

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 27 (1954)  
**Heft:** I

**Artikel:** Mehrfacherzeugung von Mesonen bei pseudoskalarer Kopplung  
**Autor:** Thirring, Walter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112501>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Mehrfacherzeugung von Mesonen bei pseudoskalarer Kopplung

von **Walter Thirring.**

Physikalisches Institut, Universität Bern.

(26. IX. 1953.)

*Zusammenfassung.* Es wird die Mesonerzeugung durch Nukleonenstoss bei pseudoskalarer und pseudovektorieller Kopplung mit klassischer Behandlung der Nukleonen berechnet. Es zeigt sich, dass bei pseudoskalarer Kopplung die Paarerzeugung von Mesonen mit der Einzelerzeugung bei den jetzt künstlich zu erreichenden Energien schon merklich konkurrieren muss.

## Einleitung.

Nachdem jetzt Protonen von 2,2 Gev Energie künstlich erzeugt werden können, steht die experimentelle Entscheidung über Mehrfacherzeugung von Mesonen in diesem Energiegebiet bevor. Es soll darauf hingewiesen werden, dass die Multiplizität der Mesonen für pseudoskalare und pseudovektorielle Kopplung merklich verschieden ist, und dass eine Bestimmung derselben zur Unterscheidung zwischen diesen Möglichkeiten beitragen könnte. Man kann die pseudoskalare Kopplung bekanntlich (Fo 1951, We 1952) in eine schwache pseudovektorielle Kopplung plus einer starken Paarkopplung transformieren. Letztere liefert für die Kernkräfte (Le 1952b, Ru 1953) ein von Spin und Isotopenspin unabhängiges Zentralpotential, während die pseudovektorielle Kopplung die Tensorkraft und einen kleinen Beitrag zur Zentralkraft ergibt. Die Kernkräfte scheinen zugunsten der pseudoskalaren Kopplung zu sprechen (Ma 1951, Ta 1951, Le 1952a), da reine pseudovektorielle Kopplung der Tensorkraft zu grosses Gewicht verleihen würde. Details dieser Interpretation sind jedoch noch unsicher. Bei Streuung Meson-Nukleon wirkt die Paarkopplung wie eine abstossende Kontaktkraft, während die pseudovektorielle Kopplung Resonanzstreuung hervorruft (Be 1953). Beide Effekte scheinen vorhanden zu sein, doch konnte quantitative Übereinstimmung noch nicht erzielt werden (Dr 1952).

Bei der Erzeugung von Mesonen durch Nukleonenstoss wird durch die starke Paarkopplung die Erzeugung einer geraden Anzahl von Mesonen gefördert. Bei den jetzt künstlich zu erreichenden Energien müsste also, falls die pseudoskalare Kopplung realisiert ist, die Produktion von zwei Mesonen stark mit der von nur einem Meson konkurrieren, hingegen sollte die Erzeugung von drei Mesonen praktisch nicht vorkommen. Die Häufigkeiten der drei Prozesse sollten nach den hier gegebenen Rechnungen für 2 GeV etwa im Verhältnis 1:1/2:1/100 stehen. Dies unterscheidet sich sowohl von den Aussagen der pseudovektoriellen Theorie wie auch von den Theorien der Mehrfacherzeugung von FERMI und HEISENBERG, die eine Bevorzugung gerader Anzahlen nicht kennen.

Auch bei der Photonerzeugung von Mesonen sollte bei den jetzt zur Verfügung stehenden Energien die Doppelemission bemerkbar werden, was schon an anderer Stelle untersucht wurde (Dr 1953).

