \Gamma[p^2, (p+q)^2, q^2]\, e^{ip(x-y)+iq(z-y)} \tag{3.3}$$

soit par:

$$\Gamma(x,y,z) = \int_a \Delta[(x-a)^2, (y-a)^2, (z-a)^2]. \tag{3.4}$$

Les deux représentations sont liées par:

$$\Delta(\xi^2, \eta^2, \zeta^2) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int (dp)^4 \cdots \Gamma(p^2, q^2, k^2)\, e^{ip\xi + iq\eta + ik\zeta *)}. \tag{3.5}$$

La valeur de la constante de couplage est définie par la normation du facteur de forme:

$$\Gamma(-\varkappa^2, -\mu^2, -\varkappa^2) = 1. \tag{3.6}$$

La *condition d'unitarité* est vérifiée si:

$$\Gamma(x,y,z) = \Gamma^*(z,y,x); \quad \Gamma(k_1^2, k_2^2, k_3^2) = \Gamma^*(k_3^2, k_2^2, k_1^2). \tag{3.7}$$

(3,7) est incompatible avec (2.7), et la *causalité* n'est assurée que si le facteur de forme est une fonction «à courte distance» satisfaisant (2.6) (avec $m = 3$). Ceci est réalisé si toutes les dérivées de $\Gamma(k_1^2, k_2^2, k_3^2)$ sont bornées pour toutes valeurs de k_1^2, k_2^2 et k_3^2 (CHRÉTIEN-PEIERLS[7]):

$$\left| \frac{\partial^{n_1}}{\partial (k_1^2)^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial (k_2^2)^{n_2}} \frac{\partial^{n_3}}{\partial (k_3^2)^{n_3}} \Gamma(k_1^2, k_2^2, k_3^2) \right| < c_{n_1 n_2 n_3}. \tag{3.8}$$

Nous envisagerons en particulier le facteur de forme factorisable:

$$\Gamma(k_1^2, k_2^2, k_3^2) = \Lambda_\varkappa^*(k_1^2)\, \Lambda_\mu(k_2^2)\, \Lambda_\varkappa(k_3^2) **). \tag{3.9}$$

---

*) Tandis que $x, y, z \cdots$ représentent des points de l'espace-temps, $\xi, \eta, \zeta, \cdots$ représentent des déplacements $(x-y), \cdots$.

**) Des exemples satisfaisant (3.8) sont:

$$\Lambda_\varkappa(k^2) = \left[c \frac{\lambda^2 - \varkappa^2}{k^2 + \lambda^2} + c^* \frac{\lambda^{*2} - \varkappa^2}{k^2 + \lambda^{*2}} \right]; \quad c + c^* = 1; \quad \lambda - \lambda^* \neq 0;$$

$$\Lambda_\varkappa(k^2) = \exp\left[-\varrho^4 (k^2 + \varkappa^2)^2\right].$$

4. La deuxième approximation.

Les termes de la partie hermitique de $\boldsymbol{S}_2$ que nous allons discuter sont:

$$\boldsymbol{H}_2 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_1^\dagger = \cdots + \int_{V,x}\cdots\int_{V,w}\left(\left(\boldsymbol{u}^\dagger(x)\,\boldsymbol{\varphi}(y)\,\boldsymbol{\varphi}(v)\,\boldsymbol{u}(w)\right)^{\sim}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot D^1_{\varkappa 24}(x,y;v,w;V) + \cdots + \int_{V,y}\int_{V,v}(\boldsymbol{\varphi}(y)\,\boldsymbol{\varphi}(v))^{\sim} D^1_{\mu 22}(y;v;V) + \cdots\right. . \quad (4.1)$$

Le noyau du terme quadrilinéaire («*effet Compton*») est donné par:

$$D^1_{\varkappa 24} = -\frac{1}{4}\int_{V,z}\int_{V,u}\Gamma(x,y,z)\,D^1_\varkappa(z-u)\,\Gamma(u,v,w)^*)\,. \quad (4.2)$$

La décomposition $D^1_\varkappa = -i(D^c_\varkappa - D^a_\varkappa)$ conduit à une décomposition (2.11) de $D^1_{\varkappa 24}$ dont le premier terme est causal, comme le montre l'évaluation directe de l'amplitude d'un processus anticausal macroscopique. Soit:

$$\varrho(x;p,V_A;q,V_B) = \int (dy)^4 \int (dz)^4\,\Gamma(x,y,z)\,V_A(y)\,e^{ipy}\,V_B(z)\,e^{iqz}. \quad (4.3)$$

Alors:

$$i\int_{V,z}\int_{V,u}\varrho^*(z;k_1,V_{A_1};k_2,V_{A_2})\,D^c_\varkappa(z-u)\,\varrho(u;p_1,V_{B_1};p_2,V_{B_2}) \quad (4.4)$$

est proportionnelle à l'amplitude d'un processus, anticausal et macroscopique si $V_{B_1}, V_{B_2} \gg V_{A_1}, V_{A_2}$ et si les fréquences $(k_1^4 + k_2^4)$ et $(p_1^4 + p_2^4)$ sont positives.

Chrétien et Peierls[7]) ont montré que, en vertu de (3.8), $\varrho(x;\,p,V_A;\,q,V_B)$ est une fonction fortement décroissante (cf. (2.6)) de $(x^4 - \frac{1}{2}(x_A^4 + x_B^4))$ et de $(x_A^4 - x_B^4)$, si x_A et x_B sont les centres des domaines V_A et V_B. Dès lors, on ne modifie pas sensiblement (4.4) en remplaçant $D^c_\varkappa(z-u)$ par $\frac{i}{2}D^-_\varkappa(z-u)$, sa valeur pour $u^4 > z^4 \cdot \varrho^*(z;k_1,V_{B_1};k_2,V_{B_2})$ ayant un spectre de fréquences centré

*) On a $D^1_\varkappa(\xi) = \frac{1}{2}\left(D^+_\varkappa + D^-_\varkappa\right)(\xi)$. Les autres fonctions apparaissant dans la suite sont:

$$D^0_\varkappa(\xi) = \frac{i}{2}\left(D^+_\varkappa - D^-_\varkappa\right)(\xi); \quad D^s_\varkappa(\xi) = \frac{1}{2}\varepsilon(\xi^4)\,D^0_\varkappa(\xi)$$

et le propagateur causal:

$$D^c_\varkappa(\xi) = \left(D^s_\varkappa + \frac{i}{2}D^1_\varkappa\right)(\xi)\,.$$

autour de $-(k_1^4+k_2^4) \equiv -\omega < 0$ et de largeur $\Delta\omega < \omega$, $D_\varkappa^-(z-u)$ un spectre de fréquences négatives (inférieures à $-\varkappa$), (4.4) est négligeable. On vérifie que des circonstances semblables sont réalisées pour tous les autres processus anticausaux possibles.

Il est donc possible de choisir le *noyau causal*:

$$D^c_{\varkappa 24}(x, y; v, w; V) = i \int\limits_{V,u} \int\limits_{V,z} \Gamma(x, y, z)\, D^c_\varkappa(z-u)\, \Gamma(u, v, w)\,, \quad (4.5)$$

qui correspond à celui de la méthode de perturbation*). La discussion de la «*diffusion de* Möller» est analogue.

La *self-énergie* du champ φ a pour noyau:

$$D^1_{\mu 22} = \frac{1}{2}(D^+_{\mu 22} + D^-_{\mu 22})\,. \quad (4.6)$$

$$D^+_{\mu 22} = -\frac{1}{16} \times$$
$$\times \int\limits_{V,x} \int\limits_{V,z} \int\limits_{V,u} \int\limits_{V,w} \Gamma(x, y, z)\, D^+_\varkappa(x-w)\, D^+_\varkappa(z-u)\, \Gamma(u, v, w)\,. \quad (4.7)$$

$D^-_{\mu 22}$ s'obtenant en remplaçant $D^+_\varkappa$ par $D^-_\varkappa$. Remarquons que dans la limite où le domaine V s'étend à tout l'espace-temps ($V(x) \equiv 1$), la fonction $D^\pm_{\mu 22}(y; v; V)$ est une fonction invariante $D^\pm_{\mu 22}(y-v)$, de spectre de fréquences positives (négatives), supérieures en valeur absolue à $2\varkappa$. Ainsi, le noyau:

$$D^c_{\mu 22}(y; v; V) = D^1_{\mu 22}(y; v; V) + \frac{1}{2}\varepsilon(y^4 - v^4)(D^+_{\mu 22} - D^-_{\mu 22})(y-v) \quad (4.8)$$

satisfait la condition de causalité (2.7), et nous pouvons le choisir comme *noyau causal de la self-énergie* du champ φ. Le noyau que fournit la méthode de perturbation peut être écrit symboliquement:

$$-\frac{1}{4}\Gamma(D^c_\varkappa D^c_\varkappa - D^s_\varkappa D^s_\varkappa + \frac{1}{4} D^0_\varkappa D^0_\varkappa)\,\Gamma. \quad (4.9)$$

