Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 24 (1951)
Heft: V

Artikel: La fréquence des gerbes pénétrantes de mésons
Autor: Terreaux, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112231

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La fréquence des gerbes pénétrantes de mésons

par **Ch. Terreaux** (Université de Zurich).

(7. VI. 1951.)

Résumé: Tous ces calculs de la probabilité pour l'obtention de gerbes pénétrantes de mésons reposent sur l'hypothèse que la production plurale est relativement plus fréquente que la production multiple, qui est négligée ici. L'hypothèse relative à la section efficace pour l'émission d'un méson par un nucléon d'énergie incidente E perdant, lors du choc, une énergie ε est admise analogue à la loi correspondant au freinage d'un électron par rayonnement et nous poserons $\Phi(\varepsilon, E)d\varepsilon = \Phi(\varepsilon/E)\, d\varepsilon/E$. Tout d'abord pour le cas particulier où Φ n'est qu'une puissance de (ε/E), et en faisant abstraction des énergies transmises, lors des chocs, aux nucléons du noyau, les fluctuations de la grandeur des gerbes sont déterminées pour différentes valeurs de l'énergie du nucléon cosmique incident. Elles ressemblent approximativement aux fluctuations correspondant à une distribution de Poisson. Puis, pour une forme homogène quelconque de Φ, la fréquence des gerbes est calculée en tenant compte de la contribution des différents nucléons de recul, et il est vu que l'hypothèse de la production plurale permet, à elle seule, de déterminer des probabilités qui correspondent bien avec l'expérience, même dans le cas des très grandes gerbes (30 à 40 constituants). La production plurale est encore utilisée pour calculer le pourcentage de la composante protons des gerbes, et les résultats sont aussi en accord avec l'expérience. Enfin, la probabilité pour l'obtention de gerbes est déterminée pour le cas où la particule incidente est un méson π, en admettant que l'interaction la plus fréquente du méson avec le noyau est une diffusion par un nucléon, qui reçoit alors une certaine énergie lui permettant d'engendrer la gerbe par choc.

§ 1. *Introduction.*

Il n'est guère possible, pour le moment, de se prononcer définitivement en faveur d'une des hypothèses de production des gerbes pénétrantes de mésons (production purement *plurale*, voir: MM. Heitler et Janossy[1])[2]), *multiple:* Heisenberg[3]), Clementel et Dallaporta[4]), Fermi[5]), ou *mixte:* Caldirola et Loinger[6])) ou pour une certaine combinaison de ces productions, parce que, pour l'interprétation des résultats expérimentaux, l'hypothèse correspondant à l'émission élémentaire d'un méson a une plus grande importance que celle qui est relative à la répartition de ces émissions entre les différents chocs. Cependant le processus purement multiple est assez difficile à accorder avec la grande section efficace des nucléons déterminée à partir de leur coefficient d'absorption.

Puis, abstraction faite des fluctuations, le nombre maximum des constituants des gerbes dépend de la grandeur du noyau (HEITLER et JANOSSY[1])), ce qui semblerait montrer qu'au moins pour les gerbes dont le nombre des constituants n'est pas trop grand, une partie assez importante d'entre elles doivent correspondre à un processus de production de caractère plural. La dépendance de la grandeur des étoiles en la dimension du noyau ressort aussi nettement des expériences de MM. SALANT, HORNBOSTEL, FISK et SMITH[7]): les gerbes provenant de la gélatine des plaques photographiques ne sont en général accompagnées que par un petit nombre de traces de grande ionisation ($\leqslant 4$), tandis que les gerbes engendrées dans les noyaux lourds en possèdent souvent plus que 9. Remarquons encore qu'à partir des résultats expérimentaux que l'on possède à présent, la fréquence des gerbes pénétrantes ne semble être approximativement égale à la fréquence du nucléon incident (spectre de puissance en l'énergie) que pour les valeurs élevées du nombre de leurs constituants ($\geqslant 10$) (HAYAKAWA[8])).

Le but de ce présent travail est de montrer que si l'on admet que la production purement plurale intervient plus fréquemment que les autres modes de production dont on peut alors faire abstraction, il est possible de rendre compte des différentes propriétés connues des gerbes pénétrantes, et l'accord avec l'expérience est bon, même dans le cas des très grandes gerbes. Tout d'abord, nous déterminerons les fluctuations du nombre des mésons des gerbes quand l'énergie du nucléon incident est bien déterminée. Puis pour le cas d'un nucléon incident dont la fréquence est donnée par un spectre de puissance en l'énergie, nous calculerons la probabilité pour l'obtention des gerbes et le pourcentage des protons qu'elles renferment. Enfin nous considérerons le cas des gerbes engendrées par un méson π incident, en supposant que l'interaction la plus fréquente du méson avec le noyau est une diffusion par un nucléon, qui reçoit alors une certaine énergie lui permettant d'engendrer la gerbe. Le processus plural est traité ici d'une manière phénoménologique, sans recourir à une théorie détaillée sur la production des mésons. Les valeurs satisfaisantes de la section efficace pour la production sont semblables à celles qui se déduisent du coefficient d'absorption des nucléons.

Lorsqu'un nucléon cosmique (primaire) engendre des mésons, une partie de son énergie est transmise à certains nucléons du noyau qui peuvent à leur tour produire des mésons et accroître ainsi la capacité de production du nucléon primaire, si ces énergies de recul sont suffisamment grandes (cascade). Par nucléons secon-

daires, tertiaires, etc. produisant les émissions secondaires, etc. de mésons, nous désignerons les nucléons de recul excités respectivement par les nucléons primaires, secondaires, etc. Quant aux petites gerbes (jusqu'à 6 ou 8 mésons), nous verrons que les résultats des calculs où interviennent les productions primaires et secondaires diffèrent très peu de ceux qui se rapportent aux productions primaires seulement. Mais déjà pour les gerbes de moyenne grandeur, il intervient des divergences qui sont d'autant plus importantes que le nombre des mésons de la gerbe est grand, et il est nécessaire de considérer les productions secondaires pour obtenir des résultats s'accordant bien avec l'expérience. Les productions tertiaires n'apportent une contribution appréciable que dans le cas des très grandes gerbes (plus de 40 constituants).

La complication mathématique du problème général, qui tient compte de la contribution des nucléons de recul, est du même ordre de grandeur que celle qui intervient dans le problème des fluctuations de la théorie ordinaire des cascades. Cependant il se présente ici une nouvelle difficulté physique. Dans une cascade électrons-photons, il se trouve toujours un nombre illimité de noyaux d'atomes à proximité desquels les photons créent des paires d'électrons, et les électrons subissent un freinage par rayonnement. Il n'en va pas de même dans notre cas présent, où le nombre des nucléons de recul a tendance à rester petit. En effet, pour nos grandes énergies en question, la direction des trajectoires des différents nucléons de recul ne doit pas différer beaucoup de celle de la trajectoire de la particule incidente, et il est possible qu'un nucléon soit heurté par plusieurs autres nucléons de recul qui furent excités lors de chocs antérieurs. Nous déterminerons le nombre restreint des nucléons de recul, ainsi que le nombre des mésons des gerbes, en nous servant du modèle suivant, formulé tout d'abord par MM. Heitler et Janossy[2]), où il est admis que les directions des trajectoires de *tous* les nucléons sont identiques. Le second nucléon atteint dans le noyau est donc heurté, pratiquement au même moment, par le nucléon primaire et le premier nucléon de recul. Deux mésons sont engendrés, mais de ces 2 chocs il ne résulte qu'un seul 2e nucléon de recul. Ceci revient à dire qu'en négligeant la divergence des trajectoires des différents nucléons, tout se comporte, quant à l'image que l'on peut se faire de la gerbe, comme si seul le nucléon primaire produisait des nucléons de recul. Dans une première estimation, nous ne tiendrons pas compte de l'accroissement des énergies de recul résultant des chocs des nucléons secondaires avec les nucléons du noyau. Mais s'il est admis qu'il n'existe pas de nucléon tertiaire, nous ne sommes pas obligé, quant aux productions de mésons, de

nous borner à ne considérer que des émissions primaires et secondaires. Nous envisagerons encore une production tertiaire résultant des chocs entre les différents nucléons de recul, qui provient des énergies de recul transmises par les nucléons secondaires. Malgré l'extrême simplicité de ce modèle, il faudrait admettre des hypothèses physiques encore plus restrictives si l'on voulait résoudre simplement le problème général où interviennent toutes les fluctuations d'énergies. Il est donc préférable d'introduire un autre genre de simplification et nous ferons abstraction de toutes les fluctuations des énergies quand nous nous occuperons des productions secondaires et tertiaires de mésons. C'est aussi à partir de ce modèle que nous déterminerons le nombre des protons contenus dans les gerbes pénétrantes, en les identifiant avec certains éléments chargés des nucléons de recul qui peuvent s'échapper du noyau. Nous pouvons tout de suite prévoir que le nombre obtenu doit être plutôt trop petit, car les directions des trajectoires des différents nucléons sont certainement divergentes, spécialement dans la portion du noyau où les énergies sont devenues relativement très petites et le modèle restreint trop le nombre des nucléons de recul.

I. Fluctuations de la grandeur des gerbes produites par des nucléons d'énergie déterminée.

§ 2. Calcul de la fréquence des gerbes.

MM. Heitler et Janossy[1])*) ont déterminé la probabilité pour l'obtention de gerbes pénétrantes de mésons engendrées lors des chocs successifs d'un nucléon cosmique incident avec ceux d'un noyau, quand la fréquence de ce nucléon, en fonction de son énergie, est donnée par un spectre de puissance. Nous voulons calculer ici cette probabilité pour le cas où l'énergie du nucléon incident est bien déterminée, en nous servant des hypothèses suivantes, qui correspondent à peu près à celles qui sont employées dans HJ I:

1. La production plurale de mésons est admise comme étant relativement plus fréquente que les autres productions qui sont négligées ici.

2. Dans HJ I la section efficace pour l'émission d'un méson par un nucléon d'énergie E, ayant perdu, lors du choc, une énergie ε, était admise homogène:

$$\Phi(E', E)\, dE' = \Phi\left(\frac{E'}{E}\right) \frac{dE'}{E} \text{ où } \varepsilon = E - E' \tag{1}$$

ε inclu les énergies de recul transmises, lors du choc, aux nucléons

*) Désigné dans ce travail par HJ I.

du noyau. Cette hypothèse, jusqu'à présent satisfaisante et plausible, est analogue à la loi correspondant au freinage d'un électron par rayonnement, et a été discutée par MM. HEITLER et JANOSSY[9]). Elle n'est naturellement valable que pour des énergies primaires suffisamment élevées, disons au-dessus d'une certaine énergie critique E_c pour la production. Nous n'avons pas d'information exacte sur la décroissance de la section efficace réelle dans le domaine d'énergie $< E_c$. Mais celle-ci doit être probablement très rapide et nous idéaliserons la situation en posant:

$$\Phi(E', E < E_c) = 0 \quad \text{Ordre de grandeur de } E_c = (1\text{—}3)\cdot 10^9 \text{ eV}. \qquad (1')$$

MM. FUJIMOTO, HAYAKAWA, YAMAGUCHI[10]) ont trouvé que les collisions nucléon-nucléon, pour lesquelles la particule incidente a une énergie $<2\cdot 10^3$ MeV, sont presque toutes élastiques. Seulement 20% d'entre elles produisent des mésons. L'hypothèse (1') est naturellement grossière, mais puisqu'elle n'est employée que lors du dernier choc dans le noyau, l'erreur résultante ne sera importante que dans le cas des petites gerbes de 1 ou 2 mésons, pour lesquelles il ne faut donc pas s'attendre à un bon accord entre résultats expérimentaux et théoriques.

Il est commode d'user de la notation:

$$\Phi\left(\frac{E'}{E}\right)\frac{d\,E'}{E} = \Phi\cdot\omega\left(\frac{E'}{E}\right)\frac{d\,E'}{E} \quad \text{où} \int_0^E \omega\left(\frac{E'}{E}\right)\frac{d\,E'}{E} = 1 \qquad (2)$$

Φ qui est une constante, représente la section efficace totale pour la production d'un méson.

Nous emploierons l'hypothèse générale sur $\Phi(E',E)$ (1) quand l'énergie du nucléon incident pourra être quelconque $\geqslant E_c$. Mais quand cette énergie est bien déterminée, le calcul ne peut s'effectuer que si la forme explicite de $\Phi(E',E)$ est connue. Dans cette première section nous particulariserons l'hypothèse (1) et nous admettrons pour $\omega(E'/E)$, la forme à partir de laquelle les valeurs numériques de HJI ont été déduites:

$$\omega\left(\frac{E'}{E}\right) = (\beta+1)\left(\frac{E'}{E}\right)^{\beta} \quad \beta \text{ quelconque} \qquad (3)$$

Il est très probable que la loi réelle se laisse bien approximer par (3) pour une certaine valeur de β.