### **Berechnung der Emissionswahrscheinlichkeit.**

Wir legen der Rechnung ein klassisches Modell zugrunde, bei dem man die Bewegung des Nukleons als gegeben ansieht. Man kann dann das bei einer Bewegungsänderung abgeschüttelte Mesonfeld exakt berechnen, ohne bei einer störungstheoretischen Näherung abbrechen zu müssen (Th 1951, Gl 1951). Dieses Modell wurde schon oft diskutiert (Le 1948, Cl 1948, Um 1952) und liefert dieselben Resultate wie eine quantisierte Behandlung der Nukleonen, falls der in das Mesonfeld investierte Energie-Impuls-Betrag in der gesamten Bilanz nicht viel ausmacht. Dies ist z.B. bei Prozess  $p + p \rightarrow \pi^+ + D$  nicht erfüllt, da hier das  $\pi$ -Meson im Schwerpunktsystem fast die ganze Anfangsenergie übernimmt. Entsprechend den experimentellen Bedingungen haben wir jedoch  $n$   $p$ -Stösse im Auge, bei denen es nach Emission eines geladenen Mesons keine gebundenen Zustände der Nukleonen gibt. Auch kommen bei den von uns betrachteten Energien nicht nur kleine Drehimpulse der Nukleonen ins Spiel — dies scheint der Anstieg des  $\pi^0$ -Erzeugungsquerschnitts bei 450 MeV zu zeigen (Gu 1953) —, so dass eine klassische Behandlung der Nukleonen nicht unvernünftig erscheint. Die Meinung ist, dass einerseits die hohen Mesonenergien, bei denen das Modell nicht gerechtfertigt ist, selten vorkommen und daher nicht so ins Gewicht fallen und dass andererseits das Modell auch ausserhalb seines Gültigkeitsbereichs qualitativ richtig ist, wie ja auch die klassische Behandlung der Bremsstrahlung für noch recht hohe Photonenergien gute Resultate liefert.

Bei der Auswertung der Emissionswahrscheinlichkeiten bedient man sich vorteilhaft der invarianten Feynmanschen Methoden. Wir gehen von einer Wechselwirkungsdarstellung aus, in der die pseudoskalare Wechselwirkungsichte nach der Wentzelschen Transformation folgende Gestalt annimmt\*):

$$H(x) = g(x) M \left( \left( 1 + \frac{f^2}{M^2} \Phi(x)^2 \right)^{1/2} - 1 \right) + \frac{f}{2M} j_\alpha(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_\alpha} \frac{t}{1 + f^2 \Phi(x)^2 / M^2} \quad (1)$$

mit  $g = \bar{\psi} \psi$  und  $j_1 = i \bar{\psi} \gamma_1 \gamma_5 \psi$ .  $f$  ist die pseudoskalare Kopplungskonstante und hat den Zahlwert  $f = 11$ ,  $f^2/4 \pi = 10$ . Die entsprechende pseudovektorielle Kopplungskonstante ist viel kleiner, nämlich  $g^2/4 \pi = (f/2M)^2/4 \pi = 1/18$ .  $\Phi$  und  $\psi$  repräsentieren das Mesonfeld und das Nukleonfeld. Die skalare und die pseudovektorielle Dichte der Nukleonen ersetzen wir in unserem klassischen Modell durch\*\*)

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= M \int_{-\infty}^0 ds \delta(x - ps) + M \int_0^\infty ds \delta(x - p's) = \\ &= \frac{M}{(2\pi)^4} \int d^4k (i/pk - i/p'k) e^{ikx} \\ j_\alpha(x) &= M \int_{-\infty}^0 ds v_\alpha \delta(x - ps) + M \int_0^\infty ds v'_\alpha \delta(x - p's) = \\ &= \frac{M}{(2\pi)^4} \int d^4k (i v_\alpha / pk - i v'_\alpha / p'k) e^{ikx} \\ p^2 &= p'^2 = M^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$p$  und  $p'$  stellen die Energie-Impuls-Vektoren\*\*\*) des stossenden Nukleons vor und nach dem Stoss dar. Dabei haben wir das gestossene Nukleon ausser acht gelassen. Wir sind aber nur an relativen Wahrscheinlichkeiten interessiert und Einbeziehung des Rückstossnukleons ändert diese nicht wesentlich. Für eine qualitative Diskussion — mehr kann man zur Zeit ja ohnedies nicht geben —

\*)  $\hbar = c = \text{Mesonmasse} = 1$ .

\*\*) Glieder mit  $\delta(pk)$  haben wir weggelassen, da sie zur Mesonerzeugung nicht beitragen.

\*\*\*) Zur Bezeichnungsweise sei zu bemerken, dass Vierervektoren nicht besonders gekennzeichnet werden, der Index 0 bedeutet ihren zeitartigen und fett-druck ihren raumartigen Anteil.

müssen wir letzteres nicht berücksichtigen. Der Pseudovektor  $v$  in (2) ist im Ruhesystem des Nukleons rein raumartig, in Formeln

$$v^2 = v'^2 = -1, \quad vp = v'p' = 0. \quad (3)$$

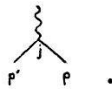
Die Isotopenspinmatrizen  $t$  sorgen für die Ladungserhaltung und sollen nicht weiter diskutiert werden.

