

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 27 (1954)
Heft: V

Artikel: Zur Behandlung der Brownschen Bewegung mit Hilfe der Langevin-Gleichung
Autor: Grün, F. / Moppert, K.-F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112522>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Behandlung der Brownschen Bewegung mit Hilfe der Langevin-Gleichung

von F. Grün*) und K.-F. Moppert**).

(16. VIII. 1954.)

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, wie die übliche mathematische Behandlung der Langevin-Gleichung¹⁾ stark vereinfacht wird, wenn man sich einerseits des Formalismus der Laplace-Transformation bedient und andererseits konsequent mit stochastischen Grössen rechnet. Durch eine derartige Darstellung wird die Struktur der Langevinschen Behandlungsweise auch in komplizierteren Fällen klar erkennbar; vor allem aber lassen sich so ohne weiteres auch allgemeinere, bis jetzt anscheinend nicht betrachtete Fälle von Brownscher Bewegung behandeln.

1. Allgemeines zur Methode der Langevin-Gleichung.

Die Langevinsche Gleichung lautet

$$m \dot{u}(t) = -\beta u(t) + A(t). \quad (1)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist die folgende: Wir haben ein Teilchen mit der Masse m , der Geschwindigkeit $u(t)$ und der Beschleunigung $\dot{u}(t)$. Auf dieses Teilchen wirken die Kräfte $-\beta u$, die Reibungskraft, und $A(t)$. Die Kraft $A(t)$ soll das Resultat der unregelmässigen Stösse der umgebenden Moleküle auf das herausgegriffene Teilchen darstellen, soweit nicht bereits in der Reibungskraft enthalten. Offenbar ist $A(t)$ eine sich rasch und unregelmässig ändernde Funktion der Zeit.

Die Lösung bzw. mathematische Behandlung der Langevin-Gleichung erfolgt in zwei Schritten. Zunächst gewinnt man die formale Lösung von (1), das heisst $x(t)$ und daraus $u(t)$, indem man $A(t)$ als eine feste, gegebene Funktion betrachtet. Hierauf wird diese formale Lösung „stochastisiert“, das heisst man charakterisiert $A(t)$ bzw. dem $A(t)$ zugeordnete Grössen $A(\nu \Delta t)$ durch ihre statistischen Eigenschaften und erhält so statistische Aussagen über x und u , in Sonderheit über die Mittelwerte und Streuungen dieser Grössen in ihrer Abhängigkeit von der Zeit.

*) Physikalisch-Chemische Anstalt der Universität Basel.

**) Nauenstrasse 16, Basel, jetzt Universität Hobart, Hobart (Tasmanien).

Gleichung (1) und die daraus gewonnenen Beziehungen betreffen den einfachsten Fall der Brownschen Bewegung eines Teilchens in einem viskosen Medium, wie sie bereits von EINSTEIN behandelt wurde. Aus physikalischen und mathematischen Gründen wird man daran interessiert sein, diese Gleichung zu verallgemeinern. Eine erste Gruppe von solchen „allgemeineren Langevin-Gleichungen“ erhält man, indem man bei Belassung der Gestalt von (1) eine andere Annahme über die Grösse der Reibungskraft, oder allgemeiner, der „systematischen Kraft“ macht.

Wir schreiben

$$m \dot{u}(t) = f + A(t). \quad (2)$$

Hier soll nun f nicht mehr proportional der Geschwindigkeit des Teilchens sein, sondern in allgemeinerer Weise von seiner Geschwindigkeit und Lage, sowie explizit von der Zeit abhängen. Wir können dabei noch im einzelnen unterscheiden zwischen dem Fall, dass f eine Funktion der momentanen Werte von u und x ist, und dem allgemeineren Fall, in dem f ein Funktional von u und x ist, die mit ihren sämtlichen Werten seit Beginn des Versuchs den momentanen Wert von f bestimmen.

Im folgenden soll in Abschnitt 2 zunächst gezeigt werden, wie man unter bestimmten Voraussetzungen über die Gestalt der formalen Lösung von (2) das hier gegebene Programm der Behandlung der Langevin-Gleichung in sehr einfacher Weise realisieren kann; in Abschnitt 3 sollen zwei Beispiele für Gleichung (2) mit dieser Methode behandelt werden.

2. Statistische Aussagen über $u(t)$ und $x(t)$ für den Fall, dass die formale Lösung der Langevin-Gleichung die Gestalt eines Faltungsintegrals hat.

Es gilt der folgende Satz: Ist die Langevinsche Gleichung formal lösbar und hat ihre Lösung die Gestalt eines Faltungsintegrals, so ist die Lösung auch „stochastisierbar“, das heisst, man kann aus ihr explizite statistische Angaben über Geschwindigkeit und Lage des Teilchens als Funktionen der Zeit gewinnen²⁾. Es soll also gelten

$$x(t) = \Psi * A + \Phi(t) *. \quad (3)$$

und damit

$$u(t) = \dot{x}(t) = \Psi' * A + \Phi'(t). \quad (4)$$

*) $\Psi * A$ (Faltungsintegral) = $\int_0^t \Psi(t-\xi) A(\xi) d\xi$.

Zur Durchführung des Beweises approximieren wir zunächst (3) und (4) durch die folgenden Summen*)

$$x(t) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{t}{\Delta t}} \Psi(t - \nu \Delta t) A(\nu \Delta t) + \Phi(t), \quad (5)$$

$$u(t) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\frac{t}{\Delta t}} \Psi'(t - \nu \Delta t) A(\nu \Delta t) + \Phi'(t). \quad (6)$$

Hierauf geben wir den in diesen Ausdrücken vorkommenden $A(\nu \Delta t)$ eine neue Bedeutung. Zunächst stellen diese Terme natürlich Grössen mit ganz bestimmten Werten dar; nunmehr sollen die $A(\nu \Delta t)$ jedoch als stochastische Grössen betrachtet werden, die lediglich durch ihre Erwartungswerte (und daraus abgeleitete Angaben) gekennzeichnet sind. Im einzelnen nehmen wir an, dass für alle ν Folgendes gilt:

a) die $A(\nu \Delta t)$ sind untereinander statistisch unabhängig; (7)

b) die $A(\nu \Delta t)$ sind normal verteilt; (8)

c) $\overline{A(\nu \Delta t)} = 0$; (9)

d) $\sigma^2(A(\nu \Delta t)) = \sigma^2(A(\Delta t))$. (10)

Die Bedeutung der Annahmen a) bis d) und die der Auffassung der $A(\nu \Delta t)$ als stochastische Grössen überhaupt, ist dabei die, dass wir so in mathematisch fassbarer Form die zunächst ganz unbekannte Funktion $A(t)$ charakterisieren. Im einzelnen werden uns diese Annahmen durch die physikalische Anschauung nahegelegt. Von der Annahme (8) lässt sich überdies zeigen, dass sie notwendig und hinreichend ist dafür, dass der Erwartungswert der Geschwindigkeit des Teilchens für grosse t asymptotisch eine normale (Maxwellsche) Verteilung besitzt³⁾⁴⁾.

Zusammen mit den $A(\nu \Delta t)$ werden nun auch die Geschwindigkeit $u(t)$ und die Lage $x(t)$ zu stochastischen Grössen. Wegen der Linearität der Beziehungen (5) und (6), sowie auf Grund der Annahmen (7) bis (10) erhalten wir unter Anwendung der Sätze⁵⁾ über das Rechnen mit stochastischen Grössen folgende statistische Aussagen über x und u . Für die Mittelwerte gilt

$$\overline{x}(t) = \Phi(t) \quad (11)$$

und

$$\overline{u}(t) = \Phi'(t). \quad (12)$$

*) Wir betrachten den durch die Approximation erzeugten Fehler als vernachlässigbar.

Entsprechend wird für die Streuungen

$$\sigma^2(x(t)) = \sum \Psi^2(t - \nu \Delta t) \sigma^2(A(\Delta t)) \Delta t^2. \quad (13)$$

und

$$\sigma^2(u(t)) = \sum \Psi'^2(t - \nu \Delta t) \sigma^2(A(\Delta t)) \Delta t^2. \quad (14)$$