On peut voir que la différence entre (4.8) et (4.9) est une fonction (imaginaire) «à grande distance». Le *noyau* (4.9) *de la méthode de perturbation ne satisfait donc pas la condition de causalité*, deux noyaux causaux ne pouvant différer que par une fonction «à courte distance» (voir fin § 2).

*) Nous discutons au § 5 l'effet de l'adjonction à (4.5) d'un terme imaginaire à courte distance.

Nous évaluons encore la transformée de FOURIER de (4.8) afin de voir dans quelles conditions la difficulté de divergence est évitée. D'après ce qui précède, la transformée de $D^+_{\mu 22}$ doit avoir la forme:

$$D^+_{\mu 22}(p) = G(-p^2)\,\frac{1}{4\pi^3}\,\Theta(-p^2-4\varkappa^2)\,\Theta(p^4) = \\ = \int\limits_{(2\varkappa)^2}^{\infty} d\varrho^2\, G(\varrho^2)\, D^+_{\varrho}(p)\,. \tag{4.10}$$

$D^+_{\mu 22}$ peut donc être représenté par une superposition de fonctions D^+_ϱ, et une représentation analogue est valable pour $D^c_{\mu 22}$:

$$D^c_{\mu 22}(p^2) = -2i\int\limits_{(2\varkappa)^2}^{\infty} d\varrho^2\, G(\varrho^2)\, D^c_\varrho(p^2) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{(2\varkappa)^2}^{\infty} d\varrho^2\, G(\varrho^2)\left[\delta(p^2+\varrho^2) + \frac{1}{i\pi}\,\frac{Pf}{p^2+\varrho^2}\right]. \tag{4.11}$$

On trouve:

$$G(\varrho^2) = -\frac{1}{(16\pi)^2}\,|\Gamma(-\varkappa^2,-\varrho^2,-\varkappa^2)|^2\left(1-\frac{4\varkappa^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

et l'intégrale (4.11) converge si $|\Gamma(-\varkappa^2,-\varrho^2,-\varkappa^2)|^2$ ne présente pas de singularités non intégrables pour $(2\varkappa)^2 < \varrho^2 < \infty$ (ce qui est assuré par (3.8)) et tend vers zéro comme $(\varrho^2)^{-s}$ $(s>0)$ lorsque ϱ^2 tend vers l'infini. On voit donc que l'effet du facteur de forme est équivalent à celui d'un *facteur de convergence*. En particulier, la correction de masse $\Delta\mu^2$ due à la self-énergie est négative (signe correct!) et vaut:

$$\Delta\mu^2 = -g^2\,\frac{1}{(2\pi)^8}\times \\ \times\int\limits_{(2\varkappa)^2}^{\infty} d\varrho^2\,|\Gamma(-\varkappa^2,-\varrho^2,-\varkappa^2)|^2\left(1-\frac{4\varkappa^2}{\varrho^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\varrho^2-\mu^2} < 0\,. \tag{4.13}$$

5. La troisième approximation.

Nous nous limitons au terme trilinéaire (*vertex-part*): le noyau $D^1_{33}(x,y,z)$ de sa partie hermitique est donné symboliquement par:

$$-8\,D^1_{33} = [\Gamma D^s_\mu \Gamma(D^+_\varkappa\,\Gamma D^-_\varkappa + D^-_\varkappa\,\Gamma D^+_\varkappa) + \text{permutations}] \tag{5.1}$$

en vertu de (2.8), (3.2) et (4.5); le premier terme correspond, par exemple, à (fig. 1):

$$\int_{V,x''} \cdots \int_{V,y'''} \Gamma(x, x'', x''') D^s_\mu(x''-z'') \Gamma(z', z'', z) \times$$
$$\times D^+(z'-y''') \Gamma(y', y, y''') D^-_\varkappa(y'-x''') . \quad (5.2)$$

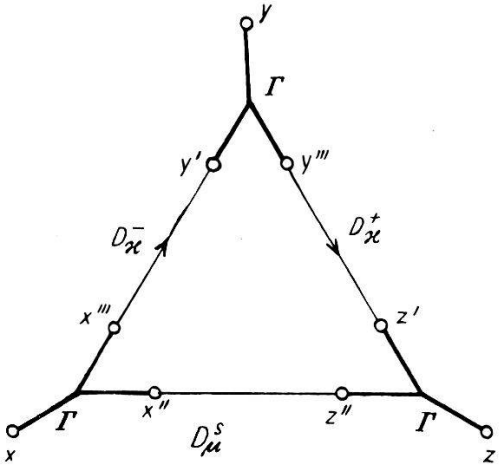

Fig. 1.

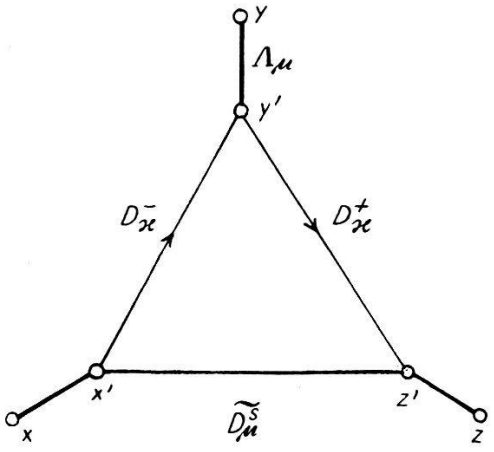

Fig. 2.

Il est utile d'introduire les fonctions de un et trois déplacements suivantes:

$$\Lambda_\varkappa(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk)^4 \Gamma(-\varkappa^2, -\mu^2, k^2) e^{ik\xi}; \quad (5.3)$$

$$\Lambda_\mu(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk)^4 \Gamma(-\varkappa^2, k^2, -\varkappa^2) e^{ik\xi}; \quad (5.4)$$

$$\widetilde{D}^s_\mu(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int (dk_1)^4 \cdots \Gamma(k_1^2, k_2^2, -\varkappa^2) \times$$
$$\times D^s_\mu(k_2^2) \Gamma(-\varkappa^2, k_2^2, k_3^2) e^{i(k_1\xi + k_2\eta + k_3\zeta)}. \quad (5.5)$$

$\widetilde{D}_\varkappa$ étant définie de manière analogue. La limite du premier terme de (5.1) lorsque V s'étend à tout l'espace-temps peut alors s'écrire (fig. 2):

$$\int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \widetilde{D}^s_\mu(x-x', x'-z', z'-z) D^+_\varkappa(z'-y') \Lambda_\mu(y-y') D^-_\varkappa(y'-x') \quad (5.6)$$

du fait que les transformées $D^+_\varkappa(p)$ et $D^-_\varkappa(p)$ contiennent le terme

$\delta(p^2 + \varkappa^2)$. On met en évidence la limite de (5.1), formée de termes du type (5.6), en écrivant:

$$-8\,D^1_{33} = \left[\widetilde{D}^s_\mu (D^+_\varkappa \Lambda_\mu D^-_\varkappa + D^-_\varkappa \Lambda_\mu D^+_\varkappa) + \cdots\right] + \\ + \left[\left(\Gamma D^s_\mu \Gamma D^+_\varkappa \Gamma D^-_\varkappa - \widetilde{D}^s_\mu D^+_\varkappa \Lambda_\mu D^-_\varkappa\right) + \cdots\right].^*) \quad (5.7)$$

La première partie de (5.7) peut encore s'écrire:

$$[\Lambda^*_\varkappa D^s_\mu \Lambda_\varkappa (D^+_\varkappa \Lambda_\mu D^-_\varkappa + \cdots) + \cdots] + \left[\widetilde{\Delta}^s_\mu (D^+_\varkappa \Lambda_\mu D^-_\varkappa + \cdots) + \cdots\right] \quad (5.8)$$

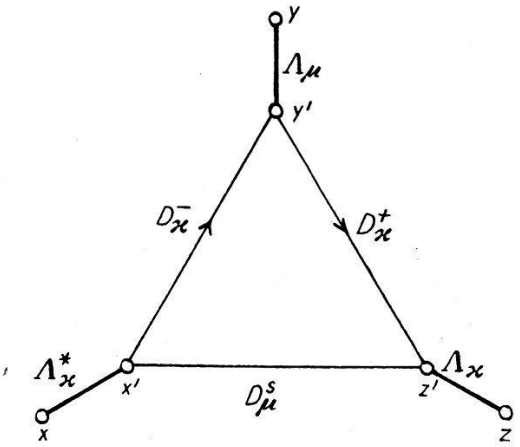

Fig. 3.

où le premier terme du premier crochet correspond à la figure 3, avec le «triangle interne» (x', y', z'), et où $\widetilde{\Delta}^s_\mu$ est la fonction «à courte distance» de trois déplacements:

$$\widetilde{\Delta}^s_\mu(\xi, \eta, \zeta) = \widetilde{D}^s_\mu(\xi, \eta, \zeta) - \Lambda^*_\varkappa(\xi)\, D^s_\mu(\eta)\, \Lambda_\varkappa(\zeta)\,. \quad (5.9)$$

Vu $D^+ D^- + D^- D^+ = 2\,(D^1 D^1 + D^0 D^0)$ et vu l'identité, valable pour tout «triangle interne»: $4\,D^s D^s D^s + D^s D^0 D^0 + \cdots = 0$, la première partie de (5.8) se décompose sans autres en parties causale et anticausale (2.11):

$$-4\,(\Lambda^*_\varkappa D^c_\mu \Lambda_\varkappa D^c_\varkappa \Lambda_\mu D^c_\varkappa + {}^{(a)\,(a)\,(a)})\,, \quad (5.10\text{a})$$

alors que la seconde partie donne:

$$-4\,\widetilde{\Delta}^s_\mu \left[\left(D^c_\varkappa \Lambda_\mu D^c_\varkappa - D^s_\varkappa \Lambda_\mu D^s_\varkappa - \frac{1}{4} D^0_\varkappa \Lambda_\mu D^0_\varkappa\right) + \right. \\ \left. + \left(D^a_\varkappa \Lambda_\mu D^a_\varkappa - D^s_\varkappa \Lambda_\mu D^s_\varkappa - \frac{1}{4} D^0_\varkappa \Lambda_\mu D^0_\varkappa\right)\right] + \cdots \quad (5.10\text{b})$$

*) Les intégrales s'étendent à tout l'espace-temps, sauf celles du terme en Γ qui sont pondérées par $V(x)$.

Le terme écrit de (5.10b) se décompose de la même manière si $y^4 \gg x^4 \sim z^4$; en effet, Δ_μ et les branches en $(x - x')$ et $(z' - z)$ de $\widetilde{\Delta}^s_\mu$ étant «à courte distance», les contributions non négligeables viennent des régions $y'^4 \gg x'^4 \sim z'^4$, où $(D^s_\varkappa D^s_\varkappa + \frac{1}{4} D^0_\varkappa D^0_\varkappa)$ est nul. Ainsi, si une décomposition de (5.10b) en parties causale et anticausale est possible, le terme en $\widetilde{\Delta}^s_\mu$ de sa partie causale doit être le premier terme du crochet multipliant $\widetilde{\Delta}^s_\mu$ dans (5.10b) (à une fonction «à courte distance près»). Des considérations analogues s'appliquent aux termes en $\widetilde{\Delta}^s_\varkappa$ et $\widetilde{\Delta}^s_\varkappa{}^*$. On en déduit que, pour autant qu'il existe, et à une fonction «à courte distance près», le noyau causal ne peut être que:

$$\Delta^*_\varkappa D^c_\mu \Delta_\varkappa D^c_\varkappa \Delta_\mu D^c_\varkappa + \Big\{\widetilde{\Delta}^s_\mu \Big(D^c_\varkappa \Delta_\mu D^c_\varkappa - \\ - D^s_\varkappa \Delta_\mu D^s_\varkappa - \frac{1}{4} D^0_\varkappa \Delta_\mu D^0_\varkappa\Big) + \cdots\Big\}. \qquad (5.11)$$

Pour démontrer l'acausalité de ce noyau, il suffit de vérifier que la contribution à l'amplitude d'un processus anticausal du deuxième terme de (5.11) (contenant les fonctions «à courte distance» $\widetilde{\Delta}^s_\mu$, $\widetilde{\Delta}^s_\varkappa$ et $\widetilde{\Delta}^s_\varkappa{}^*$) ne disparaît pas lorsque les trois domaines V_A, V_B et V_C (centrés autour de x_0, y_0, et z_0), où sont localisées les créations et les annihilations, sont séparés par de longs intervalles de temps. (Nous allons même trouver que cette contribution diverge, si une droite de lumière peut passer simultanément par les trois domaines.)

Nous démontrons cette acausalité pour un facteur de forme factorisable (3.9). Alors:

$$\widetilde{\Delta}^s_\mu(\xi, \eta, \zeta) = \Delta^*_\varkappa(\xi)\, \Delta^s_\mu(\eta)\, \Delta_\varkappa(\zeta) \qquad (5.12)$$

avec:

$$\Delta^s_\mu(x' - z') = \\ = \int_{x''} \int_{z''} \Delta_\mu(x' - x'')\, D^s_\mu(x'' - z'')\, \Delta_\mu(z'' - z') - D^s_\mu(x' - z') \qquad (5.13)$$

et le second terme de (5.11) s'exprime aussi en termes de «triangles internes»:

$$\mathcal{D}(x', y', z') = \Delta^s_\mu(x' - z') \times \\ \times \Big(D^c_\varkappa(z' - y')\, D^c_\varkappa(y' - x') - D^s_\varkappa D^s_\varkappa - \frac{1}{4} D^0_\varkappa D^0_\varkappa\Big) + \cdots. \qquad (5.14)$$

La contribution à une amplitude de transition s'exprime alors, à l'aide de ce triangle:

$$\int_{x'}\int_{y'}\int_{z'} \varrho_1(x')\,\varrho_3(z')\,\mathcal{D}(x',y',z')\,\varrho_2(y') \tag{5.15}$$

et des «sources»:

$$\varrho_3(z') = \int_{V_c,z} \Lambda_\varkappa(z'-z)\,u(z)\,;\cdots \tag{5.16}$$

centrées également autour de z_0, y_0, x_0 (vu que les $\Lambda_\varkappa$, Λ_μ, sont «à courte distance»). En introduisant le «potentiel de deux sources»:

$$\Phi(y) = \int_x\int_z \varrho_1(x)\,\varrho_3(z)\,\mathcal{D}(x,y,z)\,. \tag{5.17}$$

(5.15) devient $\int_y \Phi(y)\,\varrho_2(y)$. Examinons le cas où $V_A \gg V_B \gg V_C$. On peut alors, sans altérations sensibles, remplacer dans $\mathcal{D}$ les fonctions D^c, D^s et D^0 par leur valeur pour $x^4 \gg y^4 \gg z^4$, ϱ_1, ϱ_2 et ϱ_3 étant très petites en dehors de V_A, V_B et V_C. Alors:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x,y,z) \to -\frac{1}{8}\{\Delta^s_\mu(z-x)\,(D^-_\varkappa(y-x)\,D^+_\varkappa(y-z) - D^+_\varkappa D^-_\varkappa + \\ + D^+_\varkappa D^+_\varkappa + D^-_\varkappa D^-_\varkappa) + D^-_\mu\,\Delta^s_\varkappa D^+_\varkappa + D^-_\mu D^-_\varkappa\,\Delta^{s*}_\varkappa\}\,.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Examinons la contribution du terme en $\Delta^s_\mu D^-_\varkappa D^+_\varkappa$ au potentiel Φ. En termes des représentations de FOURIER par rapport au temps:

$$\varrho_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\varrho(\vec{x},\omega)\,e^{-i\omega(t-x^4_0)}\,;\cdots$$

$$D^+_\varkappa(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,D^+_\varkappa(r,\omega)\,e^{-i\omega t}\,;\cdots \tag{5.19}$$

elle prend la forme:

$$\begin{aligned}-\frac{(2\pi)^2}{8}\int(d\vec{x})^3\int(d\vec{z})^3\int d\omega_1\int d\omega_3\,\varrho_1(\vec{x},\omega_1)\,\varrho_3(\vec{z},\omega_3) \\ G^{-+}(r_1,r_2,r_3;\omega_1,\omega_3)\,e^{-i(\omega_1 t_1+\omega_3 t_3)}\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$t_1 = y^4 - x^4_0\,,\quad t_3 = y^4 - z^4_0$$

avec le noyau:

$$G^{-+}(r_1, r_2, r_3; \omega_1, \omega_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu\, G^{-+}(\nu) \tag{5.21}$$

$$G^{-+}(\nu) = D_\varkappa^-(r_1, \omega_1 - \nu)\, \Delta_\mu^s(r_2, \nu)\, D_\varkappa^+(r_3, \omega_3 + \nu)$$

dépendant du triangle spatial $r_1 = |\vec{x} - \vec{y}|$, $r_2 = |\vec{x} - \vec{z}|$ et $r_3 = |\vec{z} - \vec{y}|$. On sait que:

$$D_\varkappa^\pm(r, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \Theta(\pm\omega - \varkappa)(e^{i\omega_0 r} - e^{-i\omega_0 r});\ \omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \varkappa^2} \tag{5.22}$$

et (voir Appendice):

$$\lim_{\nu \to \pm\infty} \Delta_\mu^s(\nu) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{r}(e^{i\nu r} + e^{-i\nu r}). \tag{5.23}$$

Ainsi:

$$\lim_{\nu \to +\infty} G^{-+}(\nu) = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{r_1 r_2 r_3}(e^{i(\nu - \omega_1) r_1} - e^{-i(\nu - \omega_1) r_1}) \cdot$$
$$\cdot (e^{i\nu r_2} + e^{-i\nu r_2})(e^{i(\nu + \omega_3) r_3} - e^{-i(\nu + \omega_3) r_3}) \tag{5.24}$$

$$\lim_{\nu \to -\infty} G^{-+}(\nu) = 0.$$

Or, une fonction représentée par $(2\pi)^{-1} \int d\nu\, f(\nu) e^{i\nu s}$ avec $f(\nu) \to 1$ lorsque $\nu \to +\infty$ et $f(\nu) \to 0$ lorsque $\nu \to -\infty$, possède à l'origine la singularité $\delta_+(s)$; il s'ensuit que $G^{-+}(r_1, r_2, r_3; \omega_1, \omega_3)$ est singulier chaque fois que le triangle spatial dégénère en une droite. En particulier, on a la singularité:

$$\frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{r_1 r_2 r_3}(e^{-i(\omega_1 r_1 - \omega_3 r_3)} \delta_+(r_1 - r_2 + r_3) +$$
$$+ e^{+i(\omega_1 r_1 - \omega_3 r_3)} \delta_+(-r_1 + r_2 - r_3)). \tag{5.25}$$

Le second terme (en $\Delta_\mu^s D_\varkappa^+ D_\varkappa^-$) de (5.18) donne une singularité analogue avec δ_- remplaçant δ_+, alors que les termes restants ne présentent pas de singularité. La contribution à $\Phi(y)$ des singularités en $r_1 - r_2 + r_3 = 0$ vaut donc (avec $\delta_+(s) - \delta_-(s) = i/\pi\, 1/s$):

$$-\frac{i}{\pi} \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^3} \int (d\vec{x})^3 \int (d\vec{z})^3 \frac{1}{r_1 r_2 r_3} \frac{1}{r_1 - r_2 + r_3} \cdot$$
$$\cdot (\varrho_1(\vec{x}, t_1 + r_1)\, \varrho_3(\vec{z}, t_3 - r_3) - \varrho_1(\vec{x}, t_1 - r_1)\, \varrho_3(\vec{z}, t_3 + r_3)). \tag{5.26}$$

L'intégrale du premier terme diverge si des droites de lumière passant par le point y interceptent les supports de $\varrho_1(x)$ et de $\varrho_3(z)$;

le second terme et les autres singularités de G^{-+} et de G^{+-} (pour $r_1 + r_2 - r_3 = 0, \cdots$) ne peuvent compenser cette divergence.

Lorsque le facteur de forme n'est pas factorisable selon (3.9), la même méthode de calcul peut être utilisée et conduit encore à l'expression (5.26). Aucune restriction sur les spectres de fréquences de $\varrho_1(x)$ et de $\varrho_3(z)$ n'intervenant en cours de calculs (si ce n'est qu'ils ne contiennent que des fréquences finies) tout processus au cours duquel des créations et des annihilations ont lieu dans des domaines V_A, V_B et V_C tels que chacun d'eux est en relation de lumière avec les deux autres a une amplitude infinie, ce qui est inadmissible. Ce résultat est inévitable lorsque l'effet Compton a le noyau (4.5) et la diffusion de MÖLLER un noyau de même structure. Si l'on ajoute à ces deux noyaux des fonctions à courte distances, $\widetilde{\Delta}^s_\mu, \cdots$ se transforment en de nouvelles fonctions à courte distance $\widetilde{\Delta}^s_\mu - \Delta_\mu, \cdots$ Un choix convenable permet d'éviter la divergence (5.26), mais des anticausalités macroscopiques non négligeables subsistent, le terme singulier en (5.26) étant remplacé par une fonction de $(r_1 - r_2 + r_3)$*) à moins que $\widetilde{\Delta}^s_\mu = \Delta_\mu$. Dans ce cas, le noyau causal se réduit au premier terme de (5.11), qui a pour triangle interne le noyau de la théorie ponctuelle; si ce noyau divergeait il ne serait pas possible de le rendre convergent. Un tel procédé permet de satisfaire la causalité à toute approximation, avec des noyaux de même structure que le premier terme de (5.11). Du fait de la normation des $\Delta_\varkappa$, $\Delta_\mu, \cdots$ on obtient des amplitudes de transition entre quanta libres identiques à celles de la théorie ponctuelle. Nous pouvons donc conclure qu'une matrice $\boldsymbol{S}[V]$ unitaire et causale ne peut contenir effectivement un facteur de forme.

Appendice.

La transformée de FOURIER de Δ^s_μ vaut, en vertu de (5.13):

$$\Delta^s_\mu(k^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{f(k^2+\mu^2)}{k^2+\mu^2} \tag{A.1}$$

avec $f(k^2 + \mu^2) = 1 - [\Delta_\mu(k^2 + \mu^2)]^2$. Par la normation de Δ_μ et du fait que $\Delta_\mu(k^2 + \mu^2) \to 0$ lorsque $k^2 \to \pm\infty$, on a:

$$f(0) = 0 \text{ et } \lim_{k^2 \to \pm\infty} f(k^2+\mu^2) = 1\,. \tag{A.2}$$

*) L'expression analogue à (5.26) décroît comme une puissance de

$$(r_{10}^{-1} + r_{30}^{-1}) \qquad (r_{10} = |\vec{x}_0 - \vec{y}|,\ r_{30} = |\vec{z}_0 - \vec{y}|).$$

(2.6) n'est pas satisfaite.

D'autre part:

$$\Delta^s_\mu(r, \nu) = \frac{(2\pi)}{ir} \int_{-\infty}^{+\infty} dK\, K\, \Delta^s_\mu(K^2 - \nu^2)\, e^{iKr}. \tag{A.3}$$

Ainsi:

$$\Delta^s_\mu(r, \nu) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2ir} \left[e^{i\nu_0 r} \int_{-\infty}^{+\infty} du\, \frac{1}{u} f(u(u + 2\nu_0))\, e^{iur} + \right.$$
$$\left. + e^{-i\nu_0 r} \int_{-\infty}^{+\infty} du\, \frac{1}{u} f(u(u - 2\nu_0))\, e^{iur} \right],$$

si $\nu_0^2 = \nu^2 - \mu^2$. En vertu de (A.2), on peut donc écrire:

$$\lim_{\nu \to \pm\infty} \Delta^s_\mu(r, \nu) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2ir} (e^{i\nu r} + e^{-i\nu r}) \cdot Pf \int_{-\infty}^{+\infty} du\, \frac{1}{u}\, e^{iur} \tag{A.4}$$

d'où résulte (5.23).

Bibliographie.

[1]) E. C. G. Stueckelberg et D. Rivier, Helv. Phys. Acta **23**, 215 et 236 (1950).
[2]) E. C. G. Stueckelberg et T. A. Green, Helv. Phys. Acta **24**, 153 (1951).
[3]) E. C. G. Stueckelberg et A. Petermann, Helv. Phys. Acta **26**, 499 (1953).
[4]) E. C. G. Stueckelberg, Phys. Rev. **81**, 130 (1951).
[5]) J. Rayski, Acta Phys. Polon. **13**, 95 (1954).
[6]) L. Schwartz, Théorie des Distributions, I, p. 23. Chez Hermann & Cie, Paris 1950.
[7]) M. Chrétien et R. E. Peierls, Nuovo Cimento, **10**, 669 (1953).
[8]) M. Fierz, Helv. Phys. Acta, **23**, 731 (1950).