Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 24 (1951)

Heft: II

Artikel: Elimination des constantes arbitraires dans la théorie relativiste des quanta

Autor: Stueckelberg, E.C.G. / Green, T.A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112211

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elimination des constantes arbitraires dans la théorie relativiste des quanta

par **E. C. G. Stueckelberg***) et **T. A. Green****) (Genève).

14. XII. (1950).

Summary: This article shows how the influence of the undetermined constants in the integral theory of collisions[1][2][3][4]) can be avoided. A rule is given by which the probability amplitudes ($\boldsymbol{S}[V]$-matrix) may be calculated in terms of a given *local action*. The procedure of the integral method differs essentially from the differential method employed by TOMONAGA[6]), SCHWINGER[5]), FEYNMAN[7]) and DYSON[8]) in that the two sorts of diverging terms occuring in the formal solution of a SCHROEDINGER equation are avoided. These two divergencies are: 1) the well known «*self energy*» *divergencies* which have been since corrected by methods of regularization (RIVIER[1]), PAULI and VILLARS[9])); 2) the more serious *boundary divergencies* (STUECKELBERG[4])) due to the sharp spatio-temporal limitation of the space-time region of evolution V in which the collisions occur. The convergent parts (anomalous g-factor of the electron and the LAMB-RETHERFORD shift) obtained by SCHWINGER are, in the present theory, the boundary independent amplitudes in fourth approximation. Up to this approximation the rule eliminates the arbitrary constants from all conservative processes.

§ 1. contains an outline of the physical meaning of boundary effects. These effects involve a classical field which describes the actions of the counters necessary to distinguish between the incoming and outgoing particles.

§ 2. the rule is formulated. It is based upon the unitarity and causality conditions developed in previous publications[1][2][3][4]).

In § 3. the limiting process is given which avoids the influences of the boundary. In particular, the limiting process necessary to apply the results to zero mass photons is given.

§ 4., § 5. and § 6. contain the application of the rule to the second, third, and fourth approximations of quantum electrodynamics for finite mass photons. It is shown that a certain ambiguity, related to charge renormalization, occuring in the work of SCHWINGER[5]) and DYSON[8]) is avoided if the explicit influence of the boundary region is taken into account.

---

*) Recherche subventionnée par la Commission Suisse d'Energie Atomique.

**) Actuellement au Radiation Laboratory, Berkeley, California, U.S.A.

*

§ 1. Introduction.

La théorie quantique des particules élémentaires (ou quanta) décrit les résultats des expériences par les amplitudes de probabilité pour la transition d'une distribution des quanta à une autre. La description spatio-temporelle de ces amplitudes distingue entre des *actions locales* ayant lieu à un certain événement x (par exemple l'émission d'un photon par un électron), et des actions à distance ou *actions multilocales* (par exemple, la déflection d'un électron à l'événement x dans le champ (retardé, symétrique, ou causal) produit, à l'événement y, par une autre particule qui subit également un changement de sa quantité de mouvement-énergie).

De telles créations, collisions, et annihilations sont influencées par des champs macroscopiques. Pour étudier les propriétés des particules élémentaires, il faut que les actions locales et multilocales

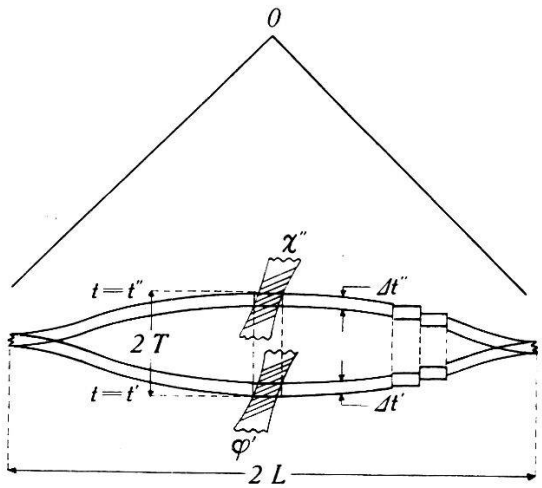

Fig. 1.

