

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	25 (1952)
<b>Heft:</b>	IV
<b>Artikel:</b>	Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal : calcul de la force de frottement
<b>Autor:</b>	Lambossy, Paul
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-112314">https://doi.org/10.5169/seals-112314</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement

par Paul Lambossy.

Institut de Physiologie de l'Université de Fribourg (Suisse).

(1. II. 1952.)

*Résumé.* Le mouvement que prend, sous l'action de forces données, un liquide visqueux dans un tube est connu dès qu'on connaît à chaque instant  $t$  la vitesse d'un filet de liquide situé à la distance  $r$  de l'axe, soit la fonction  $v(r, t)$ . La première partie de ce travail a pour objet d'établir cette fonction, dans la supposition que la pression appliquée est une fonction harmonique du temps.

Il résulte de la formule trouvée que la *forme du profil des vitesses* dépend, outre du temps, seulement de la quantité  $z$  définie par

$$z = R \sqrt{\frac{\varrho \omega}{\eta}}.$$

Le résultat le plus intéressant est que les filets de liquide voisins de la paroi ont une avance de phase sur les filets centraux.

La seconde partie du travail a pour objet d'établir une formule pour la *force de frottement*, c'est-à-dire pour la réaction de l'unité d'aire de la paroi sur la colonne de liquide. Cette formule

$$F = - \frac{\varrho R \omega}{2 \alpha} U - \frac{\varrho R}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \frac{dU}{dt}$$

dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions de  $z$ , et  $U$  la vitesse moyenne dans la section, est valable seulement pour le mouvement harmonique étudié.

## 1. Position du problème.

Le mouvement oscillatoire ou vibratoire longitudinal du fluide enfermé dans un tube pose un problème de mécanique qui intéresse à la fois le physicien et le physiologiste. Un tel mouvement s'observe en effet dans la propagation du son dans le gaz d'un tube rigide, et dans le fonctionnement du manomètre destiné à l'enregistrement des variations de la pression sanguine. C'est enfin le mécanisme du pouls, au moins approximativement, c'est-à-dire de la propagation d'une onde de pression dans le liquide d'un tube élastique.

\*

Toutes ces questions ont été considérées très tôt par les praticiens, vu l'urgence qu'elles présentaient pour eux, plus tardivement par les théoriciens<sup>1)</sup>. Comme la multiplicité des facteurs rend les phénomènes complexes, et qu'on ne peut demander que des solutions approchées, on a cherché à obtenir des résultats utiles sans trop compliquer la théorie et on a réussi en général. Cependant il est un facteur qui semble avoir résisté à ces tentatives : la viscosité du liquide. Ou bien on tient compte de la viscosité correctement et on accepte les calculs compliqués qu'elle exige, ou bien on laisse ce facteur de côté complètement.

Il y a peut-être un moyen terme.

Quand on applique l'équation de la dynamique à un cylindre de liquide de longueur  $l$  et dont le rayon  $R$  est égal au rayon intérieur du tube, il y a lieu de compter parmi les forces extérieures la composante longitudinale de la réaction de la paroi. On peut poser, pour cette force,

$$2\pi R l \cdot F,$$

$F$  est la *force de frottement par unité d'aire*. On pourra écrire l'équation de la dynamique dès qu'on possèdera une expression de  $F$ .

Dans le cas des *oscillations harmoniques* d'une masse de liquide dans un tube, l'expression de  $F$  est de la forme

$$F = -f_1 U - f_2, \frac{dU}{dt}, \quad (1)$$

où  $U$  est vitesse moyenne dans la section,  $f_1$  et  $f_2$  deux grandeurs qui dépendent des constantes du tube et du liquide, ainsi que de la fréquence. Le présent travail a pour but d'établir cette formule qui constitue le moyen terme dont nous venons de parler.

Car, bien qu'elle soit établie pour un tube rigide, elle peut, au moins approximativement, s'appliquer au mouvement harmonique dans un tube élastique. C'est ainsi que le problème des ondes, dont nous nous occuperons dans un prochain article, peut être résolu en modifiant l'égèrement un exposé classique qui ignorait la viscosité.

Nos recherches ont été inspirées par une formule semblable à (1) établie par RAYLEIGH<sup>2)</sup>, et valable pour une plaque oscillant parallèlement à une droite de son plan, et placée dans un liquide visqueux illimité.

## 2. Mouvement du liquide.

Le mouvement laminaire d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube cylindrique, rigide et horizontal, se fait par couches coaxiales, chacune d'elles ayant sa vitesse propre. Comme nous négligeons la pression hydrostatique, la pression est la même en tout point d'une même section.