3. Les mésons ne sont produits que par le choc direct du nucléon incident avec le noyau, et les productions secondaires, tertiaires, etc. ne sont pas considérées. La trajectoire du nucléon incident est admise rectiligne.

4. La matière du noyau est admise homogène (N nucléons par unité de volume) et les différentes émissions successives sont considérées comme statistiquement indépendantes.

La probabilité pour que le nucléon incident, d'énergie E, perde une énergie $E - E_{n-1}$ lors des $n-1$ chocs successifs se produisant dans les intervalles x_i, $x_i + dx_i$ ($i = 1, \ldots, n-1$) est donnée par:

$$p_{n-1}\, dE_{n-1} = \int \ldots \int \omega\left(\frac{E_1}{E}\right) \frac{dE_1}{E} \ldots \omega\left(\frac{E_{n-1}}{E_{n-2}}\right) \frac{dE_{n-1}}{E_{n-2}}\, e^{-\Phi N x_n} (\Phi N)^{n-1} \, dx_1 \ldots - dx_{n-1} \tag{4}$$

où:

$$E > E_1 > \ldots > E_{n-1} > E_c \ (E_{n-1} \text{ donné})$$

$$0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n < x$$

x est la profondeur maximum du noyau, qui correspond au point d'impact du nucléon incident.

Quant au dernier choc qui a lieu dans l'intervalle x_n, $x_n + dx_n$, il peut intervenir les 2 possibilités suivantes:

1. L'énergie du nucléon après ce choc est inférieure à E_c, de sorte qu'il lui est impossible de produire de nouveaux mésons. L'exponentielle de (4), qui représente la probabilité pour que le nucléon incident parcourt sa trajectoire sans autres collisions que celles qui interviennent dans les intervalles précités, doit donc contenir la variable x_n. La probabilité correspondante est

$$p_n^1(E, x) = \int_{E_c}^{E} p_{n-1}\, dE_{n-1} \int_0^{E_c} \omega\left(\frac{E_n}{E_{n-1}}\right) \frac{dE_n}{E_{n-1}} \int_0^x e^{-\Phi N x_n} \frac{(\Phi N x_n)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \Phi N\, dx_n = \left(\frac{E_c}{E}\right)^{\beta+1} \frac{\left[\log\left(\frac{E}{E_c}\right)^{\beta+1}\right]^{n-1}}{(n-1)!}\, \Gamma_n(\Phi N x) \tag{5}$$

où $\Gamma_n(\Phi N x)$ représente la fonction Γ incomplète définie par:

$$\Gamma_n(a) = \int_0^a e^{-z} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\, dz \quad \text{pour } n \text{ entier} = 1 - e^{-a} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!} \tag{6}$$

2. Après le dernier choc, l'énergie du nucléon est encore supérieure à E_c. L'exponentielle de (4) doit donc dépendre de la longueur maximum possible de la trajectoire du nucléon.

$$p_n^2(Ex) = \int_{E_c}^{E} p_{n-1}\, dE_{n-1} \int_{E_c}^{E_{n-1}} \omega\left(\frac{E_n}{E_{n-1}}\right) \frac{dE_n}{E_{n-1}}\, e^{-\Phi N x} \frac{(\Phi N x)^n}{n!} = \Gamma_n\left(\log\left[\frac{E}{E_c}\right]^{\beta+1}\right) e^{-\Phi N x} \frac{(\Phi N x)^n}{n!} \tag{7}$$

La probabilité totale s'obtient en sommant ces 2 probabilités partielles p_n^1 et p_n^2:

$$p_n(Ex)=\Gamma_{n-1}\left(\log\left[\frac{E}{E_c}\right]^{\beta+1}\right)\Gamma_n(\Phi Nx)-\Gamma_n\left(\log\left[\frac{E}{E_c}\right]^{\beta+1}\right)\Gamma_{n+1}(\Phi Nx) \quad (8)$$

Cette expression n'est valable que si la longueur maximum de la trajectoire dans le noyau est x. Il s'agit maintenant de calculer la probabilité $p_n(E)$ pour l'obtention d'une gerbe de n constituants, qui est engendrée par un nucléon incident dont le point d'impact avec le noyau est *quelconque*. Pour un noyau sphérique de diamètre d_A nous avons:

$$p_n(E) = \int_0^{d_A} \frac{2\,x\,dx}{d_A^2}\, p_n(Ex) \quad (9)$$

d'où nous déduisons finalement comme probabilité pour l'obtention d'une gerbe d'au moins n mésons:

$$p_{\geqslant n}(E) = \Gamma_{n-1}\left(\log\left[\frac{E}{E_c}\right]^{\beta+1}\right) X_n(a_A) \quad (10)$$

où

$$X_n(a_A) = \Gamma_n(a_A) - \frac{n(n+1)}{a_A^2}\,\Gamma_{n+2}(a_A);\; a_A = \Phi N d_A \quad (11)$$

De (10) nous ne pouvons pas tout de suite déduire $p_{\geqslant 1}(E)$, car la fonction Γ_0 n'est pas déterminée. Mais en répétant les calculs de $p_n^1(Ex)$ (5) et $p_n^2(Ex)$ (7) pour ce cas, on obtient que (10) est généralement valable si l'on pose Γ_0 $(\log [E/E_c]^{\beta+1}) \equiv 1$. Ces probabilités sont normalisées. On le constate aisément à partir de l'identité:

$$X_1(a_A) + \frac{2}{a_A^2}\,\Gamma_2(a_A) \equiv 1 \quad (12)$$

et de la probabilité pour que le nucléon traverse le noyau sans choc: $p_0(E) = 2/a_A^2\;\Gamma_2(a_A)$.

Ces résultats ne se rapportent qu'aux émissions primaires de mésons (neutrettos inclus). Le problème général qui tient compte des différentes productions secondaires, tertiaires etc. ne peut pas être solutionné simplement. Cependant nous verrons plus loin que si nous nous bornons à ne considérer que des petites gerbes, l'influence de ces productions secondaires, tertiaires, etc. sur la probabilité est relativement faible. Nous pouvons généraliser ce résultat pour notre cas présent.

A partir de (10), il est facile de retrouver le résultat de HJ I qui correspond à notre cas particulier de section efficace (3):

HJ I: $$P_n = \omega_{\gamma+1}^{n-1} X_n(a_A) - \omega_{\gamma+1}^{n} X_{n+1}(a_A)$$

où $$\omega_{\gamma+1} = \int_0^E \omega\left(\frac{E'}{E}\right)\left(\frac{E'}{E}\right)^{\gamma} \frac{dE'}{E} \quad \text{ici} \quad \omega_{\gamma+1} = \frac{\beta+1}{\gamma+\beta+1} \tag{13}$$

Il suffit de sommer les probabilités $p_n(E)$ pour toutes les valeurs possibles de l'énergie incidente E, en tenant compte de la fréquence d'arrivée du nucléon. Au-dessus de l'atmosphère, cette dernière est très probablement donnée par un spectre de puissance de la forme

$$S(E)\,dE = \gamma E_c^{\gamma} \frac{dE}{E^{\gamma+1}} \quad \text{(normé)}, \quad \gamma \simeq 1{,}5 \tag{14}$$

et MM. Heitler et Janossy[9]) ont démontré que ce spectre se reproduit à n'importe quelle hauteur dans l'atmosphère. (14) n'est valable que si $E_c \geqslant E_\varphi$ (latitude cut-off energy, pour l'Europe $E_\varphi = 3 \cdot 10^9$ eV). Pour nos latitudes, cette condition est approximativement satisfaite. Cependant, même pour des énergies E légèrement inférieures à E_φ, le spectre (14) correspond encore à peu près à la réalité, si l'épaisseur d'atmosphère au-dessus du lieu d'expérimentation n'est pas trop petite (Heitler et Janossy[9])).

Remarquons qu'il est possible d'expliciter la fonction en x, qui apparaît dans $p_n^2(Ex)$ (7), sous forme d'une différence de 2 fonctions Γ. De là nous pouvons conclure, en confrontant avec (13), que quelque soit l'hypothèse faite sur ω homogène, la probabilité $p_n(E)$ pour l'obtention d'une gerbe de n mésons sera toujours de la forme:

$$p_n(E) = f_{n-1}(E)\, X_n(a_A) - f_n(E)\, X_{n+1}(a_A)$$

Mais une généralisation de l'hypothèse (3) n'a pas grande valeur, car la forme de $f_n(E)$ est fonction de l'hypothèse faite sur la section efficace.

§ 3. *Résultats numériques et discussions.*

De la discussion de MM. Heitler et Janossy[9]) sur l'hypothèse de la section efficace pour la production des mésons (3), nous déduisons que la valeur de β qui approxime probablement au mieux le phénomène est environ 2 (valeur admise ici).

De (13) nous trouvons pour $\omega_{\gamma+1} = 2/3$. Ce mode de déterminatiou de $\omega_{\gamma+1}$ est indirect. Mais dans HJ I une valeur semblable a été

déduite en confrontant les résultats théoriques (13), calculés pour plusieurs valeurs de $\omega_{\gamma+1}$, avec les résultats expérimentaux relatifs à la fréquence des gerbes engendrées dans des noyaux de Ag et Br. Ceci confirme notre valeur de β. Dans le même article[9]), la relation

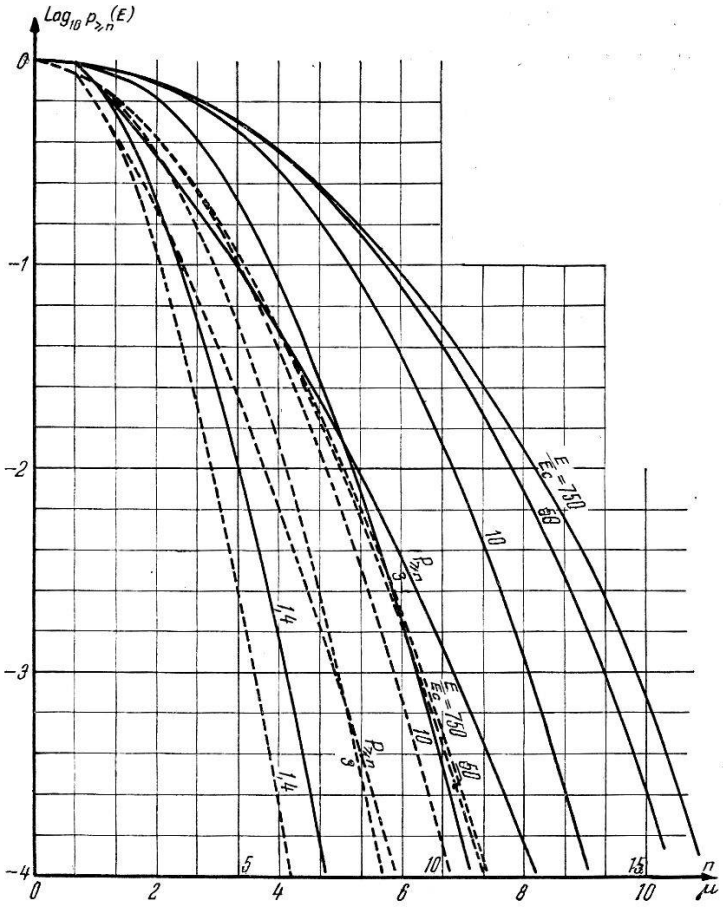

Fig. 1.

$\log_{10} p_{\geqslant n}(E)$: probabilité pour l'obtention d'une gerbe d'au moins n mésons, (neutrettos inclus) engendrée par un nucléon incident d'énergie E, en fonction de n et pour différents E/E_c = const, dont les valeurs sont jointes aux courbes correspondantes. $a_A = 3{,}5$ (O): courbe pointillée, $a_A = 7$ (Ag): courbe continue. Les courbes $P_{\geqslant n}$ se rapportent à un nucléon incident, d'énergie quelconque, dont la fréquence est donnée par un spectre de puissance (14). Seules les productions primaires de mésons sont considérées. L'échelle μ se rapporte aux mésons chargés de la gerbe*).

suivante entre $\omega_{\gamma+1}$ et Φ a été déduite, en comparant la valeur théorique du coefficient d'absorption de nucléons rapides engendrant des mésons avec les résultats expérimentaux [Φ est explicitée

*) Remarquons que l'échelle μ peut ne pas être bien exacte. En effet, sa détermination repose sur l'hypothèse que la probabilité pour l'émission d'un neutretto est constante pour les différentes sortes de chocs (proton-proton, proton-neutron, etc.) Mais la mesure de l'énergie incidente oblige la particule correspondante à être un proton, et la justification de cette hypothèse, donnée au § 5, n'est pas valable ici.

dans son unité naturelle $(\hbar/\mu_\pi c)^2 = 1{,}79 \cdot 10^{-26}$ cm², $\mu_\pi = 286$ m est la masse du méson π]:

$$\Phi\,(1 - \omega_{\gamma+1}) = 1{,}16\left(\frac{\hbar}{\mu_\pi c}\right)^2 \tag{15}$$

En posant $\omega_{\gamma+1} = 2/3$ nous obtenons $\Phi = 3{,}45\ (\hbar/\mu_\pi c)^2$. Dans cette valeur de Φ intervient également la contribution des neutrettos. De là, on trouve pour a_A en se servant de l'expression

$$d_A = (2{,}8 - 3) \times 10^{-13} A^{1/3}\ (\text{cm})$$

où A est la masse atomique de la matière considérée:

$$a_A = \Phi\, N\, d_A \cong 1{,}4\ A^{1/3} \tag{16}$$

Pour les principaux atomes entrant en composition dans la plaque photographique, les valeurs de a_A déduites de (16) sont

O (16) $\sim 3{,}5$	Ag (108) $\sim 6{,}7$
C (12) $\sim 3{,}2$	Br (80) $\sim 6{,}1$

Pb (207) $\sim 8{,}3$ (chambre de Wilson), Li (7) $\sim 2{,}7$ (voir section II). Remarquons que ces valeurs de a_A sont grossières. Elles ne doivent être considérées que comme des ordres de grandeur permettant de comparer les résultats expérimentaux et théoriques.

Les valeurs de $p_{\geqslant n}(E)$, reproduites à la fig. 1 pour les cas $a_A = 3{,}5$ (O) et 7 (Ag), sont calculées à partir de (10). Elles sont normées en tenant compte du cas $n = 0$. La figure reproduit encore les valeurs de $P_{\geqslant n}$, calculées à partir de (13), et qui correspondent aux probabilités pour l'obtention de gerbes d'au moins n mésons, engendrées par des nucléons incidents d'énergie quelconque E, dont la fréquence est donnée par le spectre de puissance (14).

L'accumulation des courbes de la fig. 1, pour les valeurs élevées de E/E_c, est naturellement une conséquence de la limitation du nombre des constituants de la gerbe par la dimension du noyau.

Il est intéressant de comparer la distribution en fonction de n, de nos probabilités $p_n(E)$ pour des valeurs constantes de E, avec la distribution qui correspondrait au cas où les mésons des gerbes se comporteraient comme des particules statistiquement indépendantes. Les probabilités pour l'obtention de telles gerbes sont données par la formule de Poisson:

$$p_{(P),n}(E) = e^{-\bar{n}}\,\frac{\bar{n}^n}{n!}\ ,\quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{(P),n}(E) = 1\ ,\ \overline{(n-\bar{n})^2} = \bar{n} \tag{17}$$

où $\bar{n}\,(E)$ représente le nombre moyen des mésons des gerbes. Pour

la comparaison, ce nombre moyen $\bar{n}$ (E) est choisi identique pour les 2 distributions. Les résultats sont reproduits à la fig. 2.

Nous y voyons que les différences entre les 2 distributions ne sont pas très grandes. Alors que pour de faibles valeurs du rapport E/E_c, $p_n(E)$, dans la région du maximum, est supérieure à la probabilité correspondant à une distribution de Poisson, c'est l'invers qui se produit quand le rapport est plus grand que 5. Cette modification de comportement est due à la dépendance de $p_n(E)$ (10) en l'énergie incidente.

Je ne connais pas actuellement de résultats expérimentaux sur la distribution des probabilités $p_n(E)$, qui se rapportent à des do-

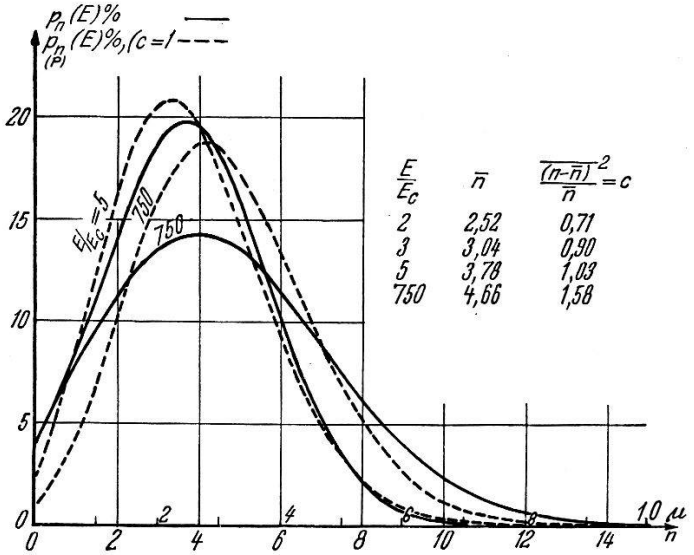

Fig. 2.

Distribution de la probabilité $p_n(E)$ (normée) pour l'obtention d'une gerbe de n mésons (neutrettos inclus) engendrée par un nucléon incident d'énergie E, pour $E/E_c=5{,}750$. $p_{n,(P)}(E)$ est la distribution correspondante de Poisson. $a_A=7$. Seule la production primaire des mésons est considérée. L'échelle μ se rapporte aux mésons chargés de la gerbe*).

maines ΔE suffisamment petits pour que l'énergie incidente $E > E_c$ soit bien déterminée, avec lesquels nous pourrions confronter nos résultats.

La faible dépendance de $\bar{n}(E)$ pour les grandes valeurs de l'énergie incidente est une conséquence de la *rapidité* de l'accumulation des courbes de la fig. 1. Ce comportement doit être caractéristique de la production purement plurale. Il ne serait certainement pas beaucoup modifié si l'on avait considéré les productions secondaires, tertiaires, etc., parce que la majeure partie de la surface limitée par la courbe $p_n(E)$ (fig. 2) se trouve dans le domaine des petites gerbes.

*) Voir note de la fig. 1 au bas de la page.

De l'augmentation correspondante de $p_n(E)$, qui n'est importante qu'à partir des gerbes de moyenne grandeur, il n'en résulterait q'un léger accroissement de $\bar{n}$, d'autant plus marqué que les valeurs de E/E_c sont grandes.

Des résultats expérimentaux de $\bar{E}(\mu)$, (μ représente le nombre des mésons chargés de la gerbe) pour le domaine $\mu = 1$ à $4\,(n \lesssim 6)$ ont été donnés par le groupe de Bristol[11]: $\bar{E}(\mu)$ est à peu près linéaire, et si l'on déduit les énergies de l'étoile de vaporisation et des neutrettos ($\mu = n$) nous avons

$$\bar{E}(n = 1) \cong 0{,}9 \cdot 10^9 \text{ eV}, \quad \frac{\bar{E}}{n} \cong 1{,}4 \cdot 10^9 \text{ eV/particule.}$$

Cette quasi-linéarité intervient aussi dans les résultats théoriques, mais sur un plus petit domaine: $\bar{n} = 2$ à 4 (voir tabelle à la fig. 2). De plus, en confrontant ces données avec nos résultats théoriques, nous obtenons pour l'énergie critique: $E_c = (1-1{,}5)\ 10^9$ eV. Cette valeur est très raisonnable. En effet il faut s'attendre à ce que la valeur théorique de E_c soit dans le domaine où la section efficace Φ n'a pas encore atteint sa valeur maximum. Remarquons que nous n'avons pas tenu compte des productions secondaires, tertiaires etc. de mésons. Il en aurait résulté une légère augmentation de la valeur de E_c, mais cette modification doit être petite puisque l'influence des petites gerbes est ici prépondérante.

Il serait intéressant de poursuivre la détermination expérimentale de $\bar{n}(E)$ pour de plus grandes valeurs de $\bar{n}$.

II. Production de mésons (primaires, secondaires, etc.) engendrés par un nucléon dont la fréquence est donnée par un spectre de puissance (14).

§ 4. Détermination de la fréquence des gerbes.

MM. Heitler et Janossy dans un article récent[2])*) ont remanié leur première théorie HJ I reposant uniquement sur la production primaire des mésons et ils ont calculé la fréquence des gerbes pénétrantes engendrées dans des noyaux de dimension infinie, en utilisant le modèle décrit au § 1 relatif à la limitation du nombre des nucléons de recul (productions primaires et secondaires) et en faisant abstraction de toutes les fluctuations des énergies. Nous tiendrons compte ici de la dimension finie du noyau et nos hypothèses de calcul correspondent à celles qui sont employées dans HJ II:

1. La production plurale de mésons est seule considérée.
2. La forme explicite de la section efficace (1) pour la production est homogène et quelconque. Pour chaque choc d'un nucléon inci-

*) Désigné ensuite par HJ II.

dent (primaire ou secondaire) avec un nucléon du noyau, les rapports des différentes énergies qui entrent en jeu sont constants: σE représente l'énergie totale perdue par le nucléon incident d'énergie $E > E_c$ et αE désigne l'énergie de recul emmagasinée par le nucléon heurté. La différence $(\sigma - \alpha) E$ correspond à l'énergie du méson émis.

Par définition nous avons, si l'on désigne par E' l'énergie du nucléon incident après le choc:

$$\sigma = \int_0^E \left(1 - \frac{E'}{E}\right) \omega \left(\frac{E'}{E}\right) \frac{d E'}{E} \tag{18}$$

3. Nous utiliserons le modèle décrit au § 1 pour la limitation du nombre des nucléons de recul et nous ne considérerons tout d'abord que les productions primaires et secondaires. Nous négligerons les énergies de recul transmises par les nucléons secondaires aux nucléons du noyau. Cette hypothèse nous conduit donc certainement à sous-estimer la capacité de production du nucléon primaire.

4. La matière nucléaire est homogène (N nucléons par unité de volume), et les chocs successifs du nucléon *primaire* sont statistiquement indépendants.

Il s'ensuit que *si* le nucléon primaire, d'énergie initiale E, a pu heurter n nucléons dans le noyau, il lui reste encore une énergie $(1-\sigma)^n E$ et les n nucléons secondaires produits ont tous l'énergie $\alpha (1-\sigma)^{n-1} E$. Pour qu'il y ait production, l'énergie incidente d'un nucléon ne doit pas être inférieure à l'énergie critique E_c. On a donc, si n désigne le nombre des émissions primaires et n' le nombre des émissions secondaires produites par le premier nucléon de recul:

$$(1-\sigma)^{n-1} \geqslant \frac{E_c}{E} \qquad \alpha (1-\sigma)^{n'-1} \geqslant \frac{E_c}{E} \qquad n' < n \tag{19}$$

où n et n' sont les plus grands entiers satisfaisant ces inégalités. Les n nucléons de recul possèdent alors tous une énergie $\leqslant E_c$ et le nombre total λ des mésons de la gerbe est donné par:

$$\lambda = n + \frac{n'(n'+1)}{2} \tag{20}$$

5. J'admets encore que les deux conditions (19) pour la production deviennent simultanément des égalités pour des mêmes valeurs de E (cette hypothèse influence le choix de la constante α, voir § 5).

Nous avons admis que la fréquence du nucléon primaire est donnée par un spectre de puissance (14). Si l'on dispose d'une épaisseur de matière nucléaire *suffisamment* grande, un nucléon primaire incident d'énergie $\geqslant E$ engendre certainement λ mésons, et sa fréquence

détermine la probabilité pour l'obtention de la gerbe correspondante. On a donc pour des valeurs de E transformant (19) en des égalités:

$$P_{\geqslant \lambda} = \left(\frac{E_c}{E}\right)^{\gamma} = \bar{\omega}^{n-1} \quad \text{où} \quad \bar{\omega} = (1-\sigma)^{\gamma} \tag{21}$$

λ se détermine à partir de (20) et de

$$n - n' = \frac{\log \alpha}{\log (1-\sigma)} = \Delta\, n \text{ (constant)} \tag{22}$$

Cette expression est donnée dans HJ II. $\bar{\omega}$ joue le même rôle que $\omega_{\gamma+1}$ dans la théorie exacte HJ I. En effet, si l'on confronte (21) pour $n' = 0$ (pas de mésons secondaires) avec le résultat exact (13) appliqué au cas d'un noyau infini $[X_n(\infty) = 1$ (11)]:

$$\omega_{\gamma+1} = \overline{\left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^{\gamma}} \sim \bar{\omega} = \overline{\left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^{\gamma}} \tag{23}$$

où $\varepsilon = E - E'$.

(21) n'est valable que s'il y a certitude que la gerbe peut se développer entièrement.

Considérons maintenant le cas du noyau de dimension finie. En vertu du modèle énoncé au § 1, nous avons que les fluctuations en position des nucléons secondaires sont couplées à celles du nucléon primaire. Il en résulte que les fonctions dépendantes des chemins parcourus par les nucléons dans le noyau, qui apparaissent dans l'expression de la probabilité, sont identiques aux fonctions en x de (5) et (7). n représente maintenant le nombre des niveaux où les émissions ont lieu. Après avoir effectué l'intégration (9), nous avons que p_n^1 (5) contient la fonction:

$$X_n(a_A) = \Gamma_n(a_A) - \frac{n(n+1)}{a_A^2}\, \Gamma_{n+2}(a_A) \tag{11}$$

qui correspond donc à la probabilité pour que le nucléon incident, d'énergie suffisante pour engendrer n mésons primaires, tombe dans une portion du noyau où la gerbe peut se développer totalement. Une fois intégré, p_n^2(7) renferme:

$$X_n(a_A) - X_{n+1}(a_A) \equiv Y_n(a_A) \tag{24}$$

qui, comme la forme l'indique, représente la probabilité pour que le nucléon incident, d'énergie supérieure à celle qui est nécessaire pour qu'il engendre n mésons primaires, tombe dans une portion du noyau où la gerbe se trouve «découpée» après le n^{me} niveau.

Le calcul de la probabilité pour l'obtention d'une gerbe de ν mésons s'effectue à l'aide de la règle suivante. Dans le spectre du

nucléon incident, découpons des bandes limitées par les abscisses $s_i = E_c/(1-\sigma)^i$. Lors de chaque choc, un nucléon (primaire ou secondaire) passe d'une bande à la précédente. La fréquence du nucléon incident, dont l'énergie est comprise entre s_{i-1} et s_i, est égale à la surface $\overline{\omega}^{i-1} - \overline{\omega}^i$ de la bande correspondante. Puisque toutes les probabilités élémentaires sont normées [(9) et (14)], nous avons que la probabilité pour l'obtention d'une gerbe de ν mésons est égale à la somme de toutes les fréquences possibles du nucléon primaire dont l'énergie est au moins suffisante pour engendrer ν mésons, multipliées par nos fonctions $X_n(a_A)$(11) ou $Y_n(a_A)$ (24) suivant que la gerbe, qui possède déjà ν mésons après les émissions du n^{me} niveau, est toute logée dans le noyau ou découpée par celui-ci. Si l'on ne considère que les mésons primaires, cette règle permet de déduire immédiatement l'expression (13). Mais une formule correspondante pour les mésons primaires et secondaires est très compliquée, parce que le développement des gerbes n'est pas régulier ($n \neq n'$). Il sera plus judicieux de calculer $P_{\geqslant \nu}$ à partir d'une table qui détaille le développement des gerbes.

§ 5. *Résultats numériques et discussions.*

Si pour la section efficace ω, nous admettons une forme identique à celle que nous avons utilisée dans la section I [(3) avec $\beta = 2$)], nous obtenons la perte d'énergie d'un nucléon, rapportée à son énergie incidente: $\sigma = {}^1/_4$ (18). Il s'ensuit $\overline{\omega} = 0{,}65$ (21), tandis que la valeur correspondante précédente était $\omega_{\gamma+1} = {}^2/_3$ (§ 3). Les 2 moyennes $\omega_{\gamma+1}$ et $\overline{\omega}$ (23) sont donc presque égales et je choisirai comme valeur de $\overline{\omega}$ celle de $\omega_{\gamma+1}$.

De plus, pour nos grandes énergies en question, il est raisonnable d'admettre que la perte d'énergie σE se répartit en parts à peu près égales entre le méson $(\sigma - \alpha)E$ et le nucléon de recul αE. D'où l'on tire $\alpha = {}^1/_8$. De cette valeur, on obtiendrait pour Δn à partir de (22), qui n'a réellement de sens que si l'hypothèse 5 est satisfaite: $\Delta n = 7{,}23$, et nous aurions un chevauchement des différentes bandes relatives à des n et n' entiers, qui découpent le spectre de puissance de la particule incidente. Mais on peut vérifier numériquement que les résultats suivants dépendent peu de α, si sa valeur varie légèrement ($7 < 1/\alpha < 10$), et pour satisfaire l'hypothèse 5 j'admettrai $\Delta n = 7$. Cela a pour conséquence d'élever un peu la valeur de α (= 1/7,5) et d'augmenter très légèrement le nombre des mésons secondaires, ce qui compense un peu la sous-estimation qu'entraîne l'hypothèse 3. Les calculs numériques sont alors très simples et la règle

du paragraphe précédent pour la détermination des probabilités est avantageusement employée à partir de la table I.

Développement des différentes gerbes de mésons (productions primaires et secondaires) en fonction du nombre des émissions primaires. Les chiffres entre parenthèses tiennent encore compte des émissions tertiaires.

Table I.

i:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
m \ λ	1	2	3	4	5	6	7	9	12	16	21	27	34	42	51(52)	61(65)	72	(82)
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2		2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
3			3	3	3	3	3	4	6	6	6	6	6	6	6(7)	6(7)	6(7)→	
4				4	4	4	4	5	7	10	10	10	10	10	10(11)	10(14)	10(14)→	
5					5	5	5	6	8	11	15	15	15	15	15(16)	15(19)	15(25)→	
6						6	6	7	9	12	16	21	21	21	21(22)	21(25)	21(31)→(41)	
7							7	8	10	13	17	22	28	28	28(29)	28(32)	28(38)	
8								9	11	14	18	23	29	36	36(37)	36(40)	36(46)	
9									12	15	19	24	30	37	45(46)	45(49)	45(55)	
10										16	20	25	31	38	46(47)	55(59)	55(65)	
11											21	26	32	39	47(48)	56(60)	66(76)	
12												27	33	40	48(49)	57(61)	67(77)	
13													34	41	49(50)	58(62)	68(78)	
14														42	50(51)	59(63)	69(79)	

Chaque colonne de cette table correspond à 2 valeurs successives de l'indice de l'abscisse $s_i = E_c/(1-\sigma)^i$ des différentes bandes que nous avons découpées dans le spectre de puissance du nucléon incident, et donne le nombre total ν des émissions de mésons de la gerbe correspondante, qui ont lieu pendant les m premières émissions primaires. λ (20) représente le nombre total des mésons des gerbes qui ont pu se développer complètement dans le noyau. Les petites flèches de la dernière colonne indiquent que, dans la ligne correspondante, le nombre des émissions tertiaires ne croît plus.

Pour déterminer la probabilité $P_{\geqslant \nu}$, il suffit de tracer dans la table I toutes les lignes horizontales m possibles en dessus desquelles le nombre des émissions de mésons est $\geqslant \nu$. Puis, à chaque portion de ligne m, limitée par deux abscisses s_i, on fait correspondre une fonction X_m si la ligne est en dessous de toute la gerbe λ, et Y_m si la ligne coupe la gerbe. La règle suivante simplifie ces calculs à l'extrême:

La contribution $c_{k\,i}\,(a_A)$ à la probabilité $P_{\geqslant \nu}$ de toutes les portions de lignes k, $k+1$, ... situées à droite de l'abscisse s_i est: $\omega^i_{\gamma+1}\,X_k(a_A)$. Les résultats s'écrivent directement. Si nous ne con-

sidérons que les productions primaires et secondaires, nous avons par exemple:

$$P_{\geqslant 20}(a_A) = \omega_{\gamma+1}^{11} X_6(a_A) + (\omega_{\gamma+1}^{10} - \omega_{\gamma+1}^{11}) X_{10}(a_A)$$

Ces probabilités sont normées. (P_0 est identique à la valeur correspondante de la section I). Le résultat des calculs de la probabilité $P_{\geqslant \nu}$ pour l'obtention d'une gerbe d'au moins ν mésons (neutrettos inclus) est représenté à la fig. 3 pour le cas $a_A = 7$ (Ag). La courbe PS, relative aux émissions primaires et secondaires, n'est pas continue. Les irrégularités sont dues à nos hypothèses qui ne tiennent pas compte de la diffusion des nucléons dans le noyau. On les atténue en adoptant une valeur de α qui entraîne un chevauchement des différentes bandes découpées dans le spectre du nucléon incident et qui correspondent aux valeurs entières de n et n'. Mais les calculs sont plus longs et les deux courbes moyennes sont presque identiques. Il est plus avantageux de tenir encore compte des productions tertiaires de mésons qui proviennent des énergies de recul des nucléons secondaires (voir § 1) (courbe PST). Les irrégularités sont alors extrêmement petites et la différence entre ces résultats et la courbe moyenne précédente PS n'est appréciable que pour les très grandes valeurs de ν.

Généralisation. Nous n'avons jamais distingué de différence entre les sections efficaces correspondant aux différents chocs: proton-proton, proton-neutron, neutron-proton, etc. et, pour les grandes énergies dont il est question ici, il n'existe encore aucun renseignement relatif à ce sujet. Cependant il n'est pas du tout certain que des écarts n'interviennent pas. Mais notre point de vue se justifie, car nous ne considérons pas la charge des particules primaires avant l'interaction avec le noyau (les fréquences du proton et du neutron sont environ égales). Nous aurons en effet que les différences entre les diverses sections efficaces s'annuleront en moyenne, grâce à une certaine symétrie du système proton-neutron qui doit indubitablement exister.

Les neutrettos des gerbes ne peuvent pas être observés expérimentalement. Il est donc plus intéressant de connaître la probabilité P'_μ pour l'obtention des gerbes correspondant à un certain nombre μ de mésons chargés. Pour calculer P'_μ, nous supposerons que la probabilité δ, pour qu'une émission corresponde à celle d'un neutretto, est indépendante de la sorte de choc qui produit l'émission. Là également, l'intervention des 2 sortes de particules primaires justifie cette approximation. Nous avons:

$$P'_\mu(a_A) = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \binom{\nu}{\mu} (1-\delta)^\mu \delta^{\nu-\mu} P_\nu(a_A) \tag{25}$$

La normalisation de P_ν entraîne celle de P'_μ. Quant à δ nous admettons la valeur citée dans HJ I: $\delta = {}^1/_3$, qui est la valeur probable obtenue de la théorie symétrique. Une grandeur de δ presque identique a été trouvée expérimentalement par Carlson, Hooper, King[12]).

Les résultats de calculs de $P'_{\geqslant\mu}$ sont reproduits à la fig. 3. La courbe «plaque photo» se rapporte à une même combinaison de

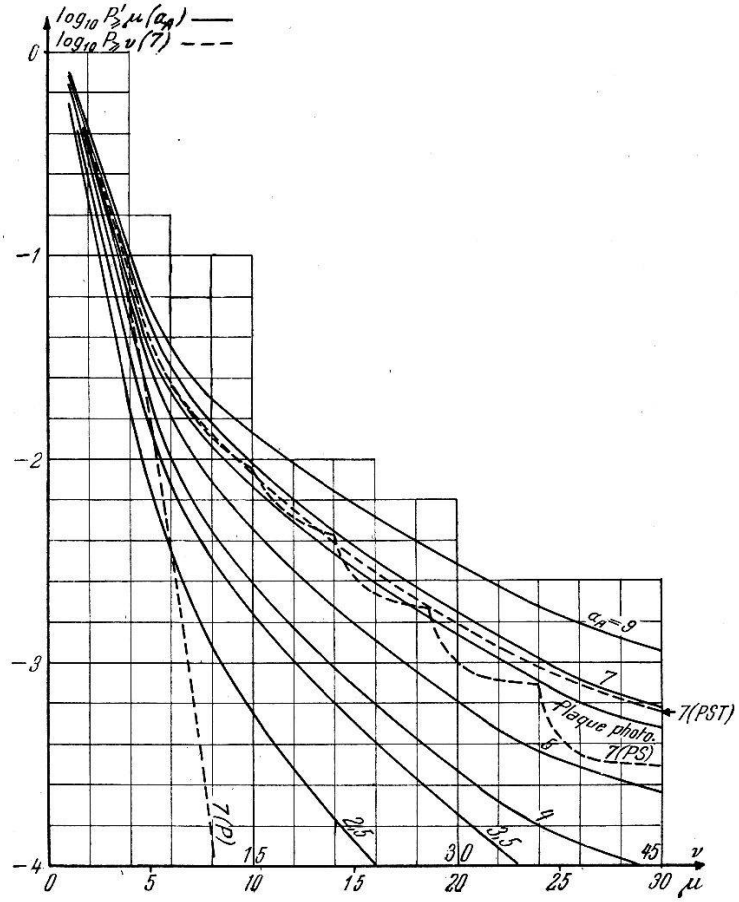

Fig. 3.

$\log_{10} P'_{\geqslant\mu}(a_A)$ probabilité normée pour l'obtention d'une gerbe d'au moins μ mésons chargés en fonction de μ, compte tenu des émissions primaires, secondaires et tertiaires, pour différents a_A dont les valeurs sont inscrites sur les courbes correspondantes (traits pleins). Les courbes pointillées représentent $P_{\geqslant\nu}(a_A = 7 \sim \mathrm{Ag})$ probabilité pour l'obtention d'une gerbe de ν mésons (neutrettos inclus) en fonction de ν. La courbe P est déduite de la théorie exacte HJI pour émissions primaires seulement. Les courbes PS et PST se rapportent respectivement aux émissions primaires-secondaires et primaires-secondaires-tertiaires. Le rapport des 2 échelles ν et μ est tel que $\nu = 3/2\,\mu$.

noyaux que celle qui intervient dans la couche sensible des plaques photographiques. Pour une émulsion normale, les nombres relatifs d'atomes des principaux éléments contenus dans un certain volume d'émulsion renfermant 100 atomes d'hydrogène, sont: Ag 31, Br 30;

C 49, O 27, N 10, H 100. Groupons ces différents corps en 2 classes: les éléments légers C, O, N (59%) auxquels nous attribuons le a_A du plus lourd des corps de la classe $a_A = 3{,}5$ et les éléments lourds: Ag, Br (41%) avec $a_A = 7$. On a en effet que, compte tenu de la normalisation, l'influence des atomes lourds est prépondérante. Il suffit alors de combiner les probabilités correspondant à ces 2 classes suivant ces pourcentages et en tenant encore compte des

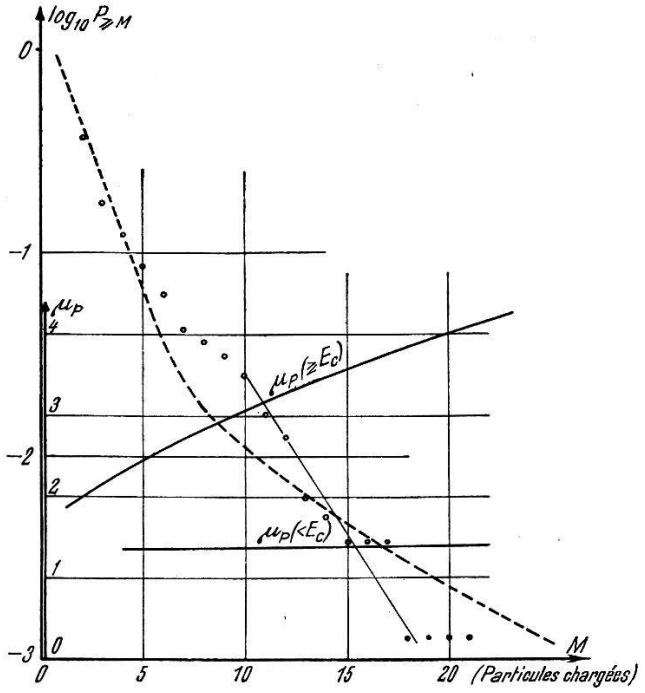

Fig. 4.

Résultats expérimentaux obtenus par la méthode de la plaque photographique (Powell[11]) de la probabilité $P_{\geqslant M}$ pour l'obtention de gerbes d'au moins M particules chargées (mésons et protons) dont la ionisation des traces correspondantes est au plus égale à 1,5 ionisation minimum (indiqués par ∘). Ils sont normés pour correspondre aux résultats théoriques (courbe pointillée) au point $M = 4$. La probabilité théorique, normée, pour l'obtention de gerbes (émissions primaires-secondaires-tertiaires) dans une émulsion normale de plaque photographique, se rapporte à M particules chargées dont 20% sont des protons. $\mu_P(\lesssim E)$ et $\mu_P(<E_c)$ représentent le nombre des protons des classes $\lesssim E_c$ et $<E_c$, en fonction du nombre total M des particules chargées peu ionisantes de la gerbe (mésons et protons d'énergie $>E_c$). Ces μ_P correspondent aux nucléons primaire et secondaires et représentent plutôt des limites inférieures pour les vraies valeurs.

différentes sections des noyaux. La probabilité $P_{\geqslant \nu}$ ($a_A = 7$), relative au nombre total des mésons, neutrettos compris, est aussi mentionnée à la fig. 3 (courbe PST). Nous voyons que $P'_{\geqslant \mu}$ est presque identique à la probabilité que l'on obtient à partir de $P_{\geqslant \nu}$, s'il est admis que le nombre des mésons chargés est $\mu = 2/3\ \nu$.

Confrontons nos résultats avec certains résultats expérimentaux. Tout d'abord MM. Powell et ses collaborateurs[13]) ont déterminé

la probabilité $P_{\geqslant M}$ pour l'obtention de gerbes de particules chargées (mésons et protons) par la méthode de la plaque photographique (plusieurs milliers de mesures). Deux séries de mesures ont été faites: l'une à l'altitude de 4000 m et l'autre à 21 km, et les 2 résultats correspondants sont presque identiques. Les résultats expérimentaux de la somme des 2 séries de mesures sont reproduits à la fig. 4, afin de les confronter avec les nôtres.

Nous constatons que l'allure générale du phénomène est bien reproduite par la théorie, et que l'hypothèse de la production plurale permet de déduire des probabilités qui sont en bon accord avec l'expérience, même pour les très grandes gerbes.

Les résultats expérimentaux obtenus à l'aide d'une chambre de Wilson contrôlée par des bancs de compteurs, ne peuvent pas être confrontés directement avec nos résultats, parce que cet appareillage selectionne les grandes gerbes avec une *grande* préférence, ce qui fausse la statistique au détriment des petites gerbes. Pour cette raison, je ne discuterai pas ici des résultats du groupe de Manchester (Butler, Rosser, Barker[14]). Cependant nous voulons encore rapidement discuter les résultats de Fretter[15]), parce qu'ils se rapportent à des gerbes engendrées dans des noyaux légers (Lithium). Dans le cas des grandes gerbes (10 particules pénétrantes chargées) il est probable que le noyau de lithium explose *totalement* et l'on peut présumer que sur 10 particules chargées, 4 sont des protons (3 protons du Li + proton incident). En supposant la production plurale, une gerbe de 10 particules chargées (fig. 3, $\mu = 6$ mésons chargés, $a_A = 2{,}5$) n'est *pas impossible* à obtenir, malgré l'affirmation contraire de M. Fretter. Nous pouvons approximer le facteur de préférence inhérent au mode d'enregistrement. Théoriquement, le quotient de la probabilité pour l'obtention d'une gerbe de $\geqslant 4$ mésons chargés (accompagnés probablement d'au moins 2 protons rapides) rapportée à la probabilité pour une gerbe de $\geqslant 2$ mésons chargés est $^1/_{10}$. Les résultats expérimentaux de M. Fretter donnent $^3/_{14}$ pour la valeur de ce quotient. Le facteur de préférence serait donc environ 2, ce qui est tout à fait plausible. Il faut encore remarquer que les mesures de M. Fretter sont trop peu nombreuses (14 en tout) pour établir une statistique et déduire des résultats déterminants.

§ 6. Les protons des gerbes.

Les gerbes de mésons sont généralement accompagnées de traces de plus ou moins grande ionisation, qui correspondent en général à des protons, d'énergies diverses. Aux protons que nous considé-

rerons ici, nous ferons correspondre les éléments chargés des différents nucléons primaire et de recul qui ont contribué à la formation de la gerbe de mésons, et qui peuvent s'échapper du noyau en ayant encore une énergie suffisamment grande pour que la diffusion nucléon-nucléon dans le noyau, principale cause des étoiles de vaporisation, ne soit pas importante ($>10^8$ eV). Nous faisons donc abstraction des protons de vaporisation. Cependant il est clair qu'une délimitation exacte entre ces 2 catégories de protons est impossible. Nous voulons approximer ici le pourcentage $\mu_P\%$ des protons dont les énergies sont comprises dans certains intervalles, par rapportau nombre total des éléments chargés de la gerbe (mésons et protons d'énergie $> E_c$). Nous pourrions déterminer μ_P, par exemple à partir de la théorie des cascades de nucléons dans la matière homogène. Cependant il est en général admis que la section efficace totale pour un choc nucléon-nucléon est constante, ce qui est approximativement juste pour les énergies supérieures à l'énergie critique E_c. Mais alors l'interaction des nucléons de la cascade avec ceux du noyau est élevée et il est très possible qu'une grande partie de ces nucléons aient provoqué un nombre suffisant de collisions pour que leur énergie, sur une portion de leur trajectoire dans le noyau, soit dans le voisinage de E_c ($1 - 3 \cdot 10^9$ ev.), où la section efficace correspondant à la production des mésons décroît rapidement. De plus la diffusion nucléon-nucléon, qui diminue pour les valeurs croissantes de l'énergie, ne doit probablement être importante que pour des énergies $\leqslant 5 \cdot 10^8$ eV. Il en résulte que le noyau possède un domaine de relative transparence pour les nucléons de recul dont l'énergie est de l'ordre de grandeur de $5 \cdot 10^8$—10^9 eV, où la section efficace totale n'est pas très grande (1—$2 \cdot 10^{-26}$ cm^2, voir HJ II). Il est donc préférable d'user d'un autre mode de détermination de μ_P, et nous emploierons dans ce but le modèle décrit au § 1, sur lequel reposent tous nos résultats précédents. Nous considérerons le nombre des protons μ_P dont les énergies correspondent aux 2 classes suivantes:

1. Les protons (rapides) ont une énergie supérieure à l'énergie critique E_c.

$\mu_P(> E_c)$ s'obtient de la table I en faisant une moyenne des différents $\mu_P(i, m)$ correspondants, pour chaque bande i et ligne m où la gerbe possède exactement ν éléments. Pour le calcul, il est admis que chaque nucléon a la probabilité $^1/_2$ d'être un proton, ce qui est également valable, d'après les données de l'expérience, pour le nucléon primaire incident. Puis $\mu \cong 2/3\ \nu$. Nos résultats présenteront naturellement des irrégularités du même genre que

celles qui intervenaient dans la probabilité $P_{\geqslant \nu}(a_A)$ pour l'obtention des gerbes de mésons (courbe PS, fig. 3).

2. Les protons ont une énergie quelconque $\lesseqgtr E_c$.

Les résultats des calculs de μ_P correspondant à ces 2 classes d'énergies sont donnés à la table II.

Pourcentage μ_P des protons des classes d'énergies $>E_c$ et $\lesseqgtr E_c$, rapporté au nombre total des éléments chargés de la gerbe (mésons et protons d'énergie $>E_c$), calculé pour $a_A = 7$ (Argent).

Table II.

ν	$\mu_P\,(>E_c)$ %	$\mu_P\,(\lesseqgtr E_c)$ %
3	7	92
6	9	55
8	16	42
10	19	35
15	16	27
21	14	23
28	13	19
36	12	17
45	11	15

Ces valeurs ne correspondent qu'aux nucléons primaire et secondaires. ν est le nombre total des mésons des gerbes, neutrettos compris.

La différence des valeurs de $\mu_P(\lesseqgtr E_c)$% et $\mu_P(>E_c)$% correspond au pourcentage $\mu_P(< E_c)$% des protons dont l'énergie est approximativement comprise dans le domaine ($3 \cdot 10^8$ et 10^9) eV. Quant à ces protons, d'énergie $< E_c$ certains d'entre eux apparaissent sous forme de «traces grises». D'autres peuvent transmettre au noyau une portion notable de leur énergie et provoquer une vaporisation. Enfin il est encore possible qu'une partie de ces protons soient enregistrés comme protons rapides, quand leur énergie est proche de $E_c(1-3)10^9$ eV. Remarquons qu'il n'est pas forcé que tous ces protons soient émis simultanément, et leur répartition en ces 3 catégories ne peut pas être déduite de notre modèle. Leur nombre donne plutôt une mesure de l'énergie totale qui est à la disposition des particules des traces grises et des traces de l'étoile de vaporisation.

Remarquons encore que notre modèle du § 1 limite par trop le nombre des protons de recul en supprimant totalement les nucléons tertiaires, et nos résultats $\mu_P(>E_c)$ et $\mu_P(<E_c)$, qui ont plutôt une valeur qualitative, doivent être considérés comme des *limites inférieures*. Cependant, ils redonnent assez bien ce que l'on connaît de

l'expérience. Par exemple FOWLER[16]) trouve qu'il n'existe que peu de protons rapides ($>E_c$) dans les gerbes, ce qui s'accorde avec nos valeurs de $\mu_P(>E_c)$.