Approximieren wir die Summen durch Integrale*), so erhalten wir

$$\sigma^2(x(t)) = \sigma^2(A(\Delta t)) \Delta t \int_0^t \Psi^2(\xi) d\xi \quad (15)$$

und

$$\sigma^2(u(t)) = \sigma^2(A(\Delta t)) \Delta t \int_0^t \Psi'^2(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Die erhaltenen Ausdrücke können wir nun zur Beschreibung der Brownschen Bewegung verwenden; wir haben dabei lediglich zu berücksichtigen, dass für die Geschwindigkeit des betrachteten Teilchens im thermischen Gleichgewicht, das heisst also für grosse t , gelten muss

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(t) = 0 ** \quad (17)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}^2(t) = \frac{kT}{m} \quad (18)$$

und daraus wegen der allgemein gültigen Beziehung

$$\bar{a}^2 = \bar{a}^2 + \sigma^2(a) \quad (19)$$

auch

$$\lim \sigma^2(u(t)) = \frac{kT}{m}. \quad (20)$$

Die Formel (20) gestattet uns, aus Gleichung (16) das in seinem Zahlenwert noch unbekannte $\sigma^2[A(\Delta t)]$ auszurechnen. Durch Einsetzen dieses Wertes in (15) erhalten wir dann

$$\sigma^2(x(t)) = \frac{kT}{m} \frac{\int_0^t \Psi^2(\xi) d\xi}{\int_0^t \Psi'^2(\xi) d\xi} *** \quad (21)$$

*) Vgl. Fussnote vorstehende Seite.

**) Es muss also gelten $\Phi'(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

***) Wir setzen die Konvergenz von $\int_0^\infty \Psi'^2(\xi) d\xi$ voraus.

und daraus schliesslich einen Ausdruck für den experimentell beobachteten quadratischen Mittelwert der Verschiebung des Teilchens in seiner zeitlichen Entwicklung

$$x^2(t) = \Phi^2(t) + \frac{kT}{m} \frac{\int_0^t \Psi^2(\xi) d\xi}{\int_0^t \Psi'^2(\xi) d\xi}. \quad (22)$$

3. Behandlung zweier Fälle, in denen die formale Lösung der Langevin-Gleichung die Gestalt eines Faltungsintegrals hat.

a) Für den Fall einer linear von u und x abhängigen systematischen Kraft

$$f = -\beta u - \gamma x \quad (23)$$

lautet die verallgemeinerte Langevin-Gleichung*)

$$m \dot{u} = -\beta u - \gamma x + A(t) \quad (24)$$

oder auch

$$m \ddot{x} = -\beta \dot{x} - \gamma x + A(t); \quad (25)$$

daraus wird

$$x = S * A + R, \quad (26)$$

wobei

$$S(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{m s^2 + \beta s + \gamma} \right) ** \quad (27)$$

und

$$R(t) = (m \dot{x}_0 + \beta x_0) S(t) + m x_0 S'(t); \quad (28)$$

aus (26) erhält man weiter

$$u(t) = \dot{x} = S' * A + R'. \quad (29)$$

Schliesslich wird aus (27) nach kurzer Rechnung

$$\int_0^\infty S^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2 \beta \gamma} \quad (30)$$

und

$$\int_0^\infty S'^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2 m \beta}. \quad (31)$$

*) Dieses Beispiel ist schon – allerdings mit mehr Rechenaufwand – von anderen Autoren behandelt worden, siehe zum Beispiel die Darstellung bei S. CHANDRASEKHAR, l. c.

**) L^{-1} bedeutet Umkehrung der Laplace-Operation L ; $L(F) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$.

Durch Einsetzen von (30) und (31) in (22) erhalten wir als asymptotischen Mittelwert der quadratischen Verschiebung des Teilchens

$$\overline{x^2(t)} = R^2(t) + \frac{kT}{\gamma}. \quad (32)$$

Interessiert man sich auch für die zeitliche Entwicklung dieses Mittelwerts, so hat man aus (27)

$$\int_0^t S^2(\xi) d\xi$$

zu bilden und diesen Wert, sowie (31) in (22) einzusetzen. Man erhält so

$$\overline{x^2(t)} = R^2(t) + \frac{kT}{m \mu \nu} - \frac{kT \cdot 2(\mu + \nu)}{m(\mu - \nu)^2} \left(\frac{e^{-2\mu t}}{2\mu} + \frac{e^{-2\nu t}}{2\nu} - \frac{2}{\mu + \nu} e^{-(\mu + \nu)t} \right), \quad (33)$$

wo

$$\nu + \mu = \frac{\beta}{m}, \quad \nu \mu = \frac{\gamma}{m} \quad (34)$$

(ν und μ sind der Einfachheit halber als reell und verschieden angenommen). Durch eine Reihe von Umformungen wird daraus

