

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 25 (1952)
Heft: III

Artikel: Beiträge zur Theorie der Richtungskorrelation
Autor: Alder, Kurt
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112308>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Beiträge zur Theorie der Richtungskorrelation.

Kurt Alder, ETH., Zürich.

13. XII. 51.

1. Einleitung.

Die verschiedenen Zustände eines Atomkerns können durch folgende Grössen charakterisiert werden: Energie, Lebensdauer, Spin, Parität, magnetisches Moment und elektrisches Quadrupolmoment. Im Grundzustand sind die mechanischen, magnetischen oder elektrischen Momente durch die bekannten Methoden (Ausmessung der Hyperfeinstruktur) bestimmbar. Die Gesamtenergie des Kerns ist aus der massenspektroskopisch oder anderweitig bekannten Bindungsenergie berechenbar.

Für angeregte, kurzlebige Kernzustände versagen die für den Grundzustand üblichen Methoden, und es müssen andere Wege benutzt werden. Die Messung der Energiedifferenz zum Grundzustand und teilweise auch die Messung der Lebensdauer ist direkten Methoden zugänglich. Besonders die Betaspektroskopie ist schon seit langer Zeit mit gutem Erfolg verwendet worden. Die Messung der Lebensdauer mit Hilfe verzögerter Koinzidenzen wurde dagegen erst in den letzten Jahren entwickelt. Die Bestimmung der Spinwerte bzw. der Paritätsänderungen kann bis heute dagegen nur auf indirektem Wege erfolgen. Zur Ermittlung der Spinwerte und der Paritätsänderungen bedient man sich mit gutem Erfolg der Theorie der γ -Strahlen. Multipolordnung und Charakter der Strahlung können aus den Konversionskoeffizienten, die jetzt genau berechnet vorliegen (ROSE, SPINRAD, GOERTZEL¹), erhalten werden. Die Schlüsse, die aus der Anwendung der Betatheorie gezogen werden, sind dagegen meist nicht eindeutig. Sie gestatten aber oft gewisse Fälle auszuschliessen. In manchen günstigen Fällen, besonders bei leichten Kernen, können auch Kernreaktionen Angaben über Spin und Parität liefern.

Eine eindeutige Zuordnung von Spin- und Paritätswerten zu den gefundenen Kernzuständen ist jedoch in den wenigsten Fällen möglich. Jede zusätzliche Aussage ist deshalb wertvoll. Die Messung der Richtungskorrelation, die in den letzten Jahren zunehmende Be-

deutung erlangt hat, vermag oft solche Angaben zu liefern und zwischen verschiedenen Möglichkeiten eindeutig zu entscheiden. Wenn von einem angeregten Kern zwei Teilchen sukzessive ausgesandt werden, so hängt die Wahrscheinlichkeit für Emissionen von der Lage der beiden Richtungen der emittierten Teilchen und der Spin- und Multipolzuordnung ab.

Die erste Theorie der Richtungskorrelation stammt von HAMILTON²⁾. Weitere Rechnungen sind von verschiedenen Autoren durchgeführt, so von YANG³⁾ über allgemeine gruppentheoretische Eigenschaften, von FALKOFF und LING⁴⁾ über Interferenzterme bei Mischungen von verschiedenen Multipolordnungen, von FALKOFF und UHLENBECK⁵⁾ über Korrelation beliebiger Teilchen. Wenn von einem oder beiden γ -Quanten noch die Polarisationsrichtung gemessen werden kann, so spricht man von Polarisationskorrelation. HAMILTON, ZINNES u.a.⁶⁾ haben auch diesen Fall behandelt.

Die Resultate der verschiedenen Autoren ergeben, dass die relative Wahrscheinlichkeit als Polynom in $\cos^2 \Theta$

$$W(\Theta) = 1 + A_2 \cos^2 \Theta + A_4 \cos^4 \Theta + \dots + A_{2k} \cos^{2k} \Theta$$

dargestellt werden kann. Θ ist dabei der Winkel zwischen den beiden Emissionsrichtungen. Für den höchsten Exponenten $2k$ gilt die Auswahlregel

$$k \leq l_1, l_2, I_B,$$

wenn l_1 und l_2 die Multipolordnungen der beiden Strahlungen und I_B den Spin des mittleren Niveaus bedeuten. Bei reinen Strahlungen hängen die Konstanten nicht von Kernmatrixelementen ab, sondern sind gruppentheoretisch durch Spin und Multipolzuordnung bestimmt. Der Vergleich der gemessenen und berechneten Korrelationsfunktion $W(\Theta)$ ergibt somit, wie bereits angedeutet, wertvolle Hinweise auf Spinwerte und Strahlungscharakter.

Obwohl die Idee der Messung sehr einfach ist und die Theorie der γ - γ -Korrelation schon seit 1940 durch HAMILTON²⁾ bereitgestellt war, sind die ersten erfolgreichen und zuverlässigen Messungen doch erst nach der Entwicklung des Szintillationszählers in den Jahren 1947 und 1948 durchgeführt worden. Nach diesen ersten Messungen von BRADY und DEUTSCH⁷⁾ wurde die Methode rasch bekannt, und heute bildet die γ - γ -Korrelation ein wertvolles Hilfsmittel für die Kernspektroskopie⁸⁾. Dagegen sind Korrelationen, bei denen eines oder beide Teilchen Elektronen sind, experimentell viel schwieriger zu messen. Dieses Gebiet der Richtungskorrelation besitzt deshalb heute noch eine geringe Bedeutung, vermag aber im Prinzip z.B.

über den Wechselwirkungsansatz in der Fermischen Betatheorie zu entscheiden.

Die Annahme aller bisher zitierten theoretischen Arbeiten ist, dass die Lebensdauer des mittleren Niveaus so kurz ist, dass eine Störung des Zustandes nach Emission des ersten Quants nicht möglich ist. GOERTZEL⁹⁾ hat diese Annahme fallengelassen und in sehr allgemeiner Weise den Einfluss der Elektronenhülle berücksichtigt. Anderseits sind in einer Reihe von Messungen merkliche Anisotropien der Korrelation festgestellt worden, obwohl die Lebensdauer des mittleren Niveaus so gross ist, dass äussere Einflüsse sich bemerkbar machen könnten. In diesen Fällen wird die beobachtete Korrelation im allgemeinen nicht mit der berechneten übereinstimmen, so dass ein Schluss auf die Spinwerte erschwert oder gar verunmöglicht wird. Dagegen ist bei anderweitig bekannten Spinwerten die Abweichung der experimentellen von der theoretischen Korrelation ein Mass für die Wechselwirkung des Kernes mit der Umgebung (Hyperfeinstruktur). Dieser Effekt, der einerseits für die Bestimmung der „wahren“ Korrelation störend wirkt, kann umgekehrt zur Bestimmung weiterer Kerneigenschaften verwendet werden. Die Hyperfeinstruktur gestattet ja bekanntlich, die verschiedenen Momente zu bestimmen. Wichtig und der Rechnung bequem zugänglich ist vor allem die Schwächung der Korrelation durch ein äusseres magnetisches Feld. Daraus wird sich später die Möglichkeit ergeben, das magnetische Moment im kurzlebigen mittleren Zustand zu bestimmen.

Kehren wir zurück zur ungestörten Korrelation, die in der oben angedeuteten Form geschrieben werden kann. Die Berechnung der Koeffizienten A_{2k} führt dann auf ausgedehnte numerische Rechnungen. GARDNER, RACAH und LLOYD¹⁰⁾ zeigten jedoch, dass diese Rechnungen sich stark vereinfachen, wenn die Korrelationsfunktion $W(\Theta)$ nach gruppentheoretisch einfachen und der Geometrie des Problems angepassten Funktionen entwickelt wird. Für ungestörte und unpolarisierte Korrelationen hat man z. B. $W(\Theta)$ nach Kugelfunktionen (Legendresche Polynome) zu entwickeln:

$$W(\Theta) = \sum_n a_n P_n(\cos \Theta).$$

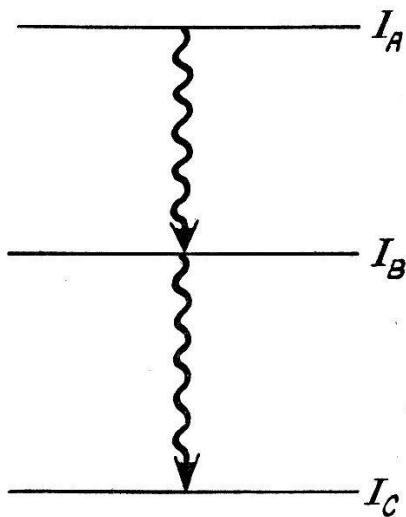
Die a_n lassen sich dann durch geschlossene Formeln ausdrücken. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, allgemeine Formeln für die Korrelation beliebiger Teilchen aufzustellen (inklusive Polarisationskorrelation und beliebige Mischung), wobei der Zwischenzustand durch äussere Einflüsse gestört werden kann.