Tout récemment MM. CAMERINI, DAVIES, FOWLER, FRANZINETTI, LOCK, PERKINS et YEKUTIELI*) ont déterminé expérimentalement le nombre des protons qui accompagnent la gerbe, en fonction du nombre total de ses mésons. Les protons sont groupés en différentes classes caractérisées par différents domaines d'énergie. Leurs résultats essentiels sont: 1. le nombre des protons d'énergie $< E_c$ croît plus lentement que le nombre des mésons; 2. il en est *probablement* de même pour les protons rapides; 3. l'énergie totale de vaporisation libérée lors de ce processus croit *lentement* avec le nombre des mésons. S'il est admis que la production des mésons est purement plurale, ces résultats ne sont que la conséquence du fait que les différentes directions des nucléons primaire et secondaires sont presque parallèles. Les caractéristiques des étoiles de vaporisation, qui sont spécialement fonction des nucléons de recul, ne doivent donc pas beaucoup dépendre de la quantité des mésons. Les nombres théoriques des protons d'énergie $\lesseqgtr E_c$ et $< E_c$ sont représentés à la figure 4 en fonction du nombre total M des particules chargées peu ionisantes de la gerbe: mésons et protons d'énergie $> E_c$. Selon nos prévisions, nos résultats sont inférieurs aux résultats expérimentaux du groupe de Bristol cité ci-dessus. De plus nous obtenons que $\mu_P(< E_c) = \mu_P(\lesseqgtr E_c) - \mu_P(>E_c)$ est à peu près constant, tandis que logiquement la valeur correspondante doît croître quand M augmente. Ceci resulte de notre modèle qui ne peut plus fournir des résultats approximatifs quand les énergies sont faibles, puisque dans ce cas, les angles entre les différents nucléons de recul ne sont certainement plus petits. Puis remarquons qu'il n'est guère possible, à partir de ce modèle, de déterminer le nombre des protons des classes d'énergies $< E_c$ et $> E_c$. En effet nous n'avons pas tenu compte des différentes pertes d'énergie par diffusion des nucléons de recul avec les nucléons du noyau, et notre valeur de $\mu_P(>E_c)$ doit comprendre un peu de protons d'énergie $< E_c$. Par conséquent notre résultat essentiel est que le nombre $\mu_P(\lesseqgtr E_c)$ des protons, d'énergie quelconque, croît lentement avec M. Des comparaisons que nous avons pu faire sur le nombre des protons, entre les résultats expérimentaux et nos résultats théoriques dont la valeur est plutôt qualitative, nous concluons que la production plurale peut tout aussi bien décrire les phénomènes que le production mixte par exemple.

---

*) Communication privée de M. CAMERINI à M. HEITLER.

III. La gerbe de mésons est due à la diffusion d'un méson incident dans le noyau.

§ 7. *Généralités.*

Ces calculs de la probabilité pour l'obtention de gerbes développées lors du passage de mésons π à travers un noyau, reposent sur un modèle d'interaction énoncé dans HJ II, où il est admis que le méson incident est diffusé par un nucléon du noyau. Il s'ensuit que ce dernier peut engendrer une gerbe par choc, si l'énergie qu'il a reçue est suffisante.

Nous admettrons pour la section efficace différentielle relative à la diffusion du méson incident par *un* nucléon du noyau:

$$\varphi(E, \varepsilon)\, dE = \varphi(\varepsilon) \frac{dE}{\varepsilon} \quad \text{où} \quad \varphi(\varepsilon) = \frac{\varphi}{\varepsilon^{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \varphi = \text{const} \\ \alpha \geqslant 0 \text{ quelconque} \end{array} \tag{26}$$

où E représente l'énergie transmise au nucléon diffusant par le méson d'énergie incidente ε. Cette hypothèse est plausible. En effet, la section efficace $\varphi(\varepsilon)$ doit certainement décroître ou, au plus, rester constante pour des valeurs croissantes de ε, et par un choix judicieux de la valeur de α, il doit être possible d'approximer la section efficace réelle d'une façon satisfaisante.

Quant à la diffusion du méson, dans le noyau, remarquons que nous n'avons considéré que la contribution d'*un seul* nucléon. Mais il serait faux d'additionner les contributions de chaque nucléon du noyau, car les effets se recouvrent en partie. Il est cependant possible, notamment lors des grandes gerbes, que le méson incident soit plusieurs fois diffusé par différents nucléons d'un même noyau. En effet, parmi les différentes étoiles secondaires excitées par des mésons incidents provenant de gerbes primaires, qui ont été observées par MM. Lock et Yekutieli*), il se trouve des étoiles pour lesquelles le quotient entre les énergies des mésons diffusé et incident est beaucoup trop faible (0,02—0,1) pour que ces cas correspondent à une unique diffusion. (Toutes ces étoiles ne possèdent qu'un seul méson: le méson diffusé.) Cette grande perte d'énergie serait difficile à accorder avec le fait expérimental que dans le cas des gerbes engendrées par des nucléons, les mésons peuvent *facilement* s'échapper du noyau. (Il faut cependant observer une certaine réserve, à propos de ces résultats, parce qu'ils ne se rapportent qu'à un domaine d'énergie $<10^3$ MeV). La pluralité des diffusions

*) Communication privée de M. Camerini à M. Heitler.

dans un noyau entraîne forcément un accroissement du nombre des mésons des gerbes. Mais ce problème général est compliqué et nous ne considérerons ici que le cas de la diffusion simple. Nous obtiendrons ainsi la partie principale de la gerbe.

Dans notre domaine d'énergie, on ne peut pas non plus écarter l'éventualité où le méson incident est divisé lors d'une diffusion (processus multiple). Dans la table de MM. Lock et Yekutieli, il se trouve une étoile engendrée par un méson d'énergie égale à 10^3 MeV, qui possède 2 traces de mésons π. Ce cas pourrait correspondre à celui d'une gerbe de 1 méson plus le méson diffusé, mais il est plus probable qu'il s'agisse ici d'un processus multiple, puisque l'énergie incidente $<E_c$. De ces résultats expérimentaux, on déduit que la fréquence de tels processus multiples ne doit certainement pas être supérieure à 20% de la totalité des diffusions (ici aussi ce chiffre ne correspond pas à notre domaine d'énergie). Comme nous l'avons toujours fait précédemment, nous supposerons que la diffusion simple est plus fréquente que les processus multiples, dont nous ferons abstraction.

Remarquons pour finir, qu'à part la diffusion, le méson incident est encore soumis à d'autres effets (capture directe du méson, transformation en rayon γ) mais ces derniers sont probablement moins fréquents et nous les négligerons ici.

§ 8. *Calcul de la fréquence des gerbes.*

En plus du modèle relatif à la diffusion décrit ci-dessus, où nous admettrons encore que les trajectoires du méson incident et du nucléon diffusant sont parallèles, nous introduirons les 4 hypothèses de la section I § 2 concernant la production de la gerbe par le nucléon diffusant. (Les productions secondaires, tertiaires, etc. de mésons sont négligeables ici, parce que les énergies en jeu sont plus faibles que dans le cas du nucléon incident.) Il est plus simple de calculer la probabilité en admettant pour $\Phi(E', E)\,dE'$ (1) une forme homogène quelconque. Le résultat est sous la forme d'une série, et c'est seulement quand nous approximerons cette série qu'une forme déterminée de $\Phi(E'/E)$ sera nécessaire.

Le méson incident est naturellement le produit d'une collision, antérieure à l'interaction en question, entre un nucléon cosmique et celui d'un noyau. De là il est aisé de déduire que la fréquence du méson incident est donnée par un spectre de puissance de même forme que le spectre relatif au nucléon cosmique (14). En effet, supposons pour simplifier que ce nucléon d'énergie E_0 n'engendre

qu'un seul méson (ε), lors de son passage dans un noyau. Le spectre du méson sera:

$$S(\varepsilon)\,d\varepsilon = \text{const} \int\limits_{E_0=\varepsilon}^{\infty} \frac{dE_0}{E_0^{\gamma+1}}\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{E_0}\right)\frac{d\varepsilon}{E_0} = \text{const}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{\gamma+1}} \int\limits_1^{\infty} \frac{du}{u^{\gamma+2}}\,\Phi(u)$$

$$\left(u = \frac{E_0}{\varepsilon}\right)$$

L'intégrale de droite est une constante et nous obtenons en normalisant le spectre:

$$S(\varepsilon)\,d\varepsilon = \gamma\,E_c^{\gamma}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{\gamma+1}} \qquad \gamma \cong 1{,}5 \qquad \varepsilon \geqslant E_c \tag{27}$$

Nous avons normé toutes les probabilités élémentaires. Mais il existe une certaine probabilité pour que le méson incident sorte du noyau sans être diffusé. Or, pour comparer nos résultats avec ceux de l'expérience, il ne faut considérer que les cas où il y a interaction du méson avec le noyau, puisque dans le cas contraire l'expérience ne décèle rien. Soit K^{-1} la probabilité pour avoir certainement diffusion, l'énergie transmise au nucléon diffusant étant quelconque ($\lessgtr E_c$). Il suffira de multiplier par K l'expression de la probabilité pour l'obtention des gerbes, pour que la normalisation soit correcte (parmi un certain nombre de mésons incidents d'énergie $\geqslant E_c$ il y en a sûrement *un* qui est diffusé). Désignons par x la longueur maximale de chemin que le méson incident peut parcourir dans le noyau de diamètre d_A, et par z la position du lieu de diffusion sur ce chemin. Nous avons:

$$K^{-1} = \int\limits_0^{d_A} \frac{2\,x\,dx}{d_A^2}\,\gamma\,E_c^{\gamma} \int\limits_{E_c}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{\gamma+1}} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dE}{\varepsilon} \int\limits_0^{x} dz\,N\,\varphi(\varepsilon)\,e^{-\varphi(\varepsilon)Nz} \tag{28}$$

L'exponentielle représente la probabilité pour qu'il n'y ait pas de diffusion avec un échange quelconque d'énergie, le long de z. Elle doit donc bien contenir la section efficace totale correspondante.

En intégrant par partie on obtient immédiatement, si b_A désigne la grandeur correspondant à a_A(11) pour la diffusion: $b_A = \varphi N d_A / E_c^{\alpha}$

$$K^{-1} = \Gamma_1(b_A) - \frac{2\gamma}{\gamma-2\alpha}\,\frac{1}{b_A^2}\,\Gamma_3(b_A) + \frac{2\alpha\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)!}{\gamma-2\alpha}\,\frac{1}{b_A^{\gamma/\alpha}}\,\Gamma_{\frac{\gamma}{\alpha}+1}(b_A);\ \left(\alpha \neq \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$K^{-1} = X_1(b_A) \qquad (\alpha = 0) \tag{29}$$

La probabilité pour que le nucléon diffusant produise $n-1$ émis-

sions individuelles de mésons dans les intervalles x_i, $x_i + dx_i$ ($i = 1, \ldots, n-1$) répartis le long de sa trajectoire et subisse une perte totale d'énergie $E - E_{n-1}$, est donnée par l'expression (4) ($x_n < x - z$). Il faut de nouveau envisager les 2 possibilités pour l'énergie E_n, qui peuvent intervenir lors de la dernière émission dans l'intervalle x_n, $x_n + dx_n$. Employons les mêmes notations qu'en section I pour la probabilité: p^q où $q = 1$ pour $E_n < E_c$ et $q = 2$ pour $E_n > E_c$. Pour isoler les différentes intégrales sur les sections efficaces et les rendre indépendantes les unes des autres, il est nécessaire que les nouvelles variables d'intégration soient fonction de E_{i-1}/E_i. Le choix $y_i = \log E_{i-1}/E_i$ est commode (HJ I). De la forme des domaines d'intégration, nous déduisons que les y_i varient entre les limites fixes: 0 et ∞ si les axes de ces nouvelles variables y_i sont parallèles à E_{i-1}. E_{n+q-2} doit donc rester variable indépendante et l'on substitue:

$$Y, y_1, y_2, \ldots, y_{n+q-3}, E_{n+q-2}$$

à

$$E \equiv E_0, E_1, E_2, \ldots, E_{n+q-3}, E_{n+q-2} \tag{30}$$

où

$$Y = \sum_{i=1}^{n+q-2} y_i = \log \frac{E}{E_{n+q-2}}, \quad \text{remplacé ensuite par } y_{n+q-2}$$

Quant à $q = 1$, on remplace E_n par $\xi = E_n/E_{n-1}$ et l'intégrale sur ξ précède celle sur E_{n-1}.