La région spatiale de volume $(2L)^3$ est remplie de compteurs qui sont mis en marche à deux époques, de durée $\Delta t'$ et $\Delta t''$, séparées par une période $t''-t' = 2T$. Le compteur indiqué est un *compteur idéal*, s'il n'est actionné que par des quanta qui se trouvent dans un paquet d'onde donné:

$$\varphi'(\vec{x}, t') = \chi''(\vec{x}, t'')$$

Les observations sont recueillies à l'origine O.

contribuant à l'amplitude examinée se produisent toutes dans une région spatiale donnée, et pendant une période durant laquelle aucune influence de la matière macroscopique ne se manifeste dans cette région. Nous appelons cette région spatio-temporelle la période d'évolution V.

D'autre part, pour pouvoir observer la distribution des quanta qui entrent dans V *(distribution incidente)* et la distribution des quanta qui sortent de V *(distribution émergente)*, il faut que V soit entouré d'une hypercouche quadridimensionelle de matière ma-

croscopique (les compteurs) qui enregistre ces deux distributions. Or, la présence d'un tel champ macroscopique donne lieu à de nombreux processus où il y a échange d'énergie-impulsion entre ce champ (décrit classiquement) et les particules élémentaires. Dans les deux figures, nous avons donné deux réalisations possibles d'un tel champ macroscopique.

Dans la fig. 1, ce champ décrit la matière des compteurs au repos. Cette matière ne présente d'action sur les particules que pendant

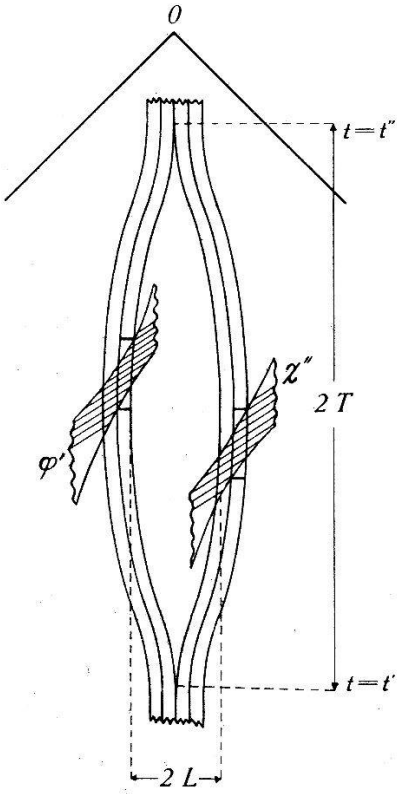

Fig. 2.

A $t < t'$ l'espace est rempli d'une sphère compacte de compteurs élastiques. Elle s'élargit, puis elle se contracte, en créant pendant la période $2\ T$ une région «vide» entourée d'une couche de compteurs. La couche est composée de deux sortes de compteurs. Les uns enregistrent les quanta incidents (paquets φ') et les autres enregistrent les quanta émergents (paquets χ'').

deux courtes époques. De pareils compteurs (dont les éléments de construction sont aussi des particules élémentaires) ne peuvent être construits que si l'on peut varier, à volonté, les constantes de couplage entre leurs éléments et les quanta qu'on désire observer. Il n'est pas en contradiction avec la théorie des quanta de supposer l'existence d'une telle matière pour discuter des expériences idéales (Gedankenexperimente). Ce dispositif a l'avantage de permettre de formuler une théorie limite pour des époques de durée nulle, c'est-à-dire lorsque les deux hypercouches de la fig. 1 tendent vers deux

hypersurfaces temporelles. Un pareil dispositif correspond à la réalisation expérimentale de la théorie différentielle.

Dans un article précédent[4]) l'un de nous a montré que cette limite n'existe pas en général. D'autre part, même dans les cas où elle existerait, les effets d'une certitude pareille dans l'observation du temps mettrait à disposition (sous forme du champ classique) une énergie arbitrairement grande, qui donnerait lieu à des probabilités énormes pour des actions localisées près de l'une ou l'autre de ces surfaces.

Sur la fig. 2, un autre arrangement de compteurs est donné. Il peut être réalisé pour autant que des arrangements de compteurs existent qui permettent d'observer la direction et le sens du quantum qui les traverse.

Pour préciser le formalisme, il est utile d'introduire ici la notion du «compteur idéal». C'est un appareil qui précise dans quel paquet d'onde φ un quantum incident ou émergent a été repéré. Soit $M(\varphi)$ une distribution incidente. Elle indique, pour chaque paquet incident $\varphi = \varphi', \varