

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 26 (1953)  
**Heft:** III-IV

**Artikel:** Renormalisation dans les séries divergentes  
**Autor:** Petermann, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112416>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Renormalisation dans les séries divergentes

par A. Petermann

Institut de Physique. Université de Genève, Suisse.

(15. IV. 53).

*Summary.* Subtraction procedure is applied to divergent series arising from perturbation expansions of purely scalar field theories. It is first shown that mass renormalization cannot give rise to a conditionally convergent series for all values of external momenta. Further, the charge renormalization is discussed, leading again to a generally divergent series; however, some ambiguities remain in the definition of parts which are to be considered as charge renormalization terms, and thus this subtraction procedure loses his well-definite character.

Tout récemment, plusieurs travaux simultanés ont eu pour objet de démontrer la divergence des développements en série que l'on rencontre, en calculant par la méthode de perturbation, les grandeurs physiques relatives à des problèmes de collision. Les travaux de HURST<sup>1)</sup> et de l'auteur<sup>2)\*</sup>), quoique par des méthodes essentiellement différentes, ont mené à bien cette démonstration sans toutefois distinguer l'effet que pourrait avoir, sur la convergence, les procédés de soustraction destinés à éliminer les effets de masse et de charge. L'éventualité se présentait, en effet, que de telles sous-tractions aient pour effet de rendre les séries conditionnellement convergentes en détruisant l'unicité de signe qui était à la base de ces démonstrations. THIRRING<sup>3)</sup>, dans sa propre preuve, a résolu ce problème pour une jauge particulière de renormalisation, ce qui ne permet pas de lever cette éventualité. Il était donc nécessaire de discuter plus à fond ce problème et c'est le but que nous nous proposons d'atteindre dans ces pages.

Retenant les notations employées dans I, nous en résumerons pour débuter les résultats essentiels en spécifiant explicitement toutefois tout nouveau symbole qui pourrait être introduit.

Utilisant la densité Lagrangienne d'interaction :

$$L = g u^3 \quad (1)$$

---

\* ) Par la suite désigné par I.

couplant le champ  $u$ , nous assignons à ce dernier de satisfaire l'équation

$$(\square - \varkappa^2) u = 0. \quad (2)$$

La fonction de propagation de ce champ admet alors la représentation de FOURIER suivante :

$$D_\varkappa(x) = \frac{-2i}{(2\pi)^4} \int e^{i(k \cdot x)} \frac{(dk)}{k^2 + \varkappa^2}. \quad (3)$$

Dès lors, les intégrales correspondant aux diagrammes de  $2n^{\text{ie}}$  ordre, irréductibles en terme de self-énergies de plus bas ordres, sont du type

$$\begin{aligned} J_{n;2\dots n} &= i (2\pi)^4 \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^n (n-2)! \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \int_0^1 dv_2 \dots \\ &\quad \int_0^1 dv_n \int_0^1 dw_2 \dots \int_0^1 dw_n \cdot K_{n;2\dots n}. \\ K_{n;2\dots n} &= x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1} \cdot v_2^{n-2} \dots v_n^{n-2} \cdot w_2^{n-1} \dots w_n^{n-1} \cdot G_{n;2\dots n}. \\ G_{n;2\dots n} &= [(1 - v_2 w_2 (1 - a_{(0)22})) \dots (1 - v_n w_n (1 - a_{(n-2)n})))]^{-2} \times \\ &\quad \times (\varkappa^2 + p^2 a_{(n-1)1,1})^{-n+1}. \quad \alpha = \frac{g^2}{4\pi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Les  $a_{(k)m,m}$  sont donnés par récurrence selon :

$$\begin{aligned} a_{(0)m,m} &= x_{n-m+1} \dots x_n (1 - x_{n-m+1} \dots x_n) \quad m = 2 \dots n. \\ b_{(0)kl} &= \begin{cases} x_{n-k+1} \dots x_n (1 - x_{n-l+1} \dots x_n) & \text{si } k > l; \\ x_{n-l+1} \dots x_n (1 - x_{n-k+1} \dots x_n) & \text{si } l > k; \end{cases} \quad k = 2 \dots n. \\ a_{(k)m,m} &= \left[ 1 - v_k (1 - a_{(k-1)m,m}) - \frac{w_k (1 - v_k (1 - b_{(k-1)m,k+1}))^2}{1 - v_k w_k (1 - a_{(k-1)k+1,k+1})} \right] w_k; \\ b_{(k)l,m} &= \left[ 1 - v_k (1 - b_{(k-1)l,m}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{w_k (1 - v_k (1 - b_{(k-1)l,k+1})) (1 - v_k (1 - b_{(k-1)m,k+1}))}{1 - v_k w_k (1 - a_{(k-1)k+1,k+1})} \right] w_k. \end{aligned} \quad (5)$$

L'examen des  $G_{n;2\dots n}$  montre que toutes ces intégrales sont bornées supérieurement par

$$J_{n;2\dots n} \geq i C^n \quad (6)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $n$ .

Cependant, toutes ces expressions contiennent en particulier des termes de masse ; autrement dit ne s'annulent pas lorsque  $p^2 = -\varkappa^2$ . Outre des effets observables et des contributions à la charge, elles apportent une contribution qui n'a d'autre effet que de renormaliser la masse. La somme de ces contributions indésirables est donnée sous forme d'une série infinie en  $g^2$

$$\delta\varkappa = \sum_{n=1}^{\infty} r_{2n} g^{2n}, *) \quad (8)$$

dont les coefficients  $r_{2n}$  représentent les contributions de masse des intégrales du type (4) ainsi que de celles réductibles en terme de self-énergies de plus bas ordre. Pour ces dernières, il faut avoir soin de choisir les  $r_{2n}$  en tenant compte que les insertions ont déjà été privées de leur contribution de masse. Il est donc à remarquer que si  $\Sigma$  est défini par

$$\Sigma(p^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma_{2n}(p^2) g^{2n} \quad (9)$$

où  $\Sigma_{2n}(p^2)$  est la contribution totale non renormalisée de la  $2n^{\text{ie}}$  approximation pour la self-énergie,  $i\delta\varkappa \mp \Sigma(-\varkappa^2)$ .

Pour donner un aperçu de la détermination des coefficients  $r_{2n}$  en (8), l'examen des diagrammes relatifs aux plus basses approximations est intuitif (Fig. 1) :

Dans la colonne  $A$  figurent les diagrammes dont les expressions correspondantes  $\Sigma_{2n,j}(p^2)$  contiennent encore les termes de masse  $i r_{2n,j} = \Sigma_{2n,j}(-\varkappa^2)$ , représentés dans la colonne  $B$ . On comprend bien comment les  $r_{2n,j}$  sont déterminés en terme d'expressions dont les insertions ont déjà été dépouillées de leurs termes de masse (p. ex. 2<sup>e</sup> graphe, ordre 2; 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> graphes, ordre 3).

Ainsi définis, les coefficients  $r_{2n,j}$  ne sont pas nécessairement de même signe, comme on peut en particulier le voir pour  $r_{41}$  et  $r_{42}$  qui sont précisément de signe opposé. Par conséquent, la série (8) pour laquelle :

$$r_{2n} = \sum_{j=1}^{0(n!)} r_{2n,j} \quad (10)$$

n'est pas à priori divergente.

---

\*) La difficulté provenant du  $\Sigma_2$  infini n'a pas été examinée. Elle ne semble cependant pas essentielle car les conclusions de ce travail s'étendent intégralement au cas  $D_\varkappa(k) \sim (k^2 + \varkappa^2)^{-2}$  où elle n'apparaît pas.

Si elle converge conditionnellement,  $\delta\kappa$  est fini\*) et, en choisissant une masse mécanique  $\kappa^2$  telle que

$$\kappa^2 + \delta\kappa = \kappa_0^2, \quad (11)$$

masse observable pour laquelle on escompte des prévisions de la théorie (se reporter à <sup>4)</sup>), on peut suivre tous les raisonnements invoqués en I. Comme la série (9) diverge pour tout  $\kappa$  fini, la renormalisation de masse ne peut conduire à une convergence conditionnelle dans le cas où (8) converge.

| <i>Ordre<br/>en <math>g^2</math></i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
|--------------------------------------|----------|----------|
| <i>2</i>                             |          | $r_{21}$ |
|                                      |          | $r_{41}$ |
|                                      |          | $r_{42}$ |
|                                      | $\vdots$ | $\vdots$ |
| <i>3</i>                             |          | $r_{61}$ |
|                                      |          | $r_{62}$ |
|                                      |          | $r_{63}$ |
|                                      |          | $r_{64}$ |
|                                      | $\vdots$ | $\vdots$ |

Fig. 1.

Diagrammes des basses approximations et leurs termes de masse  $r_{2n,j}$  correspondants.

Si, par contre (8) diverge\*\*), le raisonnement ci-dessus ne peut plus être suivi et pour voir que la série des termes renormalisés diverge encore, il est nécessaire d'adoindre à la densité Lagrangienne d'interaction le terme

$$L_\kappa = -i u^2 \delta\kappa,$$

et de recourir à une analyse plus approfondie de la dépendance en  $p^2$  des termes successifs.

\*) Contient une constante arbitraire. Cf. <sup>5)</sup> et <sup>6)</sup>.

\*\*) Rayon de convergence  $g^2 = 0$ , sinon on pourrait trouver des  $g$  suffisamment petits pour que  $\delta\kappa$  devienne fini, rendant ainsi une convergence conditionnelle de (9) impossible.

Comme l'examen détaillé de certaines intégrales effectué en I l'a fait ressortir, le comportement asymptotique en  $n$  d'une expression du type

$$J_n; (p^2) = \int_0^1 dx \dots \frac{D_n(x \dots)}{(a_{(n-1)1,1}(x \dots) p^2 + \varkappa^2)^{n-1}} \quad (12)$$

où  $x \dots$  symbolise l'ensemble des paramètres de Feynman utilisés, est déterminé par la partie  $D_n(x \dots)$  de (12). Une borne inférieure de (12), de la forme  $C^n$ , a été obtenue en utilisant une formule de la moyenne pour une valeur simultanée des paramètres  $x \dots$  égale à  $1 - 1/n$ . Une borne supérieure du même type\*) montre que cette évaluation correspond bien à la valeur réelle de (12). Il devient dès lors possible, pour ces mêmes valeurs des paramètres, d'évaluer  $a_{(n-1)1,1}(x \dots)$  et de discuter quel type de fonction de  $p^2 J_n; (p^2)$  représente. On démontre tout d'abord la proposition suivante:

*Théorème:*  $a_{(n-1)1,1}(x \dots) \geq a = 0 (1/n)$ . De (5):

$$a_{(n-1)1,1} = \left[ v_{n-1} \Delta_{(n-2)1,k} + \frac{1 - v_{n-2} (1 - b_{(n-2)1,k})}{1 - v_{n-2} w_{n-2} (1 - a_{(n-2)k,k})} \times \right. \\ \left. \times (1 - w_{n-2} + v_{n-2} w_{n-2} \Delta_{(n-2)k,1}) \right] w_{n-2}$$

avec

$$\Delta_{(n-2)1,k} = a_{(n-2)1,1} - b_{(n-2)1,k}$$

$$\Delta_{(n-2)k,1} = a_{(n-2)k,k} - b_{(n-2)k,1}.$$

Les  $a_{(j)}, b_{(j)}$  ayant la propriété d'être compris entre 0 et  $\frac{1}{4}$ , et  $\Delta_{(n-1)1,k} \geq 0$ , il s'ensuit que

$$a_{(n-2)k,k} - \Delta_{(n-2)k,1} = b_{(n-2)1,k} \geq 0$$

et que

$$a_{(n-1)1,1} \geq \frac{1 - v_{n-2} (1 - (a_{(n-2)k,k} - \Delta_{(n-2)k,1}))}{1 - v_{n-2} w_{n-2} (1 - a_{(n-2)k,k})} \times \\ \times \left( \frac{1}{n} + v_{n-2} w_{n-2} \Delta_{(n-2)k,1} \right) w_{n-2} \\ \geq \frac{w_{n-2} (1 - v_{n-2})}{1 - v_{n-2} w_{n-2} (1 - \Delta_{(n-2)k,1})} \left( \frac{1}{n} + v_{n-2} w_{n-2} \Delta_{(n-2)k,1} \right),$$

---

\*) HURST, cf. 3).

car le minimum du terme fractionnaire est obtenu pour  $b_{(n-2)1,k} = 0$ . Dès lors on examine séparément les deux cas :

1<sup>o</sup>  $A_{(n-2)k,1} \leq d \leq 0(1/n)$ :

$$a_{(n-1)1,1} \geq 1/n \cdot n/3 \cdot 1/n = 0(1/n).$$

2<sup>o</sup>  $A_{(n-2)k,1} > 1/n$ :

$$\begin{aligned} a_{(n-1)1,1} &\geq 1/n \cdot (v_{n-2} w_{n-2} A_{(n-2)k,1})^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot (1/n + v_{n-2} w_{n-2} A_{(n-2)k,1}) \geq 1/n = 0(1/n). \end{aligned}$$

D'où, comme on l'avait annoncé,

$$a_{(n-1)1,1}(x\dots) \geq a = 0(1/n). \quad (13)$$

La dépendance de  $p^2$  de (12) est donc celle d'une fonction décroissant pour le moins comme  $(\varkappa^2)^{-n+1} (p^2/\varkappa^2 \cdot 1/n + 1)^{-n+1}$  lorsque  $p^2 > -\varkappa^2$  croît, ce qui permet d'écrire, dès que  $n$  est assez grand :

$$\frac{J_{n;j}(p^2)}{J_{n;j}(-\varkappa^2)} \leq e^{-\left(\frac{p^2}{\varkappa^2} + 1\right)}. \quad (14)$$

Les intégrales correspondant à des diagrammes réductibles en terme de self-énergies requièrent une discussion spéciale. Lorsqu'aucune renormalisation de masse n'a été effectuée sur les insertions, elles sont encore de la forme générale (12) dont l'examen vient d'être fait. Un théorème semblable à celui énoncé régit le comportement du cofacteur  $a_{(n-1)1,1}$  de  $p^2$ .