En nous servant de la substitution (30), l'équation (4) peut s'écrire:

$$p_{n-1}\, dE_{n-1} = \frac{dE_{n-1}}{E}\, q_{n-1} \frac{(\Phi N x_n)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\Phi N x_n}$$

où

$$q_{n-1} = \int \ldots \int \omega(y_1) \cdot \omega(y_2) : \ldots : \omega(y_{n-1})\, d y_1 \ldots d y_{n-2} \tag{31}$$

La probabilité pour l'obtention d'une gerbe de n mésons quand l'énergie E_n du nucléon après le dernier choc est $< E_c$, est donnée par:

$$p_n^1(x) = K \int_0^x dz \int_0^{x-z} \frac{(\Phi N x_n)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\Phi N x_n}\, \Phi N\, d x_n\, \gamma E_c^\gamma \int_{E_c}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{\gamma+1}} \int_{E_c}^{\varepsilon} \frac{dE}{\varepsilon}$$

$$\cdot\, N \varphi(\varepsilon)\, e^{-\varphi(\varepsilon) N z} \int_{E_c}^{E} q_{n-1} \frac{d E_{n-1}}{E} \int_0^{E_c} \omega\left(\frac{E_n}{E_{n-1}}\right) \frac{d E_n}{E_{n-1}} \tag{32}$$

Il est possible de séparer les intégrations sur les chemins et sur

les énergies par la méthode suivante. Après avoir permuté les intégrations sur ε et E (32) possède l'intégrale:

$$A = \int_E^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{\gamma+2}} e^{-\frac{\varphi}{\varepsilon^\alpha} Nz} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\alpha} - 1\right)!}{\alpha} (\varphi N z)^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} \Gamma_{\frac{\gamma+1}{\alpha}} (E^{-\alpha} \varphi N z)$$

et si l'on explicite la fonction Γ suivant sa série, on reçoit:

$$A = \frac{1}{E^{\gamma+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{\gamma+1+i\alpha} \left(\frac{\varphi N z}{E^\alpha}\right)^i$$

A l'aide de ce développement et de la substitution (30), l'intégration de (32) sur les énergies est immédiate. $p_n^2(x)$ se calcule de la même façon. La somme de ces 2 probabilités partielles présente des différences du même genre que celles qui interviennent dans (13). Il est donc plus simple de considérer $p_{\geqslant n}(x)$, pour lequel on reçoit:

$$p_{\geqslant n}(x) = \frac{K}{\gamma+1} \omega_{\gamma+1}^{n-1} \Gamma_n(\Phi N x) - K \sum_{i=0}^{\infty} \omega_{\gamma+1+i\alpha}^{n-1} C(n-1, i, x); \qquad n \geqslant 1 \tag{33}$$

où

$$C(n, i, x) = (-1)^i \frac{\gamma}{(\gamma+i\alpha)(\gamma+i\alpha+1)} \left(\frac{\varphi}{\Phi E_c^\alpha}\right)^i \int_0^{\Phi N x} \frac{z^i}{i!} \frac{(x-z)^n}{n!} e^{-(x-z)} dz$$

$$\omega_{\gamma+1+i\alpha} = \int_0^E \omega\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\gamma+i\alpha} \frac{d\varepsilon}{E} \tag{34}$$

Le premier terme de $p_{\geqslant n}(x)$ est, abstraction faite du coefficient, identique à la solution de HJ I, valable pour le cas où la particule incidente est un nucléon [cf. (13) avant d'avoir effectué l'intégration (9)]. Il est égal au premier terme de la somme, car $C(n-1, 0, x) = 1/\gamma+1\ \Gamma_n(\Phi N x)$. Le résultat (33) n'est pas encore satisfaisant, car la série converge très lentement.

Mais occupons nous tout d'abord du cas $\alpha = 0$. La série (33) peut ici se calculer exactement. Il ne reste plus qu'à effectuer l'intégration (9) pour obtenir la probabilité $P_{\geqslant n}(\alpha = 0)$, qui correspond au cas où le point d'impact du méson incident sur le noyau est quelconque. Si l'on introduit l'expression de K (29), nous obtenons

$$P_{\substack{\geqslant n \\ (\alpha=0)}} = \frac{1}{(\gamma+1) X_1(b_A)} \omega_{\gamma+1}^{n-1} \left\{ X_n(a_A) - \frac{2}{b_A^2} \left[\frac{[\Gamma_2(b_A) - 1] \Gamma_n(a_A - b_A)}{\left(1 - \frac{b_A}{a_A}\right)^n} + n \frac{b_A}{a_A} \Gamma_{n+1}(a_A) + \Gamma_n(a_A) \right] \right\} \qquad n \geqslant 1 \tag{35}$$

$$a_A = \Phi N d_A \,(11); \qquad X_n(a_A)\,(11); \qquad b_A = \varphi N d_A \,(29);$$

$$\omega_{\gamma+1} = \int_0^E \omega\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\gamma} \frac{d\varepsilon}{E} \qquad (34)$$

Ce résultat n'est valable que pour $n \geqslant 1$. Quant à $n = 0$, nous devons considérer les possibilités où l'énergie du nucléon diffusant est $> E_c$ et $< E_c$. Je n'écrirai pas ces expressions, à partir desquelles nous pourrions constater que nos probabilités sont correctement normées.

Considérons maintenant le cas général $\alpha \neq 0$ et supposons, afin de pouvoir approximer la série intervenant dans $p_{\geqslant n}(x)$ (33), que la section efficace pour le choc nucléon-nucléon soit de la forme donnée par l'expression (3). De cette hypothèse, nous obtenons pour la constante $\omega_{\gamma+1+i\alpha} = (\beta+1)/(\gamma+i\alpha+\beta+1)$ (34). Désignons par $\mathfrak{p}_n(x)$ la série de l'expression (33). En explicitant $C(n-1, i, x)$, nous obtenons

$$\mathfrak{p}_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\gamma}{(\gamma+i\alpha)(\gamma+i\alpha+1)} \left(\frac{\beta+1}{\gamma+i\alpha+\beta+1}\right)^{n-1} \left(\frac{\varphi}{\Phi E_c^{\alpha}}\right)^i$$

$$\int_0^{\Phi N x} \frac{z^i}{i!} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(x-z)}\, dz \qquad (36)$$

Cette série ressemble beaucoup à la série exponentielle. Nous voulons transformer les 2 premiers facteurs et les écrire sous forme de puissance de i. Dans ce but, il est commode de faire usage de la loi des compositions de la théorie des transformations de Laplace. Soit $s = \gamma + i\alpha$. Nous obtenons:

$$\frac{1}{s(s+1)(s+\beta+1)^{n-1}} = \mathrm{L}\left(\int_0^t [1-e^{-(t-\tau)}] \frac{\tau^{n-2}}{(n-2)!} e^{-(\beta+1)\tau} d\tau\right)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt$$

$$F(t) = \frac{1}{(\beta+1)^{n-1}} \Gamma_{n-1}([\beta+1]t) - \frac{e^{-t}}{\beta^{n-1}} \Gamma_{n-1}(\beta t) \qquad n > 1$$

$$F(t) = 1 - e^{-t} \qquad n = 1$$

Ne considérons tout d'abord que le cas $n > 1$. La somme (36) est

à présent une série exponentielle, qui converge pour toutes les valeurs possibles de t. Après sommation, nous obtenons ($b = \varphi N/E_c^{\alpha}$):

$$\mathfrak{p}_n(x) = \gamma \int_0^x \frac{[\Phi N(x-z)]^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Phi N(x-z)} \Phi N dz \int_0^\infty dt e^{-bze^{-\alpha t}}$$

$$e^{-\gamma t} (\beta+1)^{n-1} F(t) \tag{37}$$

Si nous voulons que le résultat soit valable pour des valeurs quelconques de α, on est obligé, à partir d'ici, de recourir à une méthode approximative. Le plus commode est de remplacer la fonction $0 \leqslant e^{-bze^{-\alpha t}} \leqslant 1$ par un polynôme en t (formule d'interpolation de Lagrange). Remarquons que l'erreur résultante est faible, car l'allure de l'intégrant en t de (37) dépend surtout de l'exponentielle simple. Désignons par t_j ($j = 0,1 \ldots, q$) les valeurs du paramètre pour lesquelles le polynôme d'interpolation, de degré q, est égal à la double exponentielle. Il s'agira naturellement, lors du calcul numérique, de déterminer q et t_j (indépendants de z) de telle façon que l'approximation soit excellente quand la valeur de l'exponentielle simple est élevée. De la formule d'interpolation, nous obtenons:

$$e^{-bze^{-\alpha t}} \sim \sum_{i=0}^{q} c_i t^i \quad \text{où} \quad c_i = \sum_{j=0}^{q} d_{ij} e^{-bze^{-\alpha t_j}} \tag{38}$$

Après avoir intégré (37) par partie, par rapport à t, et substitué (38), l'expression ne contient plus que des fonctions Γ complètes, et l'on reçoit:

$$\int_0^\infty dt e^{-bze^{-\alpha t}} e^{-\gamma t} (\beta+1)^{n-1} F(t) = \sum_{i=0}^{q} c_i(z) A_{in} \omega_{\gamma+1}^{n-1}$$

où

$$A_{in} = i! \sum_{l=0}^{i} \binom{n-1+i}{n-1+l} \left[\frac{\omega_{\gamma+1}^{l} (1-\omega_{\gamma+1})^{i-l}}{\gamma^{i+1}} - \frac{\omega'^{l}_{\gamma+1} (1-\omega'_{\gamma+1})^{i-l}}{(\gamma+1)^{i+1}} \right] \tag{39}$$

$$\omega_{\gamma+1} = \frac{\beta+1}{\gamma+\beta+1} \qquad \omega'_{\gamma+1} = \frac{\beta}{\gamma+\beta+1}$$

Il est aisé de voir que ce résultat (39) est aussi valable pour $n = 1$. Combinons maintenant l'intégration sur z de (37) avec celle de (9), qui nous donne la probabilité pour l'obtention de la gerbe quand

la position de la trajectoire du méson incident, dans le noyau, est quelconque. Nous obtenons comme résultat final:

$$P_{\geqslant n} = K\,\omega_{\gamma+1}^{n-1}\left\{\frac{X_n(a_A)}{\gamma+1} - 2\gamma\sum_{j=0}^{q}\frac{B_{jn}}{b_{A,j}^2}\left[\frac{[\Gamma_2(b_{A,j})-1]\,\Gamma_n(a_A-b_{A,j})}{\left(1-\frac{b_{A,j}}{a_A}\right)^n} + n\frac{b_{A,j}}{a_A}\Gamma_{n+1}(a_A) + \Gamma_n(a_A)\right]\right\}$$

$$a_A = \Phi N d_A \ (11)\ (\S\,3); \qquad b_{A,j} = \frac{\varphi N d_A}{E_c^{\alpha}} e^{-\alpha t_j}; \qquad X_n(a_A)\ (11) \qquad (40)$$

$$B_{jn} = \sum_{i=0}^{q} A_{in}\, d_{ij}\ (38)\ (39); \qquad \omega_{\gamma+1} = \int_0^E \omega\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{E}\right)^{\gamma}\frac{d\varepsilon}{E} \qquad (34)$$

K est un facteur de normalisation (29). Les coefficients B_{jn} sont naturellement dépendants du degré q du polynôme (38) approximant la double exponentielle, ainsi que des t_j. Quant à la détermination de P_0, il est également nécessaire d'user d'une méthode approximative. Le contrôle de la normalisation de nos probabilités ne peut se faire que numériquement.

Remarquons pour finir que n représente le nombre total des mésons de la gerbe (neutrettos inclus), abstraction faite du méson diffusé. Ici aussi, nous pourrions déterminer la probabilité $P'_{\geqslant\mu}$ pour l'obtention d'une gerbe d'au moins μ mésons chargés, en appliquant la formule (25) sur les valeurs numériques de $P_{\geqslant n}$. Mais nous ne ferons pas ce calcul, puisque les résultats sont presque identiques à ceux qui sont obtenus de $P_{\geqslant\mu}$ pour $\mu = {}^2/_3\, n$ (voir § 5). De plus l'observation expérimentale ne peut se faire que si le méson incident est chargé, d'où $\eta = 2/3\ n + 1$ représente le nombre total des mésons chargés de la gerbe, méson diffusé inclu.

§ 9. *Résultats numériques.*

Il fut nécessaire d'introduire une hypothèse relative à la section efficace pour le choc nucléon-nucléon (3), pour approximer le résultat (33). Il en résulte pour les constantes à partir desquelles les coefficients A_{in} (39) se déterminent: $\omega_{\gamma+1} = 2/3$; $\omega'_{\gamma+1} = 4/9$.