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= R^2(t) + \frac{kT}{m \mu \nu} - \frac{kT}{m \mu \nu} e^{-(\mu + \nu)t} \times \\ &\times \left[2 \left(\frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{\mu - \nu}{2} t \right) + \left(\frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} \right) \sinh \left((\mu - \nu) t \right) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

In dieser Form ist der Ausdruck identisch mit der Formel (214), die CHANDRASEKHAR am angeführten Ort als Lösung desselben Problems gibt.

Entscheidend ist nun, dass die eben gegebene Behandlungsweise in keiner Weise gerade auf Gleichung (24) beschränkt ist. Es lassen sich eine ganze Reihe von Verallgemeinerungen der Langevin-Gleichung angeben, deren formale Lösung die Gestalt eines Faltungsintegrals hat und die dementsprechend nach den Angaben in Abschnitt 2 behandelt werden können. Ein spezielles Beispiel, das physikalisches Interesse besitzt, soll im folgenden als Fall b) besprochen werden.

b) Wir nehmen an, dass die systematische Kraft selbst ein Fallungssintegral ist aus einer Funktion K und der Geschwindigkeit u des Teilchens, nämlich

$$f = -K * u. \quad (36)$$

Die dazugehörige Langevin-Gleichung lautet dann

$$m \dot{u} = -K * u + A \quad (37)$$

bzw.

$$m \ddot{x} = -K * \dot{x} + A. \quad (38)$$

Diese Gleichung, die wegen des Vorkommens einer beliebigen Funktion K natürlich sehr viel allgemeiner ist als zum Beispiel (24), scheint in diesem Zusammenhang noch nicht behandelt worden zu sein. Man erhält aus (38)

$$x = Q * A + P, \quad (39)$$

wobei

$$Q(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{m s^2 + s L(K)} \right) \quad (40)$$

und

$$P(t) = L^{-1} \left(\frac{m s x_0 + m \dot{x}_0 + L(K) \cdot x_0}{m s^2 + s L(K)} \right); \quad (41)$$

aus (39) erhält man weiter für u

$$u = \dot{x} = Q' * A + P'. \quad (42)$$

Um explizite Formeln zu erhalten, wollen wir für das Folgende K spezialisieren zu

$$K(\xi) = \varepsilon e^{-\xi/\tau} \quad (43)$$

(für $\tau \rightarrow 0$, $\tau \varepsilon \rightarrow \beta$ erhält man daraus den allereinfachsten, klassischen Fall der Brownschen Bewegung zurück). Aus (43) wird dann zunächst

$$L(K) = \frac{\varepsilon}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (44)$$

und damit aus (40)

$$m Q(t) = L^{-1} \left(\frac{s + \frac{1}{\tau}}{\left(s^2 + \frac{s}{\tau} + \frac{\varepsilon}{m} \right) s} \right). \quad (45)$$

Man verifiziert, dass für Q dann gilt

$$m Q(t) = \frac{\sigma}{\varrho(\varrho - \sigma)} e^{-\varrho t} - \frac{\varrho}{\sigma(\varrho - \sigma)} e^{-\sigma t} + \frac{\varrho + \sigma}{\varrho \sigma} \quad (46)$$

und für Q'

$$m Q'(t) = -\frac{\sigma}{\varrho - \sigma} e^{-\varrho t} + \frac{\varrho}{\varrho - \sigma} e^{-\sigma t} \quad (47)$$

mit

$$\varrho + \sigma = \frac{1}{\tau}, \quad \varrho \sigma = \frac{\varepsilon}{m}. \quad (48)$$

Aus (47) folgt weiter

$$m^2 \int_0^\infty Q'^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho + \sigma}{\varrho \sigma} + \frac{1}{\varrho + \sigma} \right). \quad (49)$$