Um die Wahrscheinlichkeit für die Emission einer bestimmten Zahl von Mesonen bei der Änderung von  $p$  und  $v$  zu berechnen, müssen wir aus dem allgemeinen Ausdruck für die  $S$ -Matrix

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} P \int dx_1 \dots dx_n H(x_1) \dots H(x_n) \quad (4)$$

die entsprechenden Matrixelemente herausuchen. Führt man dies nach den üblichen Methoden für die Beiträge niedrigster Ordnung aus, dann ergeben sich die folgenden, weiter zu behandelnden Formeln für die Emissionswahrscheinlichkeiten:

a) Ein Meson: Hierfür haben wir einen Beitrag erster Ordnung\*), der vom ersten Term einer Entwicklung des zweiten Gliedes in (1) nach Potenzen von  $f^2/M^2$  stammt. Dem entspricht eine Wechselwirkung  $f/2 M \cdot j_\alpha \partial^\alpha \Phi$  oder folgende graphische Darstellung des Prozesses:



Die entsprechende Emissionswahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$w_1 = \left( \frac{f}{2M} \right)^2 (2\pi)^{-3} \int d^4 k \delta(k^2 - 1) M^2 (vk/pk - v'k/p'k)^2. \quad (5)$$

Durch die plötzliche Impulsänderung enthält die Fourier-Zerlegung von  $g$  und  $j$  beliebig hohe Frequenzen. Dies hat zur Folge, dass Mesonen mit unbeschränkter Energie abgestrahlt werden, so dass wir unser klassisches Modell noch durch eine Vorschrift über die maximale Energie  $K$ , die in das Mesonfeld abgegeben werden kann, ergänzen müssen.  $K$  ist natürlich nicht frei wählbar, sondern wird durch die kinematischen Gegebenheiten bestimmt. Um dies zu untersuchen, versetzen wir uns in das System ( $s$ -System), in dem das Nukleon direkt nach rückwärts reflektiert wird, also  $p + p'$  ein rein zeitartiger Vektor ist:

$$p = (E, \mathbf{p}), \quad p' = (E, -\mathbf{p}). \quad (6)$$

\*) Unter Ordnung verstehen wir den Wert von  $n$  in (4).

Die invariante Grösse  $\Delta = -(p - p')^2/2 M^2$ , die ein Mass für die Grösse des Impulsumsatzes darstellt, steht mit  $\mathbf{p}$  in der Beziehung

$$M^2 \Delta = 2 \mathbf{p}^2. \quad (7)$$

Wir sind nur an Impulsumsätzen klein im Vergleich zur Ruhemasse  $M$  des Nukleons interessiert, also  $\Delta \ll 1$ . Dann können wir die Nukleonen im  $s$ -System nichtrelativistisch behandeln. Das von uns betrachtete Nukleon ändert seine Energie beim Stoss nicht, die maximale, für Mesonerzeugung verfügbare Energie wird dadurch frei, dass ihm sein Stosspartner mit dem Impuls  $2 \mathbf{p}$  entgegenfliegt und beim Stoss abgestoppt wird. Die Energieänderung des abgestoppten Nukleons ist gleich  $(2 \mathbf{p})^2/2 M = \Delta M$ . Der zu dieser Energie gehörige Mesonimpuls ist  $< \mathbf{p}$  und muss in der Impulsbilanz nicht beachtet werden, wir können also für die maximale, im  $s$ -System in das Mesonfeld abgegebene Energie  $K = M \Delta$  ansetzen.

Da das Nukleon im  $s$ -System als nichtrelativistisch anzusehen ist, können wir näherungsweise in der Fourier-Zerlegung von  $j$

$$M^2(1/pk \pm 1/p'k)^2 = \frac{4 M^2}{E^2 k_0^2} \left[ \frac{1}{((\mathbf{p} \mathbf{k})/E k_0)^2} \right] \quad (8)$$

setzen. Wir wollen ferner nur die Fälle  $v = v'$  und  $v = -v'$  studieren und die betreffenden Wahrscheinlichkeiten für Mesonemission ohne und mit Spinumklappen durch  $w^{\uparrow\uparrow}$  und  $w^{\uparrow\downarrow}$  kennzeichnen. Führen wir (8) in (5) ein, dann reduzieren sich die Ausdrücke zu

$$w_1^{\uparrow\uparrow} = g^2/4 \pi^2 \cdot \int_1^K dk_0 \mathbf{k} \frac{4 M^2}{E^2 k_0^2} \left[ \frac{1}{((\mathbf{p} \mathbf{k})/E k_0)^2} \right] (\mathbf{v} \mathbf{k})^2 \frac{d\Omega}{4 \pi}. \quad (9)$$