Les corrections de masse aux insertions sont des diagrammes contenant des points  $r_{2j}$  dans leurs lignes de propagation. Leur comportement en fonction de  $p^2$  fait montre d'une dépendance moins forte que celle relative aux diagrammes envisagés plus haut. Néanmoins, comme la structure des diagrammes contenant des points le montre, on peut en tous cas écrire, pour les intégrales  $J_{n;i}$  auxquelles ils mènent :

$$\frac{J_{n;i}(p^2)}{J_{n;i}(-\varkappa^2)} \leq K \frac{\varkappa^2}{p^2}, \quad (p^2 > \varkappa^2) * \quad (15)$$

où  $K$  est une constante positive.

\*) A un terme du type  $\log p^2$  près. Une inégalité beaucoup plus complexe permettrait d'étendre ces considérations à tout  $p^2 > -\varkappa^2$ . Nous n'entrerons néanmoins pas dans ces détails.

Dans le domaine des  $p^2$  positifs, on peut alors séparer les termes de chaque approximation qui fournissent une contribution positive à  $r_{2n}$  de ceux qui en fournissent une négative, et donner à  $r_{2n}$  la forme suivante :

$$r_{2n} = \sum_{i=1}^{0(n!)} r_{2n;i}^{\text{pos}} + \sum_{j=1}^{0(n!)} r_{2n;j}^{\text{nég}}. \quad (16)$$

Séparant semblablement les  $J_{n;i}^{\text{pos}}$ ,  $J_{n;j}^{\text{nég}}$ , on a, en tenant compte de (14) et (15) en tous cas :

$$0 \leq |J_{n;j}^i(p^2)| \leq K \frac{\kappa^2}{p^2} |J_{n;j}^i(-\kappa^2)| = K \frac{\kappa^2}{p^2} |r_{2n;j}^i| \quad (17)$$

et

$$\begin{aligned} J_{n;i}^{\text{pos}}(p^2) - r_{2n;i}^{\text{pos}} &\leq r_{2n;i}^{\text{pos}} \left( K \frac{\kappa^2}{p^2} - 1 \right) \\ J_{n;j}^{\text{nég}}(p^2) - r_{2n;j}^{\text{nég}} &\leq -r_{2n;j}^{\text{nég}}, \end{aligned} \quad (18)$$

et dès lors :

$$\begin{aligned} \Sigma_{2n}^*(p^2) &= \sum_i (J_{n;i}^{\text{pos}}(p^2) - r_{2n;i}^{\text{pos}}) + \sum_j (J_{n;j}^{\text{nég}}(p^2) - r_{2n;j}^{\text{nég}}) \leq \\ &\leq \sum_i r_{2n;i}^{\text{pos}} \left( K \frac{\kappa^2}{p^2} - 1 \right) - \sum_j r_{2n;j}^{\text{nég}}. \xrightarrow[p^2 \rightarrow \infty]{} -r_{2n}, \end{aligned} \quad (19)$$

terme général d'une série divergente.

Ainsi la série des self-énergies renormalisées :

$$\Sigma^*(p^2) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} \Sigma_{2n}^*(p^2) \quad (21)$$

diverge pour  $p^2 \rightarrow \infty$ .

Les termes  $\Sigma_{2n}^*(p^2)$  de (21) contiennent encore, à ce stade du calcul, des contributions à la charge. Autrement dit, on peut écrire (21) sous la forme :

$$\begin{aligned} \Sigma^*(p^2) &= g^2 \Sigma_2'^*(p^2) + g^4 (\Sigma_4'^*(p^2) + R'_2 \Sigma_2'^*(p^2)) + \\ &+ g^6 (\Sigma_6'^*(p^2) + 2 R'_2 \Sigma_4'^*(p^2) + R'_4 \Sigma_2'^*(p^2)) + g^8 (\Sigma_8'^*(p^2) + \\ &+ 3 R'_2 \Sigma_6'^*(p^2) + (R'^2_2 + 2 R'_4) \Sigma_4'^*(p^2) + R'_6 \Sigma_2'^*(p^2)) + \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