2. Theorie der Richtungskorrelation.

Nach FALKOFF und UHLENBECK⁵⁾ schreiben wir für die relative Wahrscheinlichkeit der Emission der beiden Teilchen

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = S_1 S_2 \sum_{l,p} \left| \sum_m (A_l | H_1(\vec{k}_1) | B_m) (B_m | H_2(\vec{k}_2) | C_p) \right|^2, \quad (1)$$

wo A_l , B_m , C_p die Wellenfunktionen für die entarteten Energieniveaus des Anfangs-, Zwischen- und Endzustandes bedeuten. $H_1(\vec{k}_1)$ stellt den Energieoperator für die Emission des ersten Teilchens in die Richtung \vec{k}_1 dar. S_1 , S_2 sind Mittelungen über nicht gemessene Spins, Polarisationen, Neutrinorichtungen.



Wird die Entartung der Energieniveaus im Zwischenzustand durch eine äussere Wechselwirkung aufgehoben, so verändert dies die Korrelation. GOERTZEL⁹⁾ hat diesen Fall behandelt und erhält für die relative Wahrscheinlichkeit

$$W(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = S_1 S_2 \sum_{l,m,m',p} \frac{(A_l | H_1(\vec{k}) | B_m) (B_m | H_2(\vec{k}) | C_p) (A_l | H_1(\vec{k}_1) | B_{m'}^*) (B_{m'}^* | H_2(\vec{k}) | C_p)^*}{1 - i \omega_{mm'} \tau}. \quad (2)$$

τ ist die Lebensdauer des mittleren Niveaus, $\omega_{mm'}$ die Energieaufspaltung zwischen den Zuständen B_m und $B_{m'}$ (dividiert durch \hbar).

Für die weiteren Überlegungen nehmen wir an, dass die Kernspins der drei Energiezustände I_A , I_B , I_C sind. Die dazugehörigen magnetischen Quantenzahlen seien M_A , M_B , M_C .

Wir betrachten Funktionen $Y_{LM}(A_i \dots)^*$, die von Größen A_i (Polarisationsgrößen) abhängen sollen und sich bei einer Drehung des Koordinatensystems wie folgt transformieren:

$$Y_{LM}(D A_i \dots) = \sum_m D_{mM}^L(\alpha \beta \gamma) Y_{Lm}(A_i \dots). \quad (3)$$

D soll die Drehung charakterisieren, die durch die drei Eulerschen Winkel α, β, γ gegeben ist. $D_{mM}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ ist der dazugehörige Darstellungskoeffizient.

Für die Wechselwirkung fordern wir aus physikalischen Gründen Drehinvarianz. Dies führt dann offenbar auf folgenden Ansatz für den Energieoperator

$$H = \sum_L a_L \sum_{M=-L}^{+L} Y_{LM}(X_i \dots) Y_{LM}^*(A_i \dots), \quad (4)$$

wo die X_i sich nur auf den Kern und die A_i nur auf die emittierten Teilchen beziehen sollen. Für das Matrixelement $(Jm | H | J'm')$ folgt damit der Ausdruck

$$(Jm | H | J'm') = \sum_L a_L \sum_{-L}^{+L} (Jm | Y_{LM}(X_i \dots) | J'm') Y_{LM}^*(A_i \dots). \quad (5)$$

$[Jm | Y_{LM}(X_i \dots) | J'm']$ kann aus allgemeinen gruppentheoretischen Gründen in zwei Faktoren zerlegt werden:

$$(Jm | Y_{LM}(X_i \dots) | J'm') = C_{JmLM}^{J'm'} f(J, J', L, X_i \dots), \quad (6)$$

wo f von den magnetischen Quantenzahlen m, m', M unabhängig ist. Der erste Faktor ist ein Clebsch-Gordon-Koeffizient, der die Vektoraddition

$$\vec{J} + \vec{L} = \vec{J}' \quad m + M = m'$$

vermittelt. Da dieser Koeffizient immer dann verschwindet, wenn obige Beziehungen nicht erfüllt sind, bleibt mit $a_L f = \alpha_L$

$$(Jm | H | J'm') = \sum \alpha_L C_{JmLM}^{J'm'} Y_{LM}^*(A_i \dots)_{M=m'-m}. \quad (7)$$

Dieses Resultat in (2) eingesetzt, ergibt bei einer beliebigen Wahl der z -Achse für die Korrelationsfunktion

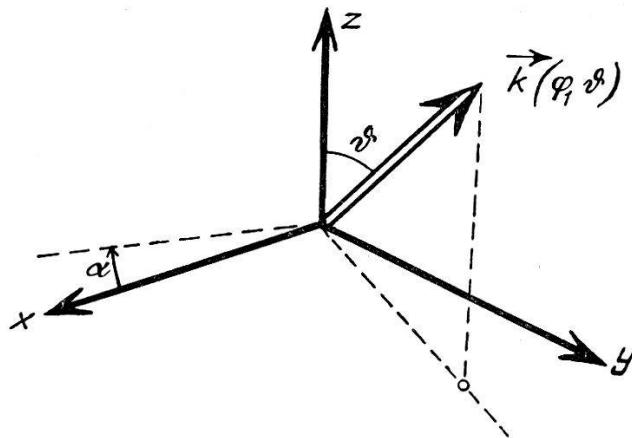
$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum \alpha_{L_1} \alpha_{L_2}^* C_{I_B M_B L_1 M_1}^{I_A M_A} C_{I_B M'_B L_2 M_2}^{I_A M_A} F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k}_1) \\ \beta_{L_3} \beta_{L_4}^* C_{I_C M_C L_3 M_3}^{I_B M_B} C_{I_C M'_C L_4 M_4}^{I_B M'_B} F_{L_3 L_4}^{M_3 M_4}(\vec{k}_2) \frac{1}{1 - i \omega_{BB'} \tau}, \quad (8)$$

*) Diese Funktionen sind eine Verallgemeinerung der polarisierten Kugelfunktionen von FALKOFF und UHLENBECK⁵.

wo abkürzungsweise gesetzt ist

$$F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k}) = S \{ Y_{L_1 M_1}^*(A_i \dots) Y_{L_2 M_2}(A_i \dots) \}. \quad (9)$$

Die $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k})$ lassen sich noch weiter vereinfachen. Wir führen eine Drehung des Koordinatensystems so aus, dass die Emissionsrichtung in die z -Achse fällt. Die drei Eulerschen Winkel sind dann:



$\alpha = \varphi - \pi/2$, $\beta = \vartheta$, γ beliebig. Es kann $\gamma = 0$ gesetzt werden.

Wegen der Transformationseigenschaften der Y_{LM} ist

$$F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{m_1 m_2} D_{M_1 m_1}^{L_1 *}(\varphi - \frac{\pi}{2}, \vartheta, 0) D_{M_2 m_2}^{L_2}(\varphi - \frac{\pi}{2}, \vartheta, 0) C_{L_1 L_2}^{m_1 m_2} \quad (10)$$

mit

$$\begin{aligned} C_{L_1 L_2}^{m_1 m_2} &= F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) = \\ &= S \{ Y_{L_1 m_1}^*(A_i \dots \vec{k} \equiv z, \gamma = 0) Y_{L_2 m_2}(A_i \dots \vec{k} \equiv z, \gamma = 0) \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Formeln (8), (9), (10), (11) gestatten jede beliebige Korrelation (inklusive Polarisationen und Mischungen) zu berechnen. Die einzigen Unbekannten sind die modellabhängigen Kernmatrixelemente α_L , β_L , und die $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(0)$.

Wir wollen uns vorerst auf den Fall beschränken, dass keine der Polarisationsgrößen A_i gemessen werde. S bedeutet dann die Mittelung über alle A_i . Mitteln wir zunächst über alle möglichen Lagen,

Aus bekannten gruppentheoretischen Relationen der Darstellungskoeffizienten [Appendix A (8), (4)] leitet man die folgenden Eigenschaften der F her:

$$\begin{aligned} \int F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2} d\Omega &= \delta_{M_1 M_2} \delta_{L_1 L_2} \cdot \text{const}; \text{ const unabhängig von } M, \\ \sum_{-L}^{+L} F_{LL}^{MM}(\vartheta) &\text{ unabhängig von } \vartheta. \end{aligned}$$

Diese beiden Sätze sind in FALKOFF und UHLENBECK⁵) zitiert.

die aus einer speziellen Lage durch Drehung um \vec{k} um den Winkel γ entstehen, so führt dies wegen der Transformationseigenschaften der Y_{LM} auf ein Integral

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m_1 - m_2)\gamma} d\gamma = 2\pi \delta_{m_1 m_2}, \quad (12)$$

d.h. es muss

$$F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) = \delta_{m_1 m_2} F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) \quad (13)$$

sein. (13) ist äquivalent mit der Bemerkung (HAMILTON²), GOERTZEL⁹), FALKOFF und UHLENBECK⁵), LLOYD¹¹) und LIPPMANN¹²)), dass sämtliche Interferenzterme verschwinden, wenn die z -Achse in die Richtung des einen Quantes gelegt wird. Aus der Herleitung geht hervor, dass dieser Satz nicht mehr richtig ist, wenn Polarisierungen gemessen werden können.

(13) sagt weiter aus, dass $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}$ nur von Min (L_1, L_2) willkürlichen Koeffizienten abhängt. Diese Bemerkung stammt ebenfalls von FALKOFF und UHLENBECK⁵).

Die Formeln (8), (9), (10), (11) für die Richtungskorrelation beliebiger Teilchen können noch vereinfacht werden. Die Summen über magnetische Quantenzahlen tragen ja im allgemeinen nur geometrischen Charakter und es muss daher möglich sein, diese explizit auszuwerten. Dies führt auf sogenannte Racah-Koeffizienten, deren Definitionen und Beziehungen mit anderen oft gebrauchten gruppentheoretischen Relationen im Appendix zusammengestellt sind.

Speziell ist nach Appendix A (3), (7)

$$\begin{aligned} & F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{m, k \text{ gerade}} C_{L_1 - M_1 L_2 M_2}^k C_{L_1 - m L_2 m}^{k 0} D_{M_2 - M_1, 0}^k \left(\varphi - \frac{\pi}{2}, \vartheta, 0 \right) (-1)^{m - M_1} F_{L_1 L_2}^{m m}(0). \end{aligned} \quad (14)$$

(14) in (8) eingesetzt ergibt dann

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ \mu}} a_{\mu}^{k_1 k_2} D_{\mu 0}^{k_1} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right) D_{\mu 0}^{k_2 *} \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_2, 0 \right), \quad (15)$$

) Dass in (14) nur über die geraden k summiert zu werden braucht, folgt aus der Erhaltung der Parität. Es existieren nämlich zwei verschiedene Arten von $Y_{LM}(A_i \dots)$: solche, die bei einer Spiegelung das Vorzeichen wechseln und solche, die invariant bleiben. Da man für die Wechselwirkung H ausser der Drehinvarianz auch Spiegelungsinvarianz fordern muss, folgt, dass Parität $Y_{LM}(X_i \dots) =$ Parität $Y_{LM}(A_i \dots) \neq$ Paritätsänderung des betrachteten Übergangs ist: Diese Grösse ist aber fest, so dass $F_{L_1 L_2}^{M_1 M_2}(\vec{k}) = S \{ Y_{L_1 M_1}^(A_i \dots) Y_{L_2 M_2}(A_i \dots) \}$ eine gerade Parität besitzt.

wo die $a_\mu^{k_1 k_2}$ sich wie folgt darstellen lassen:

$$a_\mu^{k_1 k_2} = I^{k_1} \cdot II^{k_2} \cdot III_\mu^{k_1 k_2}. \quad (16)$$

Die drei Faktoren haben die folgende Bedeutung:

$$\left. \begin{aligned} I^{k_1} &= \sqrt{2k_1 + 1} \sum_{L_1 L_2} \alpha_{L_1} \alpha_{L_2}^* (-1)^{I_A - I_B + L_2} W(I_B I_A k_1 L_2 / L_1 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_m (-1)^{L_1 - m} C_{L_1 m L_2 - m}^{k_1 0} F_{L_1 L_2}^{m m}(0) \right\}, \\ II^{k_2} &= \sqrt{2k_2 + 1} \sum_{L_3 L_4} \beta_{L_3} \beta_{L_4}^* (-1)^{I_C - I_B + L_4} W(I_B I_C k_2 L_4 / L_3 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_m (-1)^{L_3 - m} C_{L_3 m L_4 - m}^{k_2 0} F_{L_3 L_4}^{m m}(0) \right\}, \\ III_\mu^{k_1 k_2} &= \sum_{M_B M'_B} C_{I_B M'_B k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M'_B k_2 \mu}^{I_B M_B} \cdot \frac{1}{1 - i \omega_{BB'} \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3. Allgemeine Eigenschaften der Korrelationsfunktionen.

Die Formeln (15) sind Entwicklungen von $W(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ in natürlicher Weise nach Darstellungskoeffizienten. Die Auswahlregeln der Racah-Koeffizienten (Appendix B) verlangen

$$\left. \begin{aligned} |I_A - I_B| &\leq L_{1,2} \leq |I_A + I_B| & |I_C - I_B| &\leq L_{3,4} \leq I_C + I_B \\ 0 &\leq 2k_1 \leq 2I_B & |L_1 - L_2| &\leq 2k_1 \leq L_1 + L_2 \\ 0 &\leq 2k_2 \leq 2I_B & |L_3 - L_4| &\leq 2k_2 \leq L_3 + L_4 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die ersten beiden Ungleichungen sind nichts anderes als der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses.

Ist $\omega_{BB'} \tau \ll 1$, d.h. die Störung des mittleren Niveaus klein, so ergibt sich eine weitere Vereinfachung.

Es ist nämlich

$$III_\mu^{k_1 k_2} = \sum_{M_B M'_B} C_{I_B M'_B k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M'_B k_2 \mu}^{I_B M_B} = \delta_{k_1 k_2} \frac{2I_B + 1}{2k + 1} \quad (19)$$

also

$$\begin{aligned} W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) &= \sum_{k, \mu} \frac{1}{2k + 1} I^k \cdot II^k D_{\mu 0}^k \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right) D_{\mu 0}^{k*} \left(\varphi_2 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_2, 0 \right) = \\ &= \sum_{k, \mu} \frac{1}{2k + 1} I^k \cdot II^k D_{\mu 0}^k \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right) D_{0 \mu}^k \left(0, \vartheta_2, \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Die Summe über μ kann aus der Gruppeneigenschaft der Raumdrehungen leicht bestimmt werden.

Es seien Φ, Θ, Ψ die Eulerschen Winkel der zusammengesetzten Drehung ST mit

$$T = \left\{ \varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1, 0 \right\},$$

$$S = \left\{ 0, \vartheta_2, \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right\}.$$

Die Bedeutung des Winkels Θ lässt sich durch eine kleine Rechnung leicht erhalten. Es ist $\Theta = <(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$.