En appliquant la loi de la dynamique à la masse de liquide comprise entre deux surfaces cylindriques de rayons  $r$  et  $r + dr$ , de longueur  $l$ , on obtient l'équation différentielle suivante, à laquelle obéit  $v = v(r, t)$ , la vitesse du liquide,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{p_1 - p_0}{\eta l} = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2)$$

$\varrho$  densité,  $\eta$  coefficient de viscosité,  $p_1 - p_0$  différence de pression entre les extrémités de la colonne de liquide.

Supposons maintenant qu'on entretienne artificiellement entre les deux extrémités une différence de pression variant dans le temps suivant la loi sinusoïdale, et posons

$$\frac{p_1 - p_0}{\varrho l} = A \cos \omega t; \quad (3)$$

l'équation différentielle deviendra

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\varrho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (4)$$

La fonction  $v(r, t)$  cherchée doit être telle que la condition aux limites

$$v(R, t) = 0, \text{ quel que soit } t, \quad (5)$$

soit satisfaite. Il n'y a pas de condition initiale, si nous étudions l'état de régime, une fois que l'état transitoire est passé.

En posant

$$v(r, t) = u(r, t) + \frac{A}{\omega} \sin \omega t \quad (6)$$

l'équation (4) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (7)$$

et la condition aux limites

$$u(R, t) = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t, \quad \text{quel que soit } t. \quad (8)$$

Enfin, si on introduit la variable  $\tau$  proportionnelle à  $t$ ,

$$\tau = \frac{\eta t}{\varrho} \quad (9)$$

on aura *l'équation différentielle du mouvement*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (10)$$

En cherchant une solution particulière de (10) qui soit de la forme

$$u = \Phi(r) e^{-i\lambda\tau}, \quad (\lambda \text{ réel, positif})$$

on obtient pour  $\Phi(r)$  la condition

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + i\lambda \Phi = 0.$$

C'est une équation de BESSEL d'ordre zéro. En désignant par  $J_0(x)$  la solution de première espèce, qui est finie pour  $x = 0$ , de l'équation

$$J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) = 0,$$

on a

$$\Phi(r) = J_0(r \sqrt{\lambda i})$$

et par suite

$$u = J_0(r \sqrt{\lambda i}) e^{-i\lambda\tau}.$$

Afin d'avoir une solution plus générale, multiplions par une constante complexe  $K$  quelconque, et prenons la partie réelle de l'expression obtenue

$$u = \mathbf{R}\mathbf{e}[K J_0(r \sqrt{\lambda i}) e^{-i\lambda\tau}]. \quad (11)$$

En remplaçant  $\tau = \eta t/\varrho$  d'après (9) et utilisant la condition aux limites (8), on obtient l'équation

$$\mathbf{R}\mathbf{e}\left[K J_0(R \sqrt{\lambda i}) \left(\cos \frac{\lambda \eta}{\varrho} t - i \sin \frac{\lambda \eta}{\varrho} t\right)\right] = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t. \quad (12)$$

Elle détermine tout d'abord  $\lambda$ , puisqu'on doit avoir

$$\frac{\lambda \eta}{\varrho} = \omega, \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{\varrho \omega}{\eta}. \quad (13)$$

Nous introduisons la grandeur  $z$  définie par

$$z = R \sqrt{\frac{\varrho \omega}{\eta}}, \quad (14)$$

de sorte que (12) pourra s'écrire

$$\mathbf{R}\mathbf{e}[K J_0(z \sqrt{i}) (\cos \omega t - i \sin \omega t)] = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t.$$

En faisant successivement  $\omega t = 0$  et  $\omega t = \pi/2$  dans cette identité en  $t$ , on obtient les équations

$$\mathbf{R}\mathbf{e}[K J_0(z \sqrt{i})] = 0$$

$$\mathbf{R}\mathbf{e}[i K J_0(z \sqrt{i})] = \frac{A}{\omega}$$

qui peuvent être cumulées en une seule, savoir

$$i K J_0(z \sqrt{i}) = \frac{A}{\omega}.$$

Cette dernière donnera deux équations réelles si on fait  $K = B - iC$  et si on écrit symboliquement

$$J_0(z \sqrt{i}) = \mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z \sqrt{i}) + i \mathbf{J}\mathbf{m} J_0(z \sqrt{i}). \quad (15)$$

On a donc, pour déterminer les constantes  $B$  et  $C$ , les deux équations

$$\begin{aligned} C \cdot \mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z \sqrt{i}) - B \cdot \mathbf{J}\mathbf{m} J_0(z \sqrt{i}) &= \frac{A}{\omega}, \\ C \cdot \mathbf{J}\mathbf{m} J_0(z \sqrt{i}) + B \cdot \mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z \sqrt{i}) &= 0. \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} B &= -\frac{A}{\omega} \frac{\mathbf{J}\mathbf{m} J_0(z \sqrt{i})}{[\mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{J}\mathbf{m} J_0(z \sqrt{i})]^2}, \\ C &= \frac{A}{\omega} \frac{\mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z \sqrt{i})}{[\mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{J}\mathbf{m} J_0(z \sqrt{i})]^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

La fonction  $u(r, t)$  est donnée par (11) en remplaçant  $K = B - iC$ , en utilisant (13) et (14), et faisant usage de la décomposition (15); donc en prenant la partie réelle de l'expression

$$(B - iC) \left[ \mathbf{R}\mathbf{e} J_0 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) + i \mathbf{J}\mathbf{m} J_0 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right] (\cos \omega t - i \sin \omega t).$$

Enfin  $v(r, t)$  s'obtient, d'après (6), en ajoutant  $A/\omega \sin \omega t$ . Nous avons ainsi, pour la *vitesse*, la formule

$$\begin{aligned} v(r, t) &= \frac{A}{\omega} \sin \omega t \\ &+ \cos \omega t \left[ B \cdot \mathbf{R}\mathbf{e} J_0 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) + C \cdot \mathbf{J}\mathbf{m} J_0 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right] \\ &+ \sin \omega t \left[ B \cdot \mathbf{J}\mathbf{m} J_0 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) - C \cdot \mathbf{R}\mathbf{e} J_0 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Nous rappelons que  $B$  et  $C$  sont donnés par les formules (16). Les nouvelles fonctions introduites au moyen des symboles  $\mathbf{R}\mathbf{e}$  et  $\mathbf{J}\mathbf{m}$  sont aisément maniables, comme on le verra, d'autant plus qu'il existe des tables pour leurs valeurs numériques.

### 3. Profil des vitesses dans le tube.

A un instant donné  $t$ , la vitesse  $v$  devient une fonction de  $r$  seul, et la représentation graphique de cette fonction dans l'intervalle  $-R \leq r \leq R$  donne le *profil des vitesses* à cet instant. Ce profil varie au cours d'une période.

De quoi dépend la *forme* de ce profil ?

Si nous laissons le facteur de proportionnalité  $A/\omega$ , qui est sans importance dans ce qui nous occupe, nous ne voyons figurer dans  $v(r, t)$ , à part les variables  $\omega t$  et  $r/R$ , que le paramètre  $z$ . Ainsi la forme du profil dépend, outre du temps, seulement de la quantité

$$z = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}}.$$

Pour étudier toutes les formes possibles du profil, il suffit de faire varier  $z$  de zéro à l'infini.

Les calculs sont rendus plus simples lorsque  $z$  prend certaines valeurs déterminées ; ce sont celles pour lesquelles l'une ou l'autre

des deux expressions  $\mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z\sqrt{i})$  et  $\mathbf{Jm} J_0(z\sqrt{i})$  s'annule; car dans le premier cas on a  $C = 0$ , et dans le second,  $B = 0$ . Mais ce n'est pas à dire que les formes de profil correspondantes soient plus remarquables que les autres.

Prenons le premier de ces deux cas; alors  $C = 0$ , et  $z$  est une racine de l'équation  $\mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z\sqrt{i}) = 0$ . Les tables de JAHNKE-EMDE (2. Aufl. 1933) donnent aux pages 296—298 et 308 les valeurs des fonctions  $\mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z\sqrt{i})$  et  $\mathbf{Jm} J_0(z\sqrt{i})$  pour  $z$  réel. Il suffit de relever les valeurs de  $z$  pour lesquelles  $\mathbf{R}\mathbf{e} J_0(z\sqrt{i}) = 0$ . On en trouve deux; ce sont

$$z_1 = 2,849, \quad z_2 = 7,237. \quad (18)$$

*Premier exemple.* La première de ces racines, soit  $z_1$ , implique que les constantes du tube, du liquide, et la fréquence sont telles que

$$R \sqrt{\frac{\varrho \omega}{\eta}} = 2,849.$$

On aurait ce cas en prenant  $T = 2$  sec;  $\omega = 2\pi/T = 3,14$ ;  $\varrho = 1,18$  (glycérine);  $\eta = 0,27$ ;  $R = 0,77$  cm. Comme on le voit, ce cas est très ordinaire parmi ceux qui peuvent se présenter.