Wir haben hier die  $d\mathbf{k}$ -Integration mit Hilfe der  $\delta$ -Funktion eliminiert,  $\mathbf{k}$  als Abkürzung für  $(k_0^2 - 1)^{1/2}$  jedoch beibehalten. Für  $v$  nehmen wir einen rein raumartigen Vektor, der gemäss (3) der Bedingung

$$(\mathbf{p} \mathbf{v}) = 0 \quad (3')$$

genügt. Das Integral für  $w_1^{\uparrow\downarrow}$  lässt sich ohne weiteres berechnen, für  $w_1^{\uparrow\uparrow}$  ist die Beziehung

$$\int \frac{d\Omega}{4 \pi} k_i k_j k_l k_m = \frac{k^4}{15} (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{lj}) \quad (10)$$

und (3') zu verwenden. Für Energien knapp über der Schwelle,

\*

$K = 1 + \delta$ ,  $\delta < 1$ , und für grosse Energien,  $K \gg 1$ , ergeben sich die Näherungen:

$$\left. \begin{aligned}
 w_1^{\uparrow\downarrow} &= \frac{g^2}{4\pi} \frac{4}{3\pi} (1 + K/2 M)^{-1} \left\{ \frac{K^2 - 1}{2} - \frac{3}{2} \ln K \right\} = \\
 &= \frac{1,2 \cdot 10^{-2} (K^2 - 1 - 3 \ln K) (1 + K/2 M)^{-1}}{2,7 \cdot 10^{-2} \delta^{5/2} (1 - \delta)} \\
 w_1^{\uparrow\uparrow} &= \frac{g^2}{4\pi} \frac{4}{15\pi} \frac{K}{2M} (1 + K/2 M)^{-2} \left\{ \frac{K^2}{2} - \frac{5}{2} \ln K + \frac{3}{8} \right\} = \\
 &= \frac{1,75 \cdot 10^{-4} K (K^2 - 5 \ln K + 3/4) (1 + K^2/2 M)^{-2}}{5,5 \cdot 10^{-4} \delta^{7/2} (1 - 1,2 \delta)} .
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

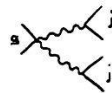
b) Zwei Mesonen: Verwendet man wieder die ersten Glieder einer Entwicklung von (1), dann haben wir einen Beitrag erster und einen zweiter Ordnung:



Letzterer gibt nur eine kleine Korrektur, die im Anhang ausgerechnet wird. Der Beitrag erster Ordnung stammt von einer Wechselwirkung  $f^2/2 M \cdot g \Phi^2$  und gibt die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 w_2 &= 2 \left( \frac{f^2}{2M} \right)^2 (2\pi)^{-6} \int dk_1 dk_2 \delta(k_1^2 - 1) \delta(k_2^2 - 1) \\
 &\quad (1/(p, k_1 + k_2) - 1/(p', k_1 + k_2))^2 \quad 0 < k_1^0 + k_2^0 < K . \quad (12)
 \end{aligned}$$

Der Faktor 2 rührt daher, dass es im Matrixelement zwei verschiedene Zuordnungen der Mesonen zu den beiden Erzeugungsoperatoren  $\Phi^+$  gibt. Man muss jedoch den Ausdruck für  $w$  noch durch  $2!$  dividieren, um der Ununterscheidbarkeit der Mesonen Rechnung zu tragen, so dass wir insgesamt  $(2)^2/2! = 2$  erhalten (vgl. Th 1951). Es soll noch bemerkt werden, dass in unserer Näherung keine Interferenz zwischen den Matrixelementen mit  $g$  und  $j$  auftritt, da der Beitrag des betreffenden Graphen



proportional zu

$$\int d\Omega_1 d\Omega_2 (p, k_1 + k_2) (v k_1) (v k_2) = 0 \quad (13)$$



ist. Für die gesamte Mesonenergie führen wir die neue Variable  $e = k_1^0 + k_2^0$  ein. Wie oben auseinandergesetzt, gilt für das Integrationsgebiet die Beschränkung  $e < K$ . Unter Verwendung von (8) schreiben wir

$$w_2 = 2 \left( \frac{f^2}{2M} \right)^2 (2\pi)^{-4} \frac{M^2}{E^2} \frac{p^2}{E^2} \frac{4}{3} \int_{k_1^0 + k_2^0 < K} dk_1^0 dk_2^0 \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2)}{(k_1^0 + k_2^0)^4} = \left. \begin{aligned} &= \left( \frac{f^2}{4\pi} \right)^2 \frac{4}{(2M)^2 3\pi^2} \frac{K}{M} \int_2^K de e^{-4} \int_1^{e-1} dk_0 (k_0^2 - 1)^{1/2} \times \\ &\times ((e - k_0)^2 - 1)^{1/2} \cdot (k_0^2 + (e - k_0)^2 - 2) (1 + K/2M)^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Für die entsprechenden Näherungen wie in (12),  $K = 2 + \delta$ ,  $\delta < 1$  und  $K \gg 2$ , ergibt dies:

$$w_2 = \left( \frac{f^2}{4\pi} \right)^2 \frac{4}{(2M)^2 3\pi^2} \times \left. \begin{aligned} &\times \frac{K}{M} (1 + K/2M)^{-2} \left\{ \frac{1}{20} \cdot \left( K^2 - 10 \left( \ln \frac{K}{2} \right)^2 + 20 \ln \frac{K}{2} - 4 \right) \right. \\ &\quad \left. \left| \pi/128 \cdot \delta^4 \right. \right\} = \\ &= 5,6 \cdot 10^{-4} K \left( K^2 - 4 - 10 \left( \ln \frac{K}{2} \right)^2 + 20 \ln \frac{K}{2} \right) (1 + K/2M)^{-2} \\ &= 3 \cdot 10^{-4} \delta^4. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

c) Drei Mesonen: Für die Erzeugung von drei Mesonen gibt es einen Graph erster Ordnung



da die Entwicklung des zweiten Terms in (1) eine Wechselwirkung

$$- \frac{f}{2M} \left( \frac{f}{M} \right)^2 \Phi^2 j_\alpha \partial^\alpha \Phi$$

bringt. Als statistischer Faktor ergibt sich analog wie bei  $w_2$   $(3!)^2/3! = 6$ , was insgesamt die Emissionswahrscheinlichkeit

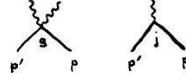
$$w_3^{\uparrow\downarrow} = 6 \left( \frac{f^3}{2M^3} \right)^2 (2\pi)^{-9} \int dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k_1^2 - 1) \delta(k_2^2 - 1) \times \left. \begin{aligned} &\times \delta(k_3^2 - 1) \frac{4M^2 (v k_1)^2}{E^2 (k_1^0 + k_2^0 + k_3^0)^2} = 6 \left( \frac{g^2}{4\pi} \right)^3 \frac{4M^2}{3E^2} \frac{2^4}{\pi^3} \times \\ &\times \int_3^K de e^{-2} \int_1^{e-2} dk_1^0 \mathbf{k}_1^3 \int_1^{e-k_1-1} dk_2^0 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$



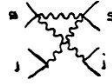
liefert. Die Auswertung ergibt, wenn wir mit  $\delta$  wieder die Energie über der Schwelle bezeichnen,

$$w_3^{\uparrow\downarrow} = 6 \left( \frac{g^2}{4\pi} \right)^3 \frac{16}{\pi^3} \frac{4/3}{1+K/2M} \left\{ \frac{K^6/36 \cdot 140}{(2\delta)^{11/2} \pi/11 \cdot 35 \cdot 81} \right\} = \left. \begin{aligned} &1,3 \cdot 10^{-7} K^6 (1+K/2M)^{-1} \\ &= 1,8 \cdot 10^{-6} \delta^{11/2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Beim Graph zweiter Ordnung



ist bei der Ermittlung des statistischen Faktors Sorgfalt anzuwenden, da die Austauschgraphen



für  $w_3$  wegen

$$\int d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 (p, k_1 + k_2) (vk_3) (p, k_2 + k_3) (vk_1) = 0$$

nicht beitragen. Beachtet man noch den Faktor  $1/n!$  in (4), dann bekommt man für den statistischen Faktor

$$\left( \frac{1}{2} \right) 3 \cdot 2 / 3! = 1/2.$$

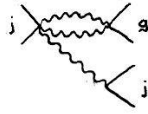
Somit ist der Beitrag zweiter Ordnung:

$$w_3^{\uparrow\downarrow} = \left. \begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( \frac{f^2}{2M} \right)^2 \left( \frac{f}{2M} \right)^2 (2\pi)^{-9} \left( \frac{4M^2}{E^2} \right)^2 \int dk_1 dk_2 dk_3 \delta(k_1^2 - 1) \times \\ &\times \delta(k_2^2 - 1) \delta(k_3^2 - 1) \frac{(v k_1)^2}{k_1^{02}} \frac{(p, k_2 + k_3)^2}{E^2 (k_2^{02} + k_3^{02})^4} = \frac{1}{2} \left( \frac{f^2}{4\pi} \right)^2 \times \\ &(2M)^{-2} \left( \frac{g^2}{4\pi} \right) \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 \frac{p^2 M^4}{\pi E^6} \int_3^K de \int_1^{e-1} dk_1^0 \mathbf{k}_1^3 \int_1^{e-k_1^0-1} dk_2^0 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \times \\ &\times \frac{k_2^{02} + (e - k_1^{02} - k_2^{02})^2 - 2}{k_1^{02} (e - k_1^0)^4} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Auswertung zeigt, dass der Beitrag zweiter Ordnung (18) kleiner ist als der Beitrag erster Ordnung (17). Für grosse  $K$  nimmt ersterer den Wert

$$w_3^{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2} \left( \frac{f^2}{4M} \right)^2 (2M)^{-2} \frac{g^2}{4\pi} \left( \frac{4}{3\pi} \right) \frac{2K^5}{2\pi 240 M (1+K/2M)^3} = \\ = 2,5 \cdot 10^{-7} K^5 (1+K/13)^{-3} \quad (19)$$

an. Wie im Anhang ausgerechnet, kann man die Übergangswahrscheinlichkeit dritter Ordnung vernachlässigen. Interferenzterme vom Typus



verschwinden wieder bei Integration über die Raumwinkel. Die Emissionswahrscheinlichkeiten für mehr als drei Mesonen sind bei den von uns betrachteten Energien sehr klein und sollen nicht berechnet werden.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Grösse der Emissionswahrscheinlichkeiten davon abhängt, ob

1. die Translations- oder die Spinfreiheitsgrade des Nukleons die Mesonerzeugung hervorrufen;
2. die starke Paarkopplung oder die Vektorkopplung im Spiel ist;
3. das Matricelement schon im ersten Glied der  $S$ -Matrix enthalten ist und die statistischen Faktoren entsprechend gross sind.

Im Resultat spielen alle drei Faktoren zusammen und es lässt sich nicht ohne Rechnung von vorneherein sagen, dass durch die starke Paarkopplung die Emission einer geraden Anzahl das Übergewicht hat.

### Diskussion.

Im vorigen Abschnitt haben wir die Emissionswahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Mesonen berechnet und dabei die Glieder niedrigster Ordnung von der Entwicklung (4) verwendet. Für eine Kopplung linear in dem quantisierten Feld ergibt sich durch Einbeziehung aller Terme höherer Ordnung gerade eine Poisson-Verteilung für die Multiplizität der Mesonen, wobei die relativen Wahrscheinlichkeiten bereits durch die Glieder niedrigster Ordnung gegeben sind, während die höheren Ordnungen nur einen gemeinsamen Faktor ergeben, der die Gesamtwahrscheinlichkeit auf 1 normiert. Bei unseren komplizierteren Kopplungsverhältnissen ist dies nicht mehr der Fall, sondern die Terme höherer Ordnung sowie die Beschränkung der Mesonenergie unterdrücken die grösseren Multiplizitäten. Solange die  $w$ 's aber klein gegen 1 sind, macht dies nicht viel aus, wir können uns mit den bisherigen Ergebnissen begnügen.

Es wurde kürzlich hervorgehoben (Br 1953), dass bei Verwendung eines quantisierten Nukleonfeldes die nächsten Näherungen eine Schwächung der Paarkopplung bewirken. Da dieses Resultat jedoch auf einer Störungsrechnung beruht, bei der die Auswirkung der weiteren Näherungen nicht diskutiert wird, ist dem zunächst keine

Bedeutung beizumessen. Falls sich experimentell bewahrheitet, dass eine Paarerzeugung von Mesonen begünstigt ist, dann tritt in Wirklichkeit eine solche Schwächung sicher nicht ein.

In Fig. 1 haben wir  $w$  als Funktion von  $K$  eingezeichnet. Der Verlauf der Kurven zeigt deutlich die Bevorzugung der Paarerzeugung.