Aus

$$\sum_{\mu} D_{\mu_1 \mu}^k(S) D_{\mu \mu_2}^k(T) = D_{\mu_1 \mu_2}^k(ST) \quad (21)$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned} W(k_1 k_2) &= \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{2k+1} I^k \cdot II^k \cdot D_{00}^k(\Phi, \Theta, \Psi) = \\ &= \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{2k+1} I^k \cdot II^k D_{00}^k(0, \Theta, 0) = \\ &= \sum_{k \text{ gerade}} \frac{1}{2k+1} I^k \cdot II^k P_k(\cos \Theta) = \sum_{k \text{ gerade}} a_k P_k(\cos \Theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Die Korrelationsfunktion ist speziell von der Lage der z -Achse unabhängig. Sie ist eine Summe von Potenzen in $\cos^2 \Theta$. Der höchste Exponent ist nach den Auswahlregeln (18) durch

$$\text{Min} \{2 I_B, \text{Max}(L_1 + L_2), \text{Max}(L_3 + L_4)\}$$

begrenzt. Ist dagegen die Störung $\omega\tau$ nicht mehr vernachlässigbar, so hat man mit den allgemeinen Formeln (17) zu rechnen. Diese können aber wie folgt interpretiert werden:

Wir entwickeln die ungestörte Korrelationsfunktion nach Kugelfunktionen

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{k, \mu} a_k \frac{1}{2k+1} Y_k^{\mu}(\vec{k}_1) Y_k^{-\mu}(\vec{k}_2). \quad (23)$$

Den Einfluss der Störung erhalten wir nun, indem jedes Glied (k, μ) mit einem Schwächungsfaktor G_k^{μ} („attenuation factor“) multipliziert wird:

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{k, \mu} a_k G_k^{\mu} \frac{1}{2k+1} Y_k^{\mu}(\vec{k}_1) Y_k^{-\mu}(\vec{k}_2), \quad (24)$$

wo

$$G_k^{\mu} = (2k+1) III_{\mu}^{kk} = (2k+1) \sum_{m, m'} |C_{I_B m' k \mu}^{I_B m}|^2 \frac{1}{1 - i \omega_{m m'} \tau}. \quad (25)$$

Dies bleibt offenbar nur solange richtig, als unser Ausdruck

$$\text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} = \delta_{k_1 k_2} \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} \quad (26)$$

ist. Neben dem oben betrachteten Fall $\omega\tau \ll 1$ gilt (26) auch dann, wenn die Hyperfeinaufspaltung zwischen verschiedenen magnetischen Quantenzahlen gleich gross ist (z.B. Aufspaltung im schwachen Magnetfeld). Ist die Hyperfeinaufspaltung nicht äquidistant, so müssen noch Interferenzterme berücksichtigt werden, die durch den Schwächungsmechanismus erzeugt werden. Nach (17) ist

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ \mu}} \text{I}^{k_1} \text{II}^{k_2} \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2} \frac{1}{\sqrt{2k_1+1}} Y_{k_1}^{\mu}(\vec{k}_1) \frac{1}{\sqrt{2k_2+1}} Y_{k_2}^{-\mu}(\vec{k}_2). \quad (27)$$

Wenn statt unpolarisierter Strahlung irgendwelche Grössen (Polarisationen) zusätzlich gemessen werden, so wird der obige Formalismus nur un wesentlich geändert.

In den Formeln (17) hat man einfach \sum_m durch den Ausdruck

$$\left\{ \sum_{m_1 m_2} (-1)^{L_1 - m_1} C_{L_1 m_1 L_2 - m_2}^{k_1 - \mu_1} F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) \right\}$$

und $D_{0\mu}^{k_1}$ durch $D_{\mu_1 \mu}^{k_1}$ zu ersetzen.

$$\begin{aligned} \text{I}_{\mu_1}^{k_1} &= \sqrt{2k_1+1} \sum_{L_1 L_2} \alpha_{L_1} \alpha_{L_2}^* (-1)^{I_A - I_B + L_2} W(I_B I_A k_1 L_2 / L_1 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{m_1 m_2} (-1)^{L_1 - m_1} C_{L_1 m_1 L_2 - m_2}^{k_1 - \mu_1} F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0) \right\} \\ \text{II}_{\mu_2}^{k_2} &= \sqrt{2k_2+1} \sum_{L_3 L_4} \beta_{L_3} \beta_{L_4}^* (-1)^{I_C - I_B + L_4} W(I_B I_C k_2 L_4 / L_3 I_B) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{m_3 m_4} (-1)^{L_3 - m_3} C_{L_3 m_3 L_4 - m_4}^{k_2 \mu_2} F_{L_3 L_4}^{m_3 m_4}(0) \right\} \\ \text{III}_{\mu_1}^{k_1 k_2} &= \sum_{M_B M'_B} C_{I_B M'_B k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{k_B M'_B k_2 \mu}^{I_B M_B} \frac{1}{1 - i \omega_B B' \tau} \end{aligned} \quad (28)$$

$$a_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2} = \text{I}_{\mu_1}^{k_1} \text{II}_{\mu_2}^{k_2} \text{III}_{\mu}^{k_1 k_2}$$

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu} a_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2} D_{\mu \mu_1}^{k_1} \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_1 0 \right) D_{\mu_2 \mu}^{k_2} \left(0, \vartheta_2 \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right).$$

Die $F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0)$ hängen natürlich jetzt noch von den gemessenen Polarisationsgrössen $A_i \dots$ ab.

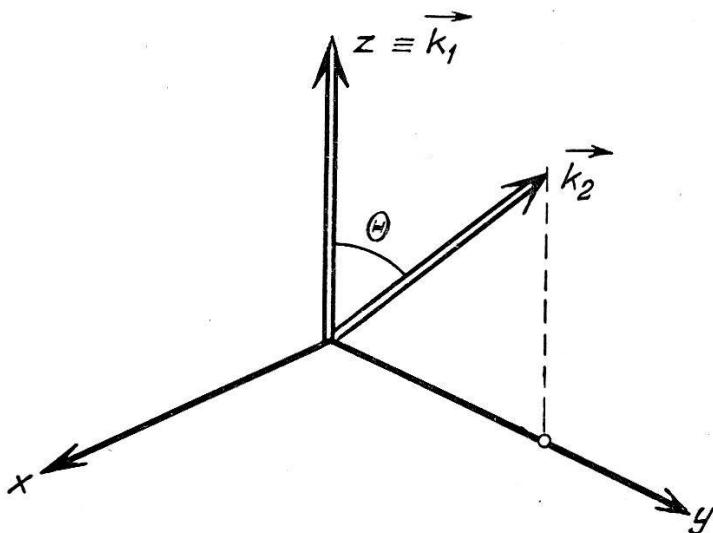
Für verschwindende Schwächung $\omega\tau \ll 1$ lässt sich die Summe über μ wie vorhin auswerten und erhält

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{\mu_1 \mu_2} \frac{1}{2k+1} I_{\mu_1}^k II_{\mu_2}^k D_{\mu_1 \mu_2}^k (\Phi, \Theta, \Psi). \quad (29)$$

Die Eulerschen Winkel Φ und Ψ sind vom speziell gewählten Koordinatensystem abhängig. Dies ist nicht verwunderlich, da die Polarisationsgrößen $A_i \dots$ ja auf dieses festgewählte System bezogen sind.

Wählen wir als Koordinatensystem dasjenige, das als z -Achse die Emissionsrichtung des einen Quants und als (z, y) -Ebene die Ebene der beiden Quanten besitzt, so ist $\Phi = 0$, $\Psi = 0$. Wir haben

$$W(\vec{k}_1 \vec{k}_2) = \sum_{k_1 \mu_1 \mu_2} \frac{1}{2k+1} I_{\mu_1}^k II_{\mu_2}^k D_{\mu_1 \mu_2}^k (0, \Theta, 0). \quad (30)$$



Schwächungen durch äussere Einflüsse können wie oben diskutiert werden.

4. Diskussion der Schwächungserscheinungen.

Die Korrelation kann durch irgendwelche äussere oder innere Felder gestört werden. Als inneres Feld wollen wir das Magnetfeld der Hülle am Ort des Kerns annehmen. Die Hülle werde durch den Drehimpuls J charakterisiert. Er setzt sich mit dem Kernspin I zu einem totalen Drehimpuls F zusammen. In den obigen Formeln hat man jetzt unter den A_l , B_m , C_p die Wellenfunktionen des gesamten Atoms (Kern und Hülle) zu verstehen. Dabei ist aber zu beachten, dass der Operator H nur auf die Kerneigenfunktionen wirkt.

Wegen der (I, J) -Kopplung können aber die Kernmatrixelemente der Form $(A_l | H_1 | B_m)$ leicht auf gewöhnliche Kernmatrixelemente umtransformiert werden. Es gilt z. B.

$$(I_A J F_\alpha m_\alpha | H_1 | I_B J F_\beta m_\beta) = \sum_{M_A M_B} C_{I_A M_A J_s}^{F_\alpha m_\alpha} (I_A M_A | H_1 | I_B M_B) C_{I_B M_B J_r}^{F_\beta m_\beta} \quad (31)$$

Diese und analoge Formeln in (2) eingesetzt ergeben unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen der Clebsch-Gordon-Koeffizienten für III

$$\begin{aligned} III_\mu^{k_1 k_2} = & \sum C_{I_B M_B k_1 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M_B k_2 \mu}^{I_B M_B} C_{I_B M_B J_r}^{F m} \times \\ & \times C_{I_B M_B J_s}^{F m} C_{I_B M_B J_s}^{F' m'} C_{I_B M_B J_r}^{F' m'} \frac{1}{1 - i \omega_{F m; F' m'}}. \end{aligned} \quad (32)$$

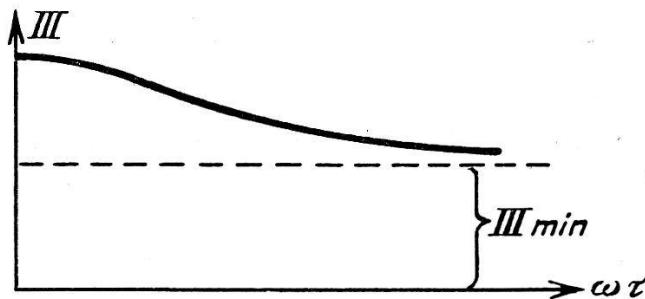
Diese Summe kann wieder durch Racah-Koeffizienten aufsummiert werden:

$$\begin{aligned} III_\mu^{k_1 k_2} = & \sum_{F F'} (2F + 1) W(I_B J k_1 F / F' I_B) W(I_B J k_2 F / F' I_B) \times \\ & \times \sum_{m m'} C_{F' m' k_1 \mu}^{F m} C_{F' m' k_2 \mu}^{F m} \frac{1}{1 - i \omega_{F m; F' m'}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Für äquidistante Hyperfeinaufspaltung ist $III_\mu^{k_1 k_2}$ von der Form $\delta_{k_1 k_2}$. Also verschwinden die Interferenzterme und es bleibt

$$III_\mu^k = \sum_{F, F'} (2F + 1) |W(I_B J k F / F' I_B)|^2 \sum_{m m'} |C_{F' m' k \mu}^{F m}|^2 \frac{1}{1 - i \omega_{F m; F' m'}}.$$

Diese Formel ist nur solange richtig, als die äussere Wechselwirkung die (I, J) -Kopplung nicht zerstört.



Für den Spezialfall $H = 0$ kann die Summe über m, m' noch ausgeführt werden. Es ist

$$III^k = \frac{1}{2k+1} \sum_{F, F'} \frac{(2F+1)(2F'+1) |W(I_B J k F / F' I_B)|^2}{1 + (\omega_{FF'} \tau)^2} \quad (34)$$

$\omega_{FF} \tau$ ist ein Mass für die Schwächung. III in Abhängigkeit von $\omega\tau$ ist eine monoton fallende Funktion.

Für $\omega\tau \ll 1$ kann jedoch III nicht verschwinden. Es bleibt

$$(III^k)_{\min} = \frac{1}{2k+1} \sum_F (2F+1)^2 |W(I_B J k F / F I_B)|^2. \quad (35)$$

Die obigen Formeln erlauben wieder eine einfache Interpretation. Wenn die ungestörte Korrelationsfunktion in der Form

$$W(\Theta) = \sum_k a_k P_k(\cos \Theta)$$

vorliegt, so äussert sich der Einfluss der Hülle in einem Schwächungsfaktor

$$G_k = (2k+1) III^k,$$

$$W(\Theta) = \sum_k a_k G_k P_k(\cos \Theta).$$

Die Diskussion von G_k bzw. $(G_k)_{\min}$ in Funktion der Grössen $\omega\tau$, I_B , k geschieht am besten für $J = 1/2$. In diesem Fall lassen sich die Racah-Koeffizienten leicht berechnen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B + \frac{1}{2} / I_B + \frac{1}{2} I_B\right) &= \frac{1}{2(I_B+1)(2I_B+1)} \\ &\quad \sqrt{(2I_B+1-k)(2I_B+k+2)} \\ W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B + \frac{1}{2} / I_B - \frac{1}{2} I_B\right) &= -\frac{1}{2(2I_B+1)} \sqrt{\frac{k(k+1)}{I_B(I_B+1)}} \\ W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B - \frac{1}{2} / I_B + \frac{1}{2} I_B\right) &= \frac{1}{2(2I_B+1)} \sqrt{\frac{k(k+1)}{I_B(I_B+1)}} \\ W\left(I_B \frac{1}{2} k I_B - \frac{1}{2} / I_B - \frac{1}{2} I_B\right) &= \frac{1}{2(I_B+1)(2I_B+1)} \\ &\quad \sqrt{(2I_B+1-k)(2I_B+k+2)} \\ G_k &= 1 - \frac{k(k+1)}{(2I_B+1)^2} T \\ T &= \frac{(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2} \\ (G_k)_{\min} &= 1 - \frac{k(k+1)}{(2I_B+1)^2}. \end{aligned} \right\} (36)$$

$(G_k)_{\min}$ für verschiedene k und I_B ist in der folgenden Tabelle niedergelegt.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass Glieder mit höheren $\cos^n \Theta$ empfindlicher geschwächt werden, als diejenigen mit niedrigen Po-

tenzen. Ferner ist die Schwächung kleiner, je grösser der Spin I_B im mittleren Zustand ist.

$I_B \backslash k$	2	4	6	8	10
1	0,33				
$\frac{3}{2}$	0,52				
2	0,76	0,20			
$\frac{5}{2}$	0,83	0,44			
3	0,88	0,59	0,15		
$\frac{7}{2}$	0,90	0,68	0,34		
4	0,93	0,75	0,48	0,11	
$\frac{9}{2}$	0,94	0,80	0,58	0,28	
5	0,95	0,84	0,65	0,40	0,09

Für ein äusseres Magnetfeld ohne Berücksichtigung eventueller Hülleneffekte kann der Schwächungsfaktor ebenfalls leicht berechnet werden. Es ist nämlich

$$\omega_{mm'} = r\omega = r\mu H/I\hbar = rg\mu_k H/\hbar \quad (37)$$

(μ , g magnetischer Moment und g -Faktor des mittleren Zustandes; μ_k Kernmagneton). Für G_k^r ergibt sich dann

$$G_k^r = \frac{1}{1 - i r \omega \tau}. \quad (38)$$

Wenn wir das äussere Magnetfeld H senkrecht zur Ebene der zwei Quanten anlegen, werden die Formeln besonders einfach

$$W(\vartheta, H) = \sum_r b_r \frac{1}{1 - i r \omega \tau} e^{ir\vartheta}, \quad (39)$$

wo ϑ der Winkel zwischen den beiden Quanten ist. Das magnetische Feld H induziert eine Schwächung und eine Phasenverschiebung. Für $\omega\tau \ll 1$ äussert sich dies in einer Rotation der Symmetriearchse um den klassischen Präzessionswinkel $\Phi = \omega\tau$.

Wenn die beiden Zähler die beiden Partikel nicht unterscheiden können, so wird der Schwächungsfaktor reell:

$$G_k^r = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - i r \omega \tau} + \frac{1}{1 + i r \omega \tau} \right\} = \frac{1}{1 + (r \omega \tau)^2}. \quad (40)$$

Eine Messung von G_k^r mit gleich empfindlichen Zählern gibt somit nur die Grösse, nicht aber das Vorzeichen des gyromagnetischen Faktors des Kernes.

Berechnung der Konstanten $F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0)$ für einige Spezialfälle.

Aus physikalischen Gründen verschwindet $F_{L_1 L_2}^{m_1 m_2}(0)$, wenn es nicht gelingt, die z -Komponenten m_1 bzw. m_2 des Drehimpulses ohne Bahndrehimpuls (sondern nur durch Spin, Neutrinos usw.) wegzutragen.