La constante  $B$ , d'après (16), aura pour valeur

$$B = -\frac{A}{\omega} \frac{1}{\mathbf{Jm} J_0(z_1\sqrt{i})}.$$

La table donne, pour  $z_1 = 2,849$ ,  $\mathbf{Jm} J_0(z_1\sqrt{i}) = -1,80$ . Donc

$$B = \frac{A}{1,8 \omega}.$$

La vitesse, d'après (17) et puisque  $C = 0$ , sera donnée par l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1,8 \omega}{A} v(r, t) &= \left[ 1,8 + \mathbf{Jm} J_0 \left( \frac{r z_1}{R} \sqrt{i} \right) \right] \sin \omega t \\ &+ \mathbf{R}\mathbf{e} J_0 \left( \frac{r z_1}{R} \sqrt{i} \right) \cdot \cos \omega t. \end{aligned}$$

Il suffira, pour avoir un profil des vitesses, de calculer le second membre pour diverses valeurs du rapport  $r/R$ , après avoir choisi une valeur de  $\omega t$ . Pour ce calcul on utilise de nouveau les tables mentionnées.

La dernière colonne de ce tableau donne, pour différentes distances de l'axe du tube, des nombres proportionnels à la vitesse du liquide, qui permettent de construire le profil des vitesses pour l'instant de la période correspondant à la phase de  $30^\circ$ . On se procure

Tableau I.

Profil des vitesses pour  $\omega t = \pi/6$ .

$$z_1 = 2,849, \sin \omega t = 0,5, \cos \omega t = 0,866.$$

$\frac{r}{R}$	$\frac{rz_1}{R}$	$\Re J_0\left(\frac{rz_1}{R}\sqrt{i}\right)$	$\Im J_0\left(\frac{rz_1}{R}\sqrt{i}\right)$	$\frac{1,8 \omega}{A} v$
0	0	1	0	1,766
0,1	0,2849	0,9999	-0,0203	1,756
0,2	0,5698	0,9984	-0,0812	1,723
0,3	0,8547	0,9917	-0,1825	1,666
0,4	1,1396	0,9736	-0,3237	1,581
0,5	1,4245	0,9358	-0,5036	1,458
0,6	1,7094	0,8671	-0,7197	1,290
0,7	1,9943	0,7545	-0,9671	1,069
0,8	2,2792	0,5833	-1,2381	0,786
0,9	2,5641	0,3373	-1,5211	0,430
1,0	2,8490	0	-1,7995	0

aisément d'autres tableaux pour les phases  $60^\circ, 90^\circ, \dots$  et l'on peut ainsi suivre les variations du profil au cours d'une période (fig. 1).

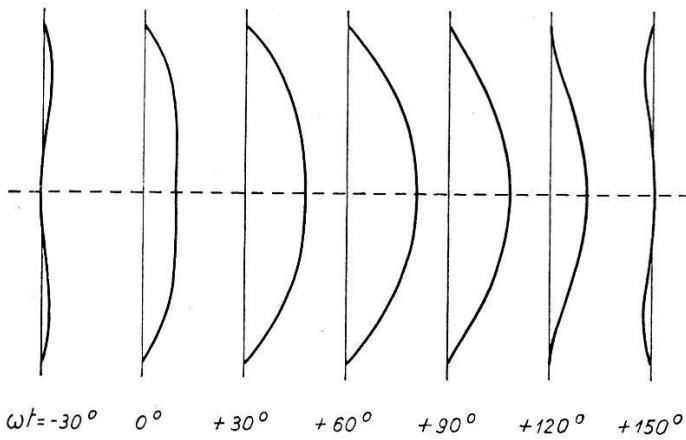


Fig. 1.

On remarquera que les filets de liquide voisins de la paroi ont par rapport à ceux qui sont voisins de l'axe une *avance de phase*, et c'est la raison pour laquelle le profil se modifie au cours de la période.

*Deuxième exemple.* La deuxième racine (18), soit  $z_2$ , implique que les constantes sont telles que

$$R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}} = 7,237.$$

Si l'on suppose le même tube et le même liquide, la fréquence doit être plus grande. Ce choix de  $z_2$  simplifie de nouveau les calculs puisque  $C = 0$ . La table donne pour  $z_2 = 7,237$ ,  $\mathbf{Jm} J_0(z_2 \sqrt{i}) = 25,05$ , de sorte que l'expression de la vitesse est

$$\begin{aligned} \frac{25,05 \omega}{A} v(r, t) &= \left[ 25,05 - \mathbf{Jm} J_0\left(\frac{r z_2}{R} \sqrt{i}\right) \right] \sin \omega t \\ &\quad - \mathbf{Re} J_0\left(\frac{r z_2}{R} \sqrt{i}\right) \cdot \cos \omega t. \end{aligned}$$

La fig. 2 donne le profil des vitesses au cours d'une demi-période.

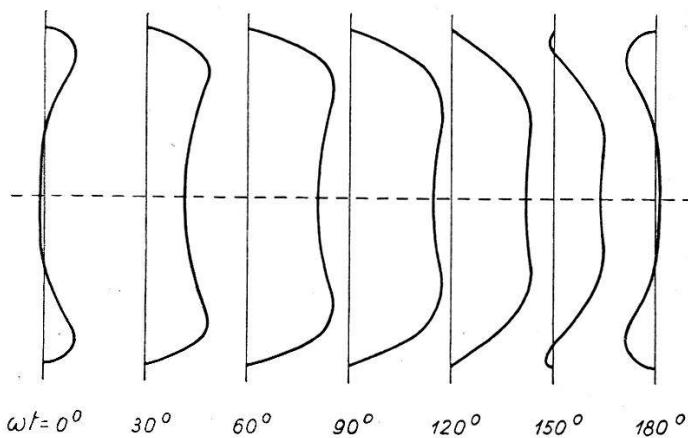


Fig. 2.

Ces exemples montrent que, dans le cas simple d'une pression sinusoïdale et dans les cas plus généraux, le profil des vitesses peut être une courbe compliquée. Il serait du plus haut intérêt de posséder des profils déterminés par voie expérimentale, car ils confirmeraient probablement les hypothèses qui servent de base à nos calculs. Mais, comme ces faits ont rarement retenu l'attention des physiciens et comme ces expériences sont difficiles, nous ne saurions citer des résultats expérimentaux correspondant exactement à la théorie exposée: Néanmoins nous présentons au lecteur, à titre d'illustration, des profils de vitesses déterminés par A. MÜLLER<sup>1)</sup> dans des conditions d'expérience que nous indiquons brièvement (fig. 3).

Une balle en caoutchouc pressait pendant un certain temps (systole) une certaine quantité de liquide (glycérine + eau) dans un

tube métallique de 1 cm de rayon et de 4 m de longueur, aboutissant à un réservoir. Puis on supprimait brusquement la pression à l'extérieur de la balle, ce qui avait pour effet d'établir une chute de pression négative le long du tube. La vitesse du liquide diminuait alors peu à peu jusqu'à une valeur nulle. Après ce temps (diastole), le phénomène recommençait et on obtenait ainsi un mouvement rythmique analogue à celui de la circulation du sang chez les animaux.

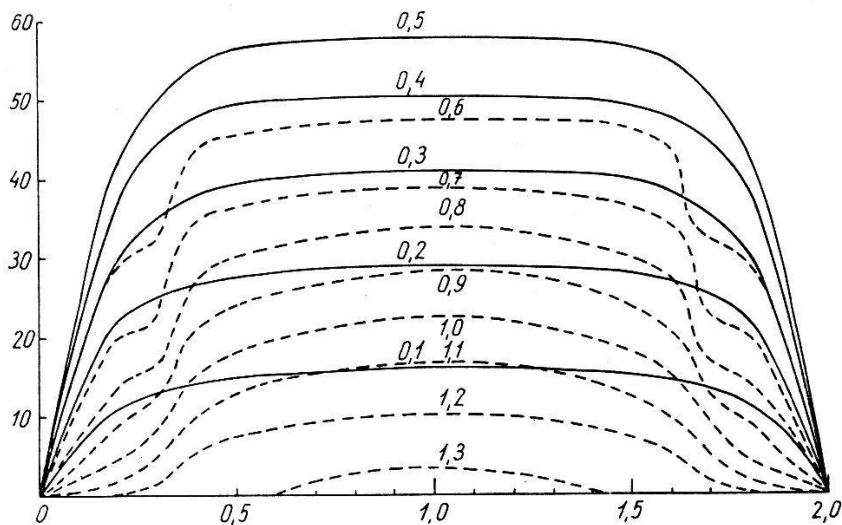


Fig. 3.

On reconnaît sur la fig. 3 l'avance de phase de la vitesse des couches extérieures et le profil aplati observé sur nos exemples. Toutefois nous ne pouvons suivre par le calcul ce phénomène, vu la forme compliquée de la courbe de la pression.

#### 4. Calcul de la force de frottement.

La force de frottement par unité d'aire qui s'exerce sur la surface latérale d'un cylindre de liquide de rayon  $r$  est donnée par  $\eta \frac{\partial v}{\partial r}$ . Au voisinage immédiat de la paroi elle est

$$F = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (19)$$

La dérivée de  $v(r, t)$  peut être calculée pourvu qu'on fasse usage de la propriété des fonctions de Bessel exprimée par l'équation

$$J'_0(x) = -J_1(x),$$

$J_1(x)$  est la fonction de Bessel d'ordre 1. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r} &= \cos \omega t \left[ -B \frac{z}{R} \mathbf{Re} \sqrt{i} J_1 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) - C \frac{z}{R} \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right] \\ &\quad + \sin \omega t \left[ -B \frac{z}{R} \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) + C \frac{z}{R} \mathbf{Re} \sqrt{i} J_1 \left( \frac{rz}{R} \sqrt{i} \right) \right].\end{aligned}$$

On fait  $r = R$ , puis on forme l'expression de  $F$  d'après (19) et on trouve

$$\begin{aligned}\frac{RF}{z\eta} &= -\cos \omega t [B \mathbf{Re} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) + C \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})] \\ &\quad - \sin \omega t [B \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) - C \mathbf{Re} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})].\end{aligned}$$

Enfin, après avoir remplacé  $B$  et  $C$  par leurs expressions (16) et tenu compte de  $z^2 = R^2 \varrho \omega / \eta$ , on obtient

$$\frac{2F}{\varrho R} = -p A \sin \omega t - q A \cos \omega t \quad (20)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{2}{z} \frac{\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) + \mathbf{Re} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{Re} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})}{[\mathbf{Re} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})]^2} \\ q &= -\frac{2}{z} \frac{\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{Re} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) - \mathbf{Re} J_0(z \sqrt{i}) \cdot \mathbf{Jm} \sqrt{i} J_1(z \sqrt{i})}{[\mathbf{Re} J_0(z \sqrt{i})]^2 + [\mathbf{Jm} J_0(z \sqrt{i})]^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Le calcul numérique montre que  $p$  et  $q$  sont toujours positifs. Nous aurions en (20) une expression de la force de frottement; mais elle n'est pas définitive.

*Calcul de la vitesse moyenne.* La vitesse moyenne dans la section est définie par

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r, t) 2\pi r dr.$$

Au lieu de faire ce calcul direct, il est plus simple de partir de l'équation différentielle (4), qui peut s'écrire

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\varrho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

On forme l'opération de la moyenne sur chacun des termes:

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr + \frac{\varrho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\varrho}{\eta} \frac{dU}{dt}.$$

Le premier terme, d'après (19), devient  $2F/\eta R$ ; et cette équation peut s'écrire

$$\frac{2F}{\eta R} + \frac{\varrho}{\eta} A \cos \omega t = \frac{\varrho}{\eta} \frac{dU}{dt},$$

ou encore

$$\frac{dU}{dt} = \frac{2F}{\varrho R} + A \cos \omega t. \quad (22)$$

A l'aide de (20) cette équation peut s'écrire encore

$$\frac{dU}{dt} = -p A \sin \omega t + (1-q) A \cos \omega t.$$

On intègre, mais sans ajouter de constante arbitraire, car toutes les grandeurs sont des fonctions sinusoïdales du temps.

$$U = \frac{p}{\omega} A \cos \omega t + \frac{1-q}{\omega} A \sin \omega t. \quad (23)$$

Telle est l'expression de la *vitesse moyenne*. Les trois équations (20), (22) et (23) permettent l'élimination de  $A \cos \omega t$  et  $A \sin \omega t$ . On obtient

$$\left( \frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right) \frac{2F}{\varrho R} = -\frac{\omega}{1-q} U - \left( \frac{q}{p} - \frac{p}{1-q} \right) \frac{dU}{dt}.$$

Cette équation peut s'écrire aussi

$$(1-q) \left( \frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right) \frac{2F}{\varrho R} = -\omega U - \left[ \frac{1-q}{p} - (1-q) \left( \frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right) \right] \frac{dU}{dt}.$$

Introduisons les constantes  $\gamma$  et  $\beta$  définies par

$$\alpha = (1-q) \left( \frac{1-q}{p} + \frac{p}{1-q} \right), \quad \beta = \frac{1-q}{p}, \quad (24)$$