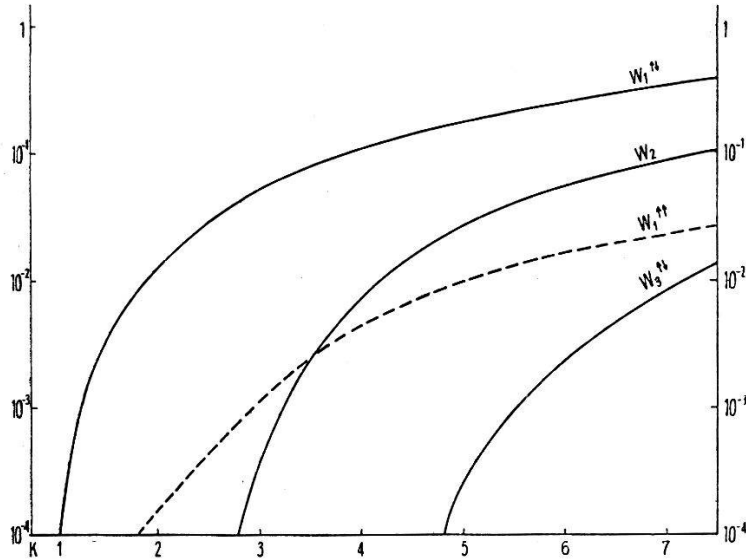


Fig. 1.

Emissionswahrscheinlichkeiten als Funktion von  $K$ .

Zum Vergleich mit dem Experiment fehlen noch die Wahrscheinlichkeiten für Spinumklappen sowie für einen bestimmten Impulsumsatz  $\Delta$  beim Stoss. Im Prinzip liesse sich dies natürlich feldtheoretisch berechnen, da bei zwei gekoppelten quantisierten Feldern bei grosser Kopplungskonstante die Entwicklung (4) weder eine konvergente noch eine semikonvergente Reihe liefert, scheint es zur Zeit aussichtslos, auch nur qualitative Antworten aus der Theorie herauszuholen. In unserer Methode haben wir diese Schwierigkeit umgangen und wir müssen nun über den Stossquerschnitt  $\sigma(\Delta)$  für bestimmtes  $\Delta$  irgendwelche Annahmen treffen. Glücklicherweise gehen die Kurven für  $w_1$  und  $w_2$  in dem uns interessierenden Gebiet  $4 < K < 8$ , das 2 GeV im Laborsystem entspricht, ziemlich konform, so dass für das Verhältnis

$$\int d\Delta \sigma(\Delta) w_1(\Delta) / \int d\Delta \sigma(\Delta) w_2(\Delta)$$

die genaue Gestalt von  $\sigma(\Delta)$  nicht sehr wesentlich ist. Nimmt man für die Wahrscheinlichkeit für Spinumklappen etwas zwischen  $1/4$  und  $3/4$  an, dann stehen die Erzeugungsquerschnitte für 1, 2 und 3 Mesonen etwa im Verhältnis  $1:1/2:1/100$ . Zur Winkelverteilung

bei der Paarerzeugung sei noch bemerkt, dass kleine Winkel zwischen den Mesonen begünstigt sind.

Abschliessend kann man sagen, dass die Hoffnung besteht, rohe Züge der Theorie in der Natur wiederzufinden, wenn auch beim gegenwärtigen Stand der Mesontheorie eine quantitative Berechnung der Mesonerzeugung nicht möglich ist. Zusatz bei der Korrektur: Experimente mit dem Cosmotron haben ergeben, dass bei einer Nukleonenergie von 2 GeV die Paarerzeugung von Mesonen die Einfacherzeugung bereits überwiegt. Dieses Resultat widerspricht der hier gegebenen Rechnung mit pseudoskalarer Kopplung, liesse sich jedoch durch eine Spin- oder Isotopenspin-Abhängigkeit des Paarterms reproduzieren. Eine Isotopenspin-Abhängigkeit des Paarterms wird auch durch niederenergetische Mesonstreuung nahegelegt. Möglicherweise sind aber bei hohen Energien die Verhältnisse so kompliziert, dass sie sich nicht durch einen einfachen feldtheoretischen Kopplungsansatz beschreiben lassen.