Es ist also speziell

für Spin-0-Teilchen $F_{l_1 l_2}^{mm}(0) = 0$, ausser $m = 0$;

für γ -Strahlen $F_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(0) = 0$, ausser $m_{1,2} = \pm 1$.

Spin-0-Teilchen.

Es ist

$$F_{l_1 l_2}^{00}(0) = \{Y_l^0(0) Y_l^0(0)\} = 1. \quad (41)$$

 γ -Strahlen.

Es ist $Y_l^1 \sim \epsilon_+$ für elektrische Strahlung

$Y_l^1 \sim -i \epsilon_+$ für magnetische Strahlung $\epsilon_+ = e_x + i e_y$.

Mit $Y_l^{-1} = -(Y_l^1)^*$ gewinnt man ohne weiteres:

	el-el	mg-mg	el-mg	mg-el
$F_{l_1 l_2}^{11}$	1	1	$-i$	i
$F_{l_1 l_2}^{-1-1}$	1	1	i	$-i$

Sämtliche von l abhängige Größen sind dabei zum Matrixelement geschlagen. Daher sind die Matrixelemente von FALKOFF und LING von den unsrigen verschieden. Es gilt

$$\alpha_l = \sqrt{2l+1} i^{-l} (\alpha_l)_{\text{Falk-Ling}}.$$

Wenn Polarisierungen gemessen werden, können die zugehörigen $F_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}(0)$ ebenfalls leicht angegeben werden. Dabei wollen wir das Koordinationssystem, auf das die Polarisationsgrößen bezogen werden, wie oben wählen [z -Achse in Richtung des einen Quants, (z, y) -Ebene = Ebene der beiden Quanten].

φ bedeutet den Winkel, den der Polarisationsvektor mit der Ebene der beiden Quanten einschließt.

	el-el	mg-mg	el-mg	mg-el
$F_{l_1 l_2}^{1-1}$	$e^{-i2\varphi}$	$-e^{-i2\varphi}$	$i e^{-i2\varphi}$	$i e^{-i2\varphi}$
$F_{l_1 l_2}^{-11}$	$e^{i2\varphi}$	$-e^{i2\varphi}$	$-i e^{i2\varphi}$	$-i e^{i2\varphi}$

*

γ -Konversion.

Für gewisse Fälle lassen sich auch hier die Konstanten F leicht angeben. Insbesondere ist die Konversion eines s -Elektrons leicht zu behandeln. Das durch Konversion ausgesandte Elektron bildet mit dem in der K -Schale verbleibenden aus Paritätsgründen

- a) bei elektrischer Konversion einen Singulettzustand;
- b) bei magnetischer Konversion einen Triplettzustand.

Bei elektrischer Konversion verhält sich das Teilchen offenbar wie ein Spin-0-Teilchen

$$F_{ll}^{00}(0) = 1 \quad F_{ll}^{mm}(0) = 0 \quad m \neq 0;$$

wird das Elektron magnetisch konvertiert, so wird es in einer $(l-1)$ - oder $(l+1)$ -Welle ausgesandt.

Erfolgt die Emission in einer $(l+1)$ -Welle, so ist das F_{ll}^{mm} gegeben durch

$$F_{ll}^{mm}(0) = \left| \sum_{\mu} C_{l-1, \mu; 1, m-\mu}^{lm} Y_{l-1, \mu}(0) X_{1, m-\mu} \right|^2,$$

wo X_1 die Triplettspineigenfunktion bedeutet. Dieser Ausdruck reduziert sich aber sofort auf

$$F_{ll}^{mm}(0) = |C_{l-1, 0; 1, m}^{lm}|^2. \quad (42)$$

Für die $(l+1)$ -Welle ergibt die analoge Überlegung

$$F_{ll}^{mm}(0) = |C_{l+1, 0; 1, m}^{lm}|^2. \quad (43)$$

Speziell ist noch daraus ersichtlich, dass $F_{ll}^{mm}(0) = 0$ ist, für $m > 1$.

Es ergibt sich dann nach den Tabellen von CONDON und SHERTLEY für die Clebsch-Gordon-Koeffizienten:

	F_{ll}^{11}	F_{ll}^{00}	F_{ll}^{-1-1}
$l-1$	$\frac{l(l+1)}{2}$	l^2	$\frac{l(l+1)}{2}$
$l+1$	$\frac{l(l+1)}{2}$	$(l+1)^2$	$\frac{l(l+1)}{2}$

 β -Strahlung.

In der ($Z = 0$)-Näherung sind von FALKOFF und UHLENBECK die $F_l^m(\vartheta)$ für erlaubte sowie verbotene Übergänge erster und zweiter Art berechnet worden. Wir bestimmen aus jener Arbeit die $F_l^m(0)$:

$$l = 1, \quad l = 2,$$

$$\begin{aligned} F_1^0(0) &= 1 - \lambda, & F_2^0(0) &= 1 + \mu_1 + \mu_2, \\ F_1^{\pm 1}(0) &= 1 + \lambda, & F_2^{\pm 1}(0) &= \frac{2}{3} + \mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2, \\ && F_2^{\pm 2}(0) &= -\frac{1}{3} + \mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2. \end{aligned}$$

Für die Bedeutung der λ , μ_1 , μ_2 siehe FALKOFF und UHLENBECK, wo diese Parameter auch für die verschiedenen Wechselwirkungsansätze berechnet sind.

Herrn Prof. Dr. W. PAULI und Herrn Prof. Dr. V. WEISSKOPF möchte ich für ihr Interesse, das sie an dieser Arbeit bekundet haben, meinen herzlichsten Dank aussprechen. Den Herren Dr. H. FRAUENFELDER, Dr. R. SCHAFROTH und meinem Freund E. HEER danke ich für viele anregende Diskussionen.

Literatur.

- ¹⁾ M. E. ROSE, G. GOERTZEL, B. SPINRAD, J. HARR und P. STRONG, Phys. Rev. **83**, 79 (1951).
- ²⁾ D. R. HAMILTON, Phys. Rev. **58**, 122 (1940).
- ³⁾ C. N. YANG, Phys. Rev. **74**, 764 (1948).
- ⁴⁾ D. L. FALKOFF und D. S. LING, Phys. Rev. **76**, 1639 (1949).
- ⁵⁾ D. L. FALKOFF und G. E. UHLENBECK, Phys. Rev. **79**, 323 (1950).
- ⁶⁾ D. R. HAMILTON, Phys. Rev. **74**, 728 (1948); I. ZINNES, Phys. Rev. **80**, 363 (1950).
- ⁷⁾ E. L. BRADY und H. DEUTSCH, Phys. Rev. **72**, 870 (1947).
- ⁸⁾ H. DEUTSCH, Reports of Progress in Physics XIV, 196.
- ⁹⁾ G. GOERTZEL, Phys. Rev. **62**, 763 (1946).
- ¹⁰⁾ J. W. GARDNER, Proc. Phys. Soc. **62**, 763 (1949); S. P. LLOYD, Dissertation, unveröffentlicht; Phys. Rev. **83**, 716 (1951); G. RACAH, im Druck.
- ¹¹⁾ S. P. LLOYD, Phys. Rev. **80**, 118 (1950).
- ¹²⁾ B. A. LIPPMANN, Phys. Rev. **81**, 162 (1951).