Alors la *formule définitive de la force de frottement* est

$$F = -\frac{\varrho R \omega}{2\alpha} U - \frac{\varrho R}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \frac{dU}{dt}. \quad (25)$$

Nous rappelons que  $\alpha$  et  $\beta$  qui figurent dans cette formule sont donnés par (24), et  $p$  et  $q$  par (21). Comme ces diverses grandeurs sont des fonctions de la seule variable  $z$ , on peut préparer des tables pour  $\alpha$  et  $\beta$ , grâce auxquelles l'emploi de la formule (25) est facilité. Les valeurs numériques de toutes les fonctions que l'on voit dans les expressions de  $p$  et  $q$ , et qui figurent avec les symboles **Ré** et **Jm** sont données jusqu'à  $z = 10$  dans les tables de JAHNKE-EMDE.

Tableau II.  
Valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  pour différents  $z$ .

$$z = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\eta}}.$$

$z$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$\alpha$	$\beta$
0	0	0	5,0	2,3647	2,9633
0,2	0,0050	0,0067	5,2	2,4940	3,1098
0,4	0,0200	0,0267	5,4	2,6249	3,2527
0,6	0,0450	0,0602	5,6	2,7577	3,4003
0,8	0,0800	0,1069	5,8	2,8875	3,5429
1,0	0,1250	0,1669	6,0	3,0218	3,6851
1,2	0,1797	0,2396	6,2	3,1510	3,8240
1,4	0,2442	0,3256	6,4	3,2869	3,9697
1,6	0,3183	0,4238	6,6	3,4214	4,1172
1,8	0,4014	0,5345	6,8	3,5563	4,2590
2,0	0,4933	0,6560	7,0	3,6912	4,4047
2,2	0,5932	0,7878	7,2	3,8260	4,5439
2,4	0,7007	0,9293	7,4	3,9620	4,6887
2,6	0,8145	1,0774	7,6	4,0983	4,8328
2,8	0,9339	1,2337	7,8	4,2338	4,9751
3,0	1,0577	1,3917	8,0	4,3710	5,1182
3,2	1,1848	1,5549	8,2	4,5065	5,2585
3,4	1,3132	1,7166	8,4	4,6443	5,4004
3,6	1,4442	1,8805	8,6	4,7815	5,5470
3,8	1,5758	2,0412	8,8	4,9188	5,6864
4,0	1,7071	2,1999	9,0	5,0561	5,8318
4,2	1,8381	2,3566	9,2	5,1960	5,9724
4,4	1,9702	2,5130	9,4	5,3311	6,1136
4,6	2,1012	2,6665	9,6	5,4687	6,2571
4,8	2,2323	2,8150	9,8	5,6077	6,4016
			10,0	5,7450	6,5433

### 5. Deux cas limites.

Ces deux cas sont  $z = 0$  et  $z = \infty$ . Occupons-nous d'abord du premier cas et demandons-nous sous quelles formes se présentent  $\alpha$  et  $\beta$ , qui figurent dans (25), pour de très petites valeurs de  $z$ . Il faut pour cela recourir aux formules de  $p$  et  $q$  (21) et utiliser les développements en série suivants :

$$J_0(z \sqrt{i}) = 1 - \frac{z^2}{4} i - \frac{z^4}{64} + \frac{z^6}{2304} i + \dots$$

$$\sqrt{i} J_1(z \sqrt{i}) = \frac{z}{2} i + \frac{z^3}{16} - \frac{z^5}{384} i - \dots$$

On en déduit les diverses fonctions qui figurent dans les formules (21), par exemple

$$\mathbf{Jm} J_0(z\sqrt{i}) = -\frac{z^2}{4} + \frac{z^6}{2304} - \dots$$

On retient les termes principaux de ces développements et on introduit les expressions trouvées pour  $p$  et  $q$  dans les formules (24) de  $\alpha$  et  $\beta$ . On obtient

$$\alpha = \frac{z^2}{8}, \quad \beta = \frac{z^2}{6},$$

ce qui signifie qu'on a les limites suivantes :

$$\lim_{z=0} \frac{z^2}{\alpha} = 8, \quad \lim_{z=0} \frac{z^2}{\beta} = 6, \quad \lim_{z=0} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3}. \quad (26)$$

Le cas  $z = \infty$  présente un peu plus de difficultés ; nous indiquerons brièvement la méthode à suivre sans entrer dans les détails du calcul.