Für das entsprechende Integral über Q^2 überlegt man sich, dass der Integrand ebenso wie $Q(t)$ selbst aus Exponentialtermen und einer Konstanten besteht. Durch Integration erhalten wir daraus Exponentialterme, Konstanten und einen in t linearen Term, nämlich

$$\left(\frac{\varrho + \sigma}{\varrho \sigma} \right)^2 \cdot t. \quad (50)$$

Somit erhalten wir die asymptotische Formel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty Q^2(\xi) d\xi = \frac{1}{m^2} \left(\frac{\varrho + \sigma}{\varrho \sigma} \right)^2. \quad (51)$$

Durch Einsetzen von (49) und (51) in (22) erhalten wir schliesslich für den quadratischen Mittelwert der Verschiebung pro Zeiteinheit für grosse t

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{x^2(t)}}{t} = \frac{kT}{m} \frac{2 \left(\frac{\varrho + \sigma}{\varrho \sigma} \right)^2}{\frac{\varrho + \sigma}{\varrho \sigma} + \frac{1}{\varrho + \sigma}} * \quad (52)$$

*) Unter der Voraussetzung, dass $P^2(t)/t \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

oder auch wegen (48)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{x^2(t)}}{t} = \frac{2 k T}{\epsilon \tau} \left(\frac{1}{1 + \epsilon \tau \frac{\tau}{m}} \right). \quad (53)$$

4. Diskussion der erhaltenen Formeln.

Wir haben am Anfang der Arbeit Gleichung (1) eingeführt als Beschreibung der (translatorischen) Brownschen Bewegung eines Teilchens in einem viskosen Medium. Dementsprechend beschreiben die Verallgemeinerungen a) bzw. die Gleichungen (24), (32) und (33) die Bewegung eines harmonisch gebundenen Teilchens in einem viskosen Medium. Die Verallgemeinerung b) [Gleichungen (37) und (53)] beschreibt die Bewegung unter der Wirkung einer Rückstellkraft, deren Grösse zur Zeit t von der Vorgeschichte der Bewegung des Teilchens abhängt.

Von grösserem Interesse ist es jedoch wohl, die Formeln aufzufassen als Beschreibung einer rotatorischen Brownschen Bewegung; als solche können wir sie zu Experimenten in Beziehung setzen.

Wenn wir x als Winkel der Ablenkung aus der Ruhelage, m als Trägheitsmoment auffassen, so gibt (32) bzw. (33) die rotatorische Brownsche Bewegung zum Beispiel eines Galvanometerspiegels wieder, unter der gleichzeitigen Wirkung eines elastischen Drehmoments $(-\gamma x)$, erzeugt durch die Torsion des Aufhängedrahtes, und eines Reibungsmoments $(-\beta \dot{x} x)$, hervorgerufen durch die umgebende Luft (vgl. E. KAPPLER⁶)).

Gleichung (53) ist entsprechend aufzufassen als Beschreibung der Brownschen Bewegung eines solchen Spiegels unter der Wirkung eines Drehmoments $M = K * u$, das heisst bei Vorliegen von elastischer Nachwirkung im Draht mit der Nachwirkungsfunktion K bzw. der speziellen, besonders einfachen Nachwirkungsfunktion $K = \epsilon e^{-t/\tau}$. (Die äussere Reibung wurde hier der Einfachheit halber vernachlässigt, sie lässt sich ohne weiteres auch berücksichtigen.)

Da wir im Prinzip stets mit elastischer Nachwirkung zu rechnen haben und eine rein elastische Rückstellkraft nur eine Idealisierung darstellt, besitzt Formel (53) ein gewisses Interesse.

Der eine von uns (K.-F. M.) dankt dem Schweizerischen Nationalfonds für ein Stipendium.

Literaturverzeichnis.

- ¹⁾ Vgl. zum Beispiel die Zusammenfassung von S. CHANDRASEKHAR, Rev. mod. Phys. **15**, 1 (1943).
- ²⁾ Vgl. Lemma I bei CHANDRASEKHAR, l. c.
- ³⁾ S. CHANDRASEKHAR, Rev. mod. Phys. **21**, 383 (1949).
- ⁴⁾ K.-F. MOPPERT und F. GRÜN, im Druck (Experientia).
- ⁵⁾ Siehe zum Beispiel J. V. USPENSKY, Introduction to mathematical probability (McGraw-Hill Co., New York 1937), S. 173.
- ⁶⁾ E. KAPPLER, Ann. Phys. **11**, 233 (1931); Naturwissenschaften **27**, 649, 666 (1939).