Les résultats suivants se rapportent à différentes valeurs de a_A qui s'étendent sur le domaine indiqué au § 3. Quant à celles de $[b_A\ (40),\ t_j = 0]$ elles sont fonction de l'énergie critique E_c pour la production des mésons. Cette dernière, qui n'est qu'une idéali-

sation, est de l'ordre de grandeur de 10^9 eV, probablement supérieure à l'énergie de repos des nucléons. Si nous empruntons pour $\varphi(\varepsilon)$ la valeur théorique asymptotique citée dans HJ II:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{16\pi}{M\varepsilon}\left(\frac{\hbar}{\mu_\pi c}\right)^2 = \frac{16\pi}{\left(\frac{M}{\mu_\pi}\right)^2}\frac{M}{\varepsilon}\left(\frac{\hbar}{\mu_\pi c}\right)^2 \cong 1{,}2\,\frac{M}{\varepsilon}\left(\frac{\hbar}{\mu_\pi c}\right)^2$$

nous déduisons de (15):

$$\frac{b_A}{a_A} \lesssim \frac{1{,}2}{3{,}5} \cong \frac{1}{3}$$

Les résultats numériques de la probabilité ont été déterminés pour les 3 valeurs suivantes de ce quotient:

$$\frac{b_A}{a_A} = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \quad \text{pour } \alpha = 0 \text{ ou } 1. \tag{26}$$

Quant au degré du polynôme approximatif (38), il est choisi $q = 5$. $t_j = 0 - 0{,}4 - 1 - 1{,}5 - 2 - 4$.

Probabilité $P_{\geqslant n}$ en % (normée) pour l'obtention d'une gerbe de n ou plus mésons (neutrettos inclus), qui résulte d'une seule diffusion d'un méson incident par un nucléon du noyau. Le méson diffusé n'est *pas* compté dans n. $b_A/a_A = 1/3$.

Table III.

$\alpha = 0$

a_A \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	10
2,5	23	7	2,0	0,5	0,1	0,02			
4	29	13	4,8	1,7	0,5	0,2	0,04	0,01	
7	34	19	10	4,8	2,2	1,0	0,4	0,2	0,02
9	36	21	12	7	3,4	1,7	0,8	0,4	0,06

$\alpha = 1$

a_A \ n	1	2	3	4	5	6	7	8
2,5	12	3,2	0,7	0,1	0,02			
4	20	7	2,3	0,7	0,2	0,04		
7	26	12	4,9	1,9	0,7	0,2	0,06	0,02
9	28	14	7	2,7	1,0	0,4	0,1	0,04

$\eta = 2/3\, n + 1$ représente le nombre total des mésons chargés, méson diffusé inclus. Les sections efficaces totales sont: $\varphi(\varepsilon) = \varphi/\varepsilon^\alpha$ (26) pour la diffusion d'un méson incident d'énergie ε par un nucléon, Φ pour la production des mésons par choc nucléon-nucléon. $b_A = \varphi N d_A / E_c^\alpha$ (29). $a_A = \Phi N d_A$ (11) (voir au § 3 les valeurs correspondant aux différents atomes). Les résultats se rapportent à la production primaire des mésons.

La table III ne donne les valeurs de la probabilité que pour le cas $b_A/a_A = {}^1/_3$, parce que $P_{\geqslant n}$ dépend peu des valeurs de ce quotient. Les différences qui existent entre les valeurs de $P_{\geqslant n}$ données dans la table et les valeurs correspondantes des cas $b_A/a_A = {}^1/_2$ *ou* ${}^1/_6$, quand $\alpha = 0$ *ou* 1, ne sont jamais plus grandes que 2% pour $n = 1$, et elles diminuent rapidement quand n croît. Par exemple pour $b_A/a_A = {}^1/_6$, $\alpha = 0$ et $a_A = 2{,}5$ nous avons pour $P_{\geqslant n}$ en %: 21 (1); 6 (2); 1,8 (3); 0,4 (4); 0,09 (5); 0,02 (6) (les valeurs entre parenthèses représentent le nombre total n des mésons).

Les valeurs de la probabilité P_0 correspondant au cas où le nucléon diffusant, d'énergie $\lesseqgtr E_c$, s'échappe du noyau sans engendrer de gerbe, se déduisent de la table III: $P_0 = 1 - P_{\geqslant 1}$.

Rappelons que le coefficient $K(29)$ normalise les probabilités sans que l'on ait à recourir au cas où le méson incident traverse le noyau sans être diffusé, et le nombre des mésons incidents, d'énergie $\geqslant E_c$, est choisi tel qu'il existe sûrement *un seul* nucléon diffusant, d'énergie quelconque $\lesseqgtr E_c$. Les mésons incidents, d'énergie $< E_c$, qui sont diffusés dans le noyau, mais qui ne peuvent pas engendrer de gerbe, n'interviennent pas dans P_0, et les cas correspondants ne doivent pas être incorporés dans une statistique à confronter avec la table III.

Remarquons que nous avons admis qu'il n'existe qu'une seule diffusion du méson incident dans le noyau, et les valeurs de la probabilité pour l'obtention des gerbes qui correspondent aux cas où il existe plusieurs diffusions sont certainement plus grandes.

De la table III, nous voyons que les probabilités pour l'obtention des gerbes dont le nombre total des mésons est $n \geqslant 2$ sont beaucoup plus petites que les probabilités correspondantes se rapportant au cas du nucléon incident. Il s'ensuit que même si l'on tient compte des cas où il y a division du méson incident lors de la diffusion ($\lesssim 20\%$, voir § 7), la production multiple des mésons doit contribuer *considérablement* à accroître le nombre des gerbes de $n \geqslant 2$ mésons.

Quant aux résultats expérimentaux relatifs à la production des gerbes pénétrantes par des mésons π incidents, ils sont aujourd'hui trop peu nombreux pour qu'on puisse les comparer avec les résultats de cette théorie. Au § 7, il a déjà été fait mention de la table obtenue par MM. Lock et Yekutieli, qui détaille les différentes gerbes secondaires engendrées par des mésons provenant de gerbes primaires (méthode de la plaque photographique). S'il est tenu compte du facteur de correction géométrique, il appert que dans 45% des cas, l'étoile est accompagnée d'une gerbe secondaire d'au

moins 1 méson. Mais ces résultats ne se rapportent qu'à un domaine d'énergie du méson incident compris entre 500 et 1100 MeV. La limite supérieure est donc encore plus petite que E_c et nous ne pouvons rien conclure. Remarquons qu'il est possible que dans les 55% des cas restants, le méson incident soit capturé par le noyau après avoir subi une grande perte d'énergie. MM. Butler, Rosser et Barker[14]) ont constaté, à partir de mesures faites avec la chambre de Wilson, que les étoiles secondaires sont en général petites.

Conclusions.

Tout au long de ce travail nous avons admis comme hypothèse de base, que les productions multiples ou mixtes, négligées ici, sont moins fréquentes que les processus purement pluraux, et de toutes les confrontations expérimentales que nous avons pu faire, il est résulté que la théorie correspondante peut très bien rendre compte des différentes propriétés connues des gerbes. Cependant cet accord n'exclut pas la possibilité que l'une quelconque des 2 hypothèses de production, écartées ici à priori, corresponde au processus réel, car par un choix convenable de la dépendance de la multiplicité des émissions en l'énergie, une interprétation théorique est toujours possible. MM. Heitler et Janossy (HJ II) ont déjà remarqué que cette possibilité de décrire diversement le phénomène n'est pas surprenante. Elle est due au fait que les principales caractéristiques des gerbes pénétrantes de mésons découlent des lois de conservation; et l'hypothèse relative à la production élémentaire d'un seul méson a beaucoup plus d'influence que celle de la multiplicité des émissions lors d'un choc. Nous avons que la différence entre les probabilités $P'_{\geqslant\mu}(a_A)$ et $P'_{\geqslant\mu+1}(a_A)$ pour l'obtention de gerbes d'au moins μ et $\mu+1$ mésons chargés, dépend spécialement de la portion découpée dans le spectre de puissance de la particule incidente, d'où il n'est que juste possible de produire en moyenne $\mu+1$ émissions. Ce résultat ne dépend pas beaucoup de la valeur de a_A (11) si celle-ci varie légèrement. Notre hypothèse de production nous permet donc aussi de trouver que la grandeur de la gerbe est limitée par l'énergie de la particule incidente.

De nos résultats nous concluons qu'un choix en faveur de la production multiple, étayé *uniquement* sur des considérations de *grandeur* de certaines gerbes, n'est pas justifié. Jusqu'ici il ne me semble pas possible de trancher la question de la multiplicité des productions d'une façon définitive et seule une expérimentation sur des noyaux d'hydrogène pourra nous renseigner exactement.

Remarquons cependant que la cassure que présente les résultats expérimentaux du groupe de Bristol (fig. 4 pour $M = 10$) n'est peut-être pas due à des fluctuations. Elle pourrait signifier qu'une modification du processus intervient en ce point (par exemple substitution d'une production mixte à une production plurale HAYAKAWA[8]). La pente de la courbe après $M = 10$, qui correspond assez bien à la valeur de $\gamma = 1{,}5$ (14), remontrerait avec évidence la limitation de la grandeur de la gerbe par l'énergie incidente. Cependant remarquons qu'il n'est pas certain que le spectre d'énergie de la particule incidente soit rigoureusement un spectre de puissance; et la cassure présentée par les résultats expérimentaux pourrait tout aussi bien provenir d'irrégularités dans le spectre de l'énergie incidente. En attendant les résultats décisifs, la dépendance du nombre des constituants des étoiles et des gerbes en la grandeur du noyau dans lesquelles elles sont engendrées (qui est bien visible dans l'expérience de MM. SALANT, HORNBOSTEL, FISK et SMITH [voir § 1]) nous montre qu'en tout cas pour les énergies *moyennes*, la production de mésons ne doit être que plurale *ou* mixte et qu'une production purement multiple n'intervient certainement pas.

Remerciements.

Je tiens à remercier ici Monsieur le Professeur HEITLER qui m'a donné le sujet de ce travail et qui a accepté d'en assumer la direction. J'ai bénéficié de ses judicieux conseils et aussi d'une communication privée que Monsieur le Prof. HEITLER a reçue de Monsieur le Prof. POWELL sur des travaux du groupe de Bristol, qui n'ont pas encore été publiés. Je remercie sincèrement Messieurs le Prof. POWELL et ses collaborateurs.

Références.

1) W. HEITLER et L. JANOSSY, Proc. Phys. Soc. A. **62**, 669 (1949) (désigné ici par HJ I).
2) W. HEITLER et L. JANOSSY, HPA. **23**, 417 (1950) (désigné ici par HJ II).
3) W. HEISENBERG, Z. Phys. **126**, 569 (1949).
4) E. CLEMENTEL et DALLAPORTA, Nuovo Cimento **4**, 235, 298 (1948).
5) E. FERMI, Progr. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
6) P. CALDIROLA et A. LOINGER, Nuovo Cimento **7**, 2 (1950).
7) E. O. SALANT, J. HORNBOSTEL, C. B. FISK, et J. E. SMITH, Phys. Rev. **79**, 184 (1950).
8) S. HAYAKAWA, Progr. Theor. Phys. **5**, 319 (1950).
9) W. HEITLER et L. JANOSSY, Proc. Phys. Soc. A. **62**, 374 (1949).
10) Y. FUJIMOTO, S. HAYAKAWA, Y. YAMAGUCHI, Progr. Theor. Phys. **5**, 318 (1950).

[11]) U. Camerini, P. H. Fowler, W. O. Lock et H. Muirhead, Phil. Mag. (sous presse). Voir C. F. Powell Rep. Progr. Phys. **13,** 350(1950) fig. 29, p. 398.

[12]) A. G. Carlson, J. E. Hooper et D. T. King, Phil. Mag. **41,** 701 (1950).

[13]) R. H. Brown, U. Camerini, P. H. Fowler, H. Heitler, D. T. King et C. F. Powell, Phil. Mag. **40,** 862 (1949).
U. Camerini, T. Coor, J. H. Davies, P. H. Fowler, W. O. Lock, H. Muirhead et N. Tobin, Phil. Mag. **40,** 1073 (1949).

[14]) C. C. Butler, W. G. V. Rosser et K. H. Barker, Proc. Phys. Soc. A. **63,** 145 (1950).

[15]) W. B. Fretter, Phys. Rev. **80,** 921 (1950).

[16]) P. H. Fowler, Phil. Mag. **41,** 169 (1950).