#### ANHANG.

Einschliesslich der statistischen Faktoren gibt die rein pseudovektorielle Kopplung für die Emissionswahrscheinlichkeit von  $n$  Mesonen

$$w_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{f}{2M} \right)^{2n} (2\pi)^{-3n} \int dk_1 \dots dk_n \delta(k_1^2 - 1) \dots \delta(k_n^2 - 1) \times \left. \begin{aligned} &\times (j_1 k_1)^2 \dots (j_n k_n)^2 = \frac{1}{n!} \left( \frac{g}{2\pi} \right)^{2n} \left( \frac{4M^2}{3E^2} \right)^n \int_{\Sigma k_i^0 < K} dk_1^0 \dots \\ &\dots dn_n^0 \frac{k_1^3}{k_1^{02}} \dots \frac{k_n^3}{k_n^{02}} = \frac{1}{n!} \left( \frac{g^2}{4\pi} \frac{4}{3\pi(1 + K/2M)} \right)^n \times \\ &\times \int_n^K de \int_1^e dk_1^0 \frac{k_1^3}{k_1^{02}} \dots \int_1^e dk_n^0 \frac{k_n^3}{k_n^{02}} \delta(e - \Sigma k_i^0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 1)$$

Für grosse Energien,  $K \gg n$ ,  $\mathbf{k} \sim k^0$ , kann man das Integral (A 1) unter Einführung der Fourier-Darstellung der  $\delta$ -Funktion und mit komplexer Integration streng berechnen:

$$\int_0^1 dx_1 x_1 \dots \int_0^1 dx_n x_n \delta(1 - x_1 \dots - x_n) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty - i\lambda}^{\infty - i\lambda} d\alpha e^{i\alpha} \times$$

$$\left( \int_0^\infty dx x e^{-i\alpha x} \right)^n = \frac{(-)^n}{2\pi} \int_{-\infty - i\lambda}^{\infty - i\lambda} d\alpha e^{i\alpha} \alpha^{-2n} = \frac{1}{(2n-1)!}. \quad (\text{A } 2)$$

Damit erhalten wir für hohe Energien

$$w_n = \frac{K^2 n}{n! (2n)!} \left( \frac{g^2}{4\pi} \frac{4}{3\pi(1+K/2M)} \right)^n. \quad (\text{A } 3)$$

Durch die Beschränkung der Mesonenergie wird die Poisson-Verteilung der Mesonen zerstört (Le 1948). Insbesondere für  $n = 2$  ergibt sich für grosse und kleine Energien

$$w_2 = \begin{cases} \frac{K^4}{48} \left( \frac{g^2}{4\pi} \frac{4}{3\pi(1+K^2/2M^2)} \right)^2 \left( 1 - \frac{36}{K^2} \ln K + \frac{48}{K^2} \right) \sim w_1^3/12 \\ \left( \frac{g^2}{4\pi} \frac{4}{3\pi} \right)^2 \frac{\delta^5 3\pi}{160} \sim w_1^2/20. \end{cases}$$

### Literatur.

- Be 1953 BETHE, Phys. Rev. **90**, 994.  
 Br 1953 BRÜCKNER, GELL-MANN, GOLDBERGER, Phys. Rev. **90**, 476.  
 Cl 1948 CLEMENTEL, DALLAPORTA, Nouv. Cim. **5**, 235, 298.  
 Dr 1952 DRELL, HENLEY, Phys. Rev. **89**, 1053.  
 Dr 1953 DRELL, LAWSON, Phys. Rev. **90**, 326.  
 Fo 1951 FOLDY, Phys. Rev. **84**, 168.  
 Gl 1951 GLAUBER, Phys. Rev. **84**, 395.  
 Gu 1953 GUNN, Adv. in Phys. **2**, 6, 213.  
 Le 1948 LEWIS, OPPENHEIMER, WOUTHUYSEN, Phys. Rev. **73**, 127.  
 Le 1952 LEWIS, Rev. Mod. Phys. **24**, 245.  
 Le 1952a LEVY, Phys. Rev. **88**, 725.  
 Le 1952b LEPORE, Phys. Rev. **87**, 209.  
 Ma 1951 MACHIDA, ONUMA, TAKETANI, Prog. Th. Phys. **6**, 904.  
 Ru 1953 RUDERMAN, Phys. Rev. **90**, 185.  
 Ta 1951 TAKETANI, MACHIDA, ONUMA, Prog. Th. Phys. **6**, 638.  
 Th 1951 THIRRING, TOUSCHEK, Phil. Mag. **42**, 244.  
 Um 1952 UMEZAWA, TAKAHASHI, KAMEFUCHI, Phys. Rev. **85**, 505.  
 We 1952 WENTZEL, Phys. Rev. **86**, 803.