APPENDIX

A. Einige oft gebrauchte gruppentheoretische Relationen.

$$D_{\mu' \mu}^j(\alpha \beta \gamma) = \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} \frac{\sqrt{(j+\mu)! (j-\mu)! (j+\mu')! (j-\mu')!}}{(j-\mu'-\kappa)! (j+\mu-\kappa)! \kappa! (\kappa+\mu'-\mu)!} \times \\ \times e^{i\mu' \alpha} \cos^{2j+\mu-\mu'-2\kappa} \left(\frac{1}{2} \beta \right) \cdot \sin^{2\kappa+\mu'-\mu} \left(\frac{1}{2} \beta \right) e^{i\mu \gamma} \quad (1)$$

$$\sum_{\mu} D_{\mu' \mu}^j(S) \cdot D_{\mu \mu''}^j(T) = D_{\mu' \mu''}^j(ST) \quad (2)$$

$$D_{\mu' \mu}^j(\alpha \beta \gamma) = (-1)^{\mu-\mu'} D_{-\mu'-\mu}^j(\alpha \beta \gamma)^* \quad (3)$$

$$D_{\mu' \mu}^j \text{ bildet eine unitäre Matrix} \quad (4)$$

$$D_{\mu 0}^L(\alpha \beta \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} Y_L^M(\beta, \alpha) \quad (5)$$

Y auf 1 normierte Kugelfunktion

$$D_{\mu' \mu}^j(0, 0, 0) = \delta_{\mu' \mu} \quad (6)$$

$$D_M^J \cdot D_m^j = \sum_{k=|J-j|}^{J+j} C_{JMjm}^{kM+m} \cdot D_{M+m, N+n}^k \cdot C_{JNjn}^{kN+n} \quad (7)$$

$$\int D_{MN}^J \cdot D_{mn}^j d\Omega = \delta_{Jj} \cdot \delta_{Mm} \delta_{Nn} \frac{4\pi}{2J+1} \quad (8)$$

$$C_{l\mu\bar{l}\nu}^{L\mu+\nu} = \frac{\sqrt{(L+l-\bar{l})! (L-l+\bar{l})! (l+\bar{l}-L)! (L+\mu+\nu)! (L-\mu-\nu)!}}{\sqrt{(L+l+\bar{l}+1)! (l-\mu)! (l+\mu)! (\bar{l}-\nu)! (\bar{l}+\nu)!}} \times \\ \times \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa+\bar{l}+\nu} \sqrt{2L+1} \frac{(L+\bar{l}+\mu-\kappa)! (l-\mu+\kappa)!}{(L-l+\bar{l}-\kappa)! (L+\mu+\nu-\kappa)! \kappa! (\kappa+l-\bar{l}-\mu-\nu)!} \quad (9)$$

$$\sum_{\alpha, \gamma} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \cdot C_{a\alpha b'\beta}^{c\gamma} = \delta_{bb'} \frac{2c+1}{2b+1} \quad \beta \text{ fest} \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a+b-c} \cdot C_{a-\alpha b-\beta}^{c-\gamma} \\ C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a+b-c} \cdot C_{b\beta a\alpha}^{c\gamma} \\ C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{a-\alpha} \sqrt{\frac{2c+1}{2b+1}} C_{c\gamma a-\alpha}^{b\beta} \\ C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} = (-1)^{b+\beta} \sqrt{\frac{2c+1}{2a+1}} C_{b-\beta c\gamma}^{a\alpha} \end{array} \right\} \quad (11)$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma} \cdot C_{d\delta b\beta}^{e\epsilon} \cdot C_{a\alpha f\Phi}^{d\delta} = \sqrt{2c+1} \sqrt{2d+1} W(c b f d / a e) C_{c\gamma f\Phi}^{e\epsilon} \quad (12)$$

wo $W(abcd/ef)$ der sogenannte Racah-Koeffizient ist, der von sechs ganz- oder halbzahligen positiven Quantenzahlen abhängt. Dieser Koeffizient kann aus folgender Formel berechnet werden.

$$\begin{aligned} & \omega(a b c d / e f) = \\ &= \sum_z (-1)^z \frac{(a+b+c+d+1-z)!}{(a+b-e-z)! (c+d-e-z)! (a+c-f-z)! (b+d-f-z)! \times} \\ & \quad \times (b+d-f-z)! z! (e+f-a-d+z)! (e+f-b-c+z)! \\ & W(a b c d / e f) = \\ &= \left[\frac{(a+b-e)! (a+e-b)! (b+e-a)! (c+d-e)! (c+e-d)! (d+e-d)! \times}{(a+b+e+1)! (c+d+e+1)! (a+c+f+1)! b+d+f+1)! \times} \right]^{1/2} \\ & \quad \times \omega(a b c d / e f). \end{aligned} \quad (13)$$

Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} W(a b c d / e f) &= W(b a d c / e f) = W(c d a b / e f) = W(a c b d / f e) \\ &= (-1)^{e+f-a-d} \cdot W(e b c f / a d) = (-1)^{e+f-b-c} \cdot W(a e f d / b c). \end{aligned}$$

Die Racah-Koeffizienten verschwinden nur dann nicht, wenn die vier Triaden

$$(a b e) \quad (c d e) \quad (a c f) \quad (b d f)$$

alle trigonometrische Ungleichungen der Form $|a-b| \leq c \leq a+b$ erfüllen.

B. Allgemeine Formeln für oft gebrauchte Racah-Koeffizienten.

Alle benötigten Racah-Koeffizienten sind von der Form

$$W(I_B I_A k, l_1/l_2 I_B).$$

Meistens ist jedoch in praktischen Anwendungen

$$l_1 = l_2 \text{ oder } l_1 = l_2 \pm 1 \quad |I_A - I_B| = l_1 \text{ oder } l_1 - 1,$$

so dass man nur wenige Koeffizienten zu berechnen hat. Es ist

$$W(I, I-l, k, l/l I) = \left\{ \frac{2l! 2l! (2I+k+1)! (2I-k)!}{(2I+1)! (2I+1)! (2l+k+1)! (2l-k)!} \right\}^{1/2}$$

$$W(I, I+l, k, l/l I) = (-1)^k \left\{ \frac{2I! 2I! 2l! 2l!}{(2I-k)! (2l-k)! (2l+k+1)! (2I+k+1)!} \right\}^{1/2}$$

$$\begin{aligned} W(I, I-l+1, k, l/l I) &= 2 [2l(I+1) - k(k+1)(I-l+1)] \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{(2l-1)! (2l-1)! (2I-k)! (2I+k+1)!}{(2I+2)! (2I+2)! (2l+k+1)! (2l-k)!} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(I, I+l-1, k, l/l I) &= 2(-1)^k [2lI - k(k+1)(I+l)] \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{(2l-1)! (2l-1)! (2I-1)! (2I-1)!}{(2I+k+1)! (2l+k+1)! (2l-k)! (2I-k)!} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(I, I-l, k, l/l+1, I) &= \\ &= \left\{ 2k(k+1)(I-l) \frac{2l! (2l+1)! (2I-k)! (2I+k+1)!}{(2l-k+1)! (2l+k+2)! (2I+1)! (2I+2)!} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(I, I+l, k, l/l+1, I) &= (-1)^{k-1} \times \\ &\quad \times \left\{ 2k(k+1)(I+l+1) \frac{2l! (2l+1)! 2I! (2I-1)!}{(2I-k)! (2I+k+1)! (2l-k+1)! (2l+k+2)!} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$W(I J 0 F/F I) = \left\{ \frac{1}{(2F+1)(2I+1)} \right\}^{1/2}$$

$$\begin{aligned} W(I J 2 F/F I) &= \left\{ \frac{(2F-2)! (2I-2)!}{(2F+3)! (2I+3)!} \right\}^{1/2} [3C(C+1) - 4I(I+1)F(F+1) \\ &\quad C = J(J+1) - F(F+1) - I(I+1)]. \end{aligned}$$

C. Allgemeine Formeln für Clebsch-Gordon-Koeffizienten.

$$l_1 + l_2 + k = 2g$$

$$\begin{aligned} C_{l_1 0 l_2 0}^{k 0} &= (-1)^{g-k} \sqrt{2k+1} \frac{g!}{(g-l_1)! (g-l_2)! (g-k)!} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(l_1+l_2-k)! (l_1+k-l_2)! (l_2+k-l_1)!}{(l_1+l_2+k+1)!}} \end{aligned}$$

$$C_{l_1 1 l_2 -1}^{k 0} = \frac{1}{2} \frac{k(k+1) - l_2(l_2+1) - l_1(l_1+1)}{\sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{k 0}$$

$$C_{l_1 0 l_2 0}^{k 0} = 0 \quad l_1 + l_2 + k = 2g + 1.$$

Tabellen von Racah-Koeffizienten.*Allgemein*

$$W(J, J', 0, L/L, J) = \left\{ \frac{1}{(2L+1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$$

Dipolstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 1/1, J)$
$J-1$	$\left\{ \frac{1}{30} \cdot \frac{(J+1)(2J+3)}{J(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$\left\{ \frac{1}{30} \cdot \frac{(2J-1)(2J+3)}{J(J+1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J+1$	$\left\{ \frac{1}{30} \cdot \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$

Quadrupolstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 2/2, J)$
$J-2$	$\left\{ \frac{2}{35} \cdot \frac{(J+1)(2J+3)}{J(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-1$	$-(J-5) \left\{ \frac{1}{70} \cdot \frac{(2J+3)}{J(J+1)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$-(2J-3)(2J+5) \left\{ \frac{1}{70} \cdot \frac{1}{J(J+1)(2J-1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+1$	$-(J+6) \cdot \left\{ \frac{1}{70} \cdot \frac{2J-1}{J(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$\left\{ \frac{2}{35} \cdot \frac{J(2J-1)}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$

J'	$W(J, J', 4, 2/2, J)$
$J-2$	$\left\{ \frac{1}{630} \cdot \frac{(J+1)(J+2)(2J+3)(2J+5)}{(J-1)J(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J-1$	$-\left\{ \frac{2}{315} \cdot \frac{(J+2)(2J-3)(2J+3)(2J+5)}{(J-1)J(J+1)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$\left\{ \frac{2}{35} \cdot \frac{(J-1)(J+2)(2J-3)(2J+5)}{J(J+1)(2J-1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+1$	$-\left\{ \frac{2}{315} \cdot \frac{(J-1)(2J-3)(2J-1)(2J+5)}{J(J+1)(J+2)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J+2$	$\left\{ \frac{(J-1)J(2J-3)(2J-1)}{630(J+1)(J+2)(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$

Oktopolstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 3/3 J)$
$J - 3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{J+1}{J} \cdot \frac{(2J+3)}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J - 2$	$\frac{3}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{(2J+3)}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 2$	$-\frac{3}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{(2J-1)}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{21} \cdot \frac{J}{J+1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 3/3 J)$
$J - 3$	$\left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{(J+1)(J+2)}{(J-1)J} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J - 2$	$\frac{1}{3} (23 - 7J) \left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{(J+2)}{(J-1)J(J+1)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 2$	$-\frac{1}{3} (30 + 7J) \left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{J-1}{J(J+1)(J+2)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$\left\{ \frac{1}{154} \cdot \frac{J(J-1)}{(J+2)(J+1)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)}{(2J+5)(2J+3)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 6, 3/3 J)$
$J - 3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+1)(J+2)(J+3)}{J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J - 2$	$\frac{3}{2} (5 - 2J) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+2)(J+3)}{(J+1)J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J + 2$	$-\frac{2}{3} (2J+7) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J-1)(J-2)}{J(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{J(J-1)(J-2)}{(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$

2^4 -Pol-Strahlung.

J'	$W(J, J', 2, 4/4 J)$
$J - 4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{J+1}{J} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J - 3$	$\frac{1}{6} (J+13) \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$\frac{1}{6} (J-12) \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{1}{J(J+1)} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
$J + 4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{7}{55} \cdot \frac{J}{J+1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 4/4 J)$
$J - 4$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{(J+1)(J+2)}{(J-1)J} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J - 3$	$\frac{1}{6} (17 - 3J) \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{(J+2)}{(J-1)J(J+1)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$- \frac{1}{6} (20 + 3J) \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{(J-1)}{J(J+1)(J+2)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$
$J + 4$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{14}{143} \cdot \frac{J(J-1)}{(J+1)(J+2)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 6, 4/4 J)$
$J - 4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+1)(J+2)(J+3)}{J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J - 3$	$\frac{1}{6} (67 - 17J) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J+2)(J+3)}{(J+1)J(J-1)(J-2)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)(2J+7)}{(2J+1)(2J-1)(2J-3)(2J-5)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$- \frac{1}{6} (84 + 17J) \times$ $\times \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{(J-2)(J-1)}{J(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$
$J + 4$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{J(J-1)(J-2)}{(J+1)(J+2)(J+3)} \cdot \frac{(2J-1)(2J-3)(2J-5)}{(2J+1)(2J+3)(2J+5)(2J+7)} \right\}^{1/2}$

Interferenzkoeffizienten.**Dipol-Quadrupol-Strahlung.**

J'	$W(J, J', 2, 1/2, J)$
$J - 1$	$\left\{ \frac{1}{10} \cdot \frac{(J-1)(2J+3)}{J(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
J	$\left\{ \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{J(J+1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 1$	$-\left\{ \frac{1}{10} \cdot \frac{(J+2)(2J-1)}{(J+1)(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$

Quadrupol-Oktopol-Strahlung.

J'	$W(J, J', 2, 2/3, J)$
$J - 2$	$\left\{ \frac{1}{14} \cdot \frac{J-2}{J} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 2$	$-\left\{ \frac{1}{14} \cdot \frac{J+3}{J-1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 2/3, J)$
$J - 2$	$\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{7} \cdot \frac{(J-2)(J+2)}{(J-1)J} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 2$	$-\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{7} \cdot \frac{(J+3)(J-1)}{(J+2)(J+1)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+5)(2J+3)(2J+1)} \right\}^{1/2}$

(2³ — 2⁴)-Polstrahlung.

J'	$W(J, J', 2, 3/4, J)$
$J - 3$	$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{J-3}{J} \cdot \frac{2J+3}{(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$-\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{J+4}{J-1} \cdot \frac{2J-1}{(2J+1)(2J+3)} \right\}^{1/2}$
J'	$W(J, J', 4, 3/4, J)$
$J - 3$	$\frac{1}{6} \left\{ \frac{10}{11} \cdot \frac{(J-3)(J+2)}{J(J-1)} \cdot \frac{(2J+3)(2J+5)}{(2J-3)(2J-1)(2J+1)} \right\}^{1/2}$
$J + 3$	$-\frac{1}{6} \left\{ \frac{10}{11} \cdot \frac{(J+4)(J-1)}{(J+2)(J+1)} \cdot \frac{(2J-3)(2J-1)}{(2J+5)(2J+3)(2J+1)} \right\}^{1/2}$

Clebsch-Gordon-Koeffizienten.

$$C_{10}^{00}{}_{10} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$C_{11}^{00}{}_{1-1} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$C_{10}^{20}{}_{10} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C_{11}^{20}{}_{1-1} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$C_{20}^{00}{}_{20} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$C_{21}^{00}{}_{2-1} = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$C_{22}^{00}{}_{2-2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$C_{20}^{20}{}_{20} = -\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$C_{21}^{20}{}_{2-1} = \sqrt{\frac{1}{14}}$$

$$C_{22}^{20}{}_{2-2} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$C_{20}^{40}{}_{20} = \sqrt{\frac{18}{35}}$$

$$C_{21}^{40}{}_{2-1} = \sqrt{\frac{8}{35}}$$

$$C_{22}^{40}{}_{2-2} = \sqrt{\frac{1}{70}}$$

$$C_{30}^{00}{}_{30} = -\sqrt{\frac{1}{7}}$$

$$C_{31}^{00}{}_{3-1} = \sqrt{\frac{1}{7}}$$

$$C_{30}^{20}{}_{30} = 2\sqrt{\frac{1}{21}}$$

$$C_{31}^{20}{}_{3-1} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$C_{30}^{40}{}_{30} = -3\sqrt{\frac{2}{77}}$$

$$C_{31}^{40}{}_{3-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{77}}$$

$$C_{30}^{60}{}_{30} = 10\sqrt{\frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11}}$$

$$C_{31}^{60}{}_{3-1} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{77}}$$

$$C_{40}^{00}{}_{40} = \frac{1}{3}$$

$$C_{41}^{00}{}_{4-1} = -\frac{1}{3}$$

$$C_{40}^{20}{}_{40} = -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{77}}$$

$$C_{41}^{20}{}_{4-1} = -\frac{17}{6}\sqrt{\frac{1}{77}}$$

$$C_{40}^{40}{}_{40} = 9\sqrt{\frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 13}}$$

$$C_{41}^{40}{}_{4-1} = -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 13}}$$

$$C_{40}^{60}{}_{40} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{11}}$$

$$C_{41}^{60}{}_{4-1} = -\frac{1}{30}\sqrt{\frac{5}{11}}$$