(21) correspondant au cas où  $\Sigma_2'^* = \Sigma_{2n}^*$  et, par là,  $R'_2 = 0$ . Cependant, le développement (21) est univoquement déterminé par le calcul de perturbation, ce qui implique que les cofacteurs des  $g^{2n}$

dans (22) sont invariants par rapport aux transformations de la «jauge de renormalisation» telles que:

$$R'_{2n} \rightarrow R''_{2n}; \quad \sum'^*_2 \rightarrow \sum''^*_2.$$

Comme THELLUNG<sup>7)</sup> l'a montré, il n'est en général pas possible d'opter en faveur d'un des référentiels de renormalisation plutôt que d'un autre en invoquant des raisons physiques. Exception doit être faite de l'électrodynamique pour laquelle des circonstances spéciales (masse nulle du photon, observabilité de  $e^2/4\pi$ ) interviennent.

Puisque dans le modèle de théorie envisagé ici, aucun terme de (21) ne présente de difficulté ultraviolette, on peut donc sans inconvénient et sans restreindre la généralité adopter comme système de renormalisation  $R'_{2n} = 0$  et constater que (21) diverge pour toute valeur de  $g^2 \neq 0$ .

Pour terminer, il nous semble indispensable de signaler que la renormalisation de charge, sous l'angle que nous avons choisi pour l'examiner, perd son caractère défini du fait de la nature divergente des séries telles que (21). En effet, effectuant le changement de jauge de renormalisation suivant

$$(R'_{2n} = 0) \rightarrow (R'_{2n} = R'_{2n}) \quad (23)$$

(22) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Sigma^*(p^2) &= \sum'^*_2(p^2) g^2 [1 + g^2 R'_2 + g^4 R'_4 + \dots] \\ &\quad + \sum'^*_4(p^2) g^4 [1 + g^2 2 R'_2 + g^4 (R'^2_2 + 2 R'_4) + \dots] \\ &\quad + \sum'^*_6(p^2) g^6 [1 + g^2 3 R'_2 + \dots] + \dots \\ &= \sum'^*_2(p^2) g_r^2 + \sum'^*_4(p^2) g_r^4 + \sum'^*_6(p^2) g_r^6 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

si

$$g_r^2 = g^2 (1 + g^2 R'_2 + g^4 R'_4 + \dots), \quad (25)$$

en changeant convenablement l'ordre des termes. Tant que l'on considère des séries convergentes, il est clair que le changement (23) permet de retrouver le résultat  $\Sigma^*(p^2)$  en choisissant la constante de couplage selon (25), peu important l'ordre dans lequel les termes sont sommés. Lorsque l'on est en présence d'une série divergente telle que (21), on n'est plus sûr que les transformations combinées (23), (25) conduisent encore au même résultat. Car par résultat il faut préciser ce que l'on veut dire : le seul intérêt que présentent les séries divergentes de la théorie de perturbation réside dans la somme d'un certain nombre de leurs premiers termes et il est facile

de voir que les bouleversements de l'ordre des termes tels qu'ils résultent du calcul (24) ne conduisent plus à des résultats univoques pour toute jauge de renormalisation. Et même s'il est possible pour  $\Sigma^*(p^2)$  de trouver une jauge telle que les premiers termes soient en accord avec l'observation, il n'en est généralement plus de même pour une autre grandeur  $M(p, q, r)$  par exemple en utilisant la même jauge.

Nous tenons à remercier MM. les Professeurs L. ROSENFELD et M. FIERZ pour leurs communications privées qui nous ont été très précieuses.

### Bibliographie.

- <sup>1)</sup> C. A. HURST, Proc. Cambridge. Phil. Soc. **48**, 625 (1952).
- <sup>2)</sup> A. PETERMANN, Archives des Sciences **6**, 5 (1953); A. PETERMANN, Phys. Rev. **89**, 1160 (1953).
- <sup>3)</sup> W. THIRRING, Helv. Phys. Acta **26**, 33 (1953).
- <sup>4)</sup> S. KAMEFUCHI and H. UMEZAWA, Progr. Theor. Phys. **7**, 399 (1952).
- <sup>5)</sup> E. C. G. STUECKELBERG et T. A. GREEN, Helv. Phys. Acta **24**, 153 (1951).
- <sup>6)</sup> E. C. G. STUECKELBERG et A. PETERMANN, Helv. Phys. Acta **26** (1953) sous presse.
- <sup>7)</sup> A. THELLUNG, Helv. Phys. Acta **25**, 307 (1952).