Il faut partir de la formule asymptotique suivante pour  $J_0(x)$  ; elle est de plus en plus exacte à mesure que  $x$  est plus grand, et valable pour les valeurs réelles ou complexes de la variable<sup>4)</sup> :

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}}.$$

Comme  $J_1(x) = -J'_0(x)$ , on a également

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}},$$

seulement on pourra constater, en effectuant la dérivation, qu'on a fait usage des formules d'approximation. On ne s'étonnera donc pas que les formules qui seront données pour  $p$  et  $q$  se réduisent à un seul terme.

A l'aide de ces formules approchées on formera les expressions  $J_0(z\sqrt{i})$  et  $\sqrt{i} J_1(z\sqrt{i})$ . On transformera ensuite ces dernières à l'aide du calcul des imaginaires, et on séparera la partie réelle et la partie imaginaire, en ne retenant chaque fois que le terme principal. Ces résultats étant introduits dans les formules (21), celles-ci donneront

$$p = \frac{\sqrt{2}}{z}, \quad q = \frac{\sqrt{2}}{z}.$$

On obtiendra finalement, à l'aide de (24),

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{2}} - 2, \quad \beta = \frac{z}{\sqrt{2}} - 1. \quad (27)$$

Telles sont les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  qui correspondent aux grandes valeurs de  $z$ .

### 6. Mouvement périodique général.

Lorsque la pression appliquée varie suivant une loi périodique quelconque, l'équation différentielle à résoudre, au lieu de (4), a la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\varrho}{\eta} \sum A_i \sin (\omega_i t + \Phi_i) = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (28)$$

Les fréquences circulaires  $\omega_i$  sont les multiples de la fréquence fondamentale.

A chacun des termes de la série de FOURIER correspond une équation

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{\varrho}{\eta} A_i \sin (\omega_i t + \Phi_i) = \frac{\varrho}{\eta} \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

Nous avons une formule toute prête pour la solution  $v_i$  qui satisfait à la condition aux limites (5); c'est la formule (17), dans laquelle cependant il faudra déplacer l'origine du temps. Mais ce détail est sans importance, car l'expression de la force de frottement (25) ne dépend pas de cette origine; elle est

$$F_i = -\frac{\varrho R \omega_i}{2 \alpha_i} U_i - \frac{\varrho R}{2} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} - 1 \right) \frac{dU_i}{dt}.$$

La solution de l'équation (28) est

$$v = \sum v_i,$$

elle satisfait à la condition aux limites. Enfin, puisque

$$F = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sum \eta \frac{\partial v_i}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sum F_i,$$

on reconnaît que la *force de frottement* dans le cas général est donnée par la formule suivante que nous présentons sous forme développée

$$\begin{aligned} F = & -\frac{\varrho R \omega_1}{2 \alpha_1} U_1 - \frac{\varrho R}{2} \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1} - 1 \right) \frac{dU_1}{dt} \\ & - \frac{\varrho R \omega_2}{2 \alpha_2} U_2 - \frac{\varrho R}{2} \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} - 1 \right) \frac{dU_2}{dt} \quad (29) \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

On remarquera qu'elle n'est pas constituée par une somme de deux termes seulement, où figureraient la vitesse moyenne  $U$ .

Bien que la formule de la force de frottement présente déjà un intérêt pour elle-même, c'est surtout en vue de ses applications que nous l'avons établie. Le lecteur pourra, à ce sujet, consulter deux

études que nous venons d'achever. L'une concerne le passage d'une onde dans le fluide contenu dans un tube élastique, et paraîtra dans cette Revue. L'autre, qui intéresse plus particulièrement les physiologistes, concerne les manomètres destinés à l'enregistrement des variations de la pression sanguine; elle a paru dans les *Helvetica Physiologica Acta*.<sup>5)</sup>

#### Notes.

- 1) P. LAMBOSSY, Aperçu historique et critique sur le problème de la propagation des ondes dans un liquide compressible enfermé dans un tube élastique, *Helv. Physiol. Acta* **8**, 209—227 (1950) et **9**, 145—161 (1951).
  - 2) RAYLEIGH, Theorie des Schalles, deutsche Ausgabe von Fr. Neesen, Bd. II, p. 369—373 (1880).
  - 3) A. MÜLLER und P. LAMBOSSY, Über die bei rhythmischer Kontraktion eines Gummiballes entstehende Strömung in einem starrwandigen Leitungssystem, *Helv. Physiol. Acta* **7**, 170 (1949).
  - 4) RIEMANN-WEBER, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 4. Aufl., Bd. I, p. 185 (1900).
  - 5) P. LAMBOSSY, *Helv. Physiol. Acta*, **10**, 138—160 (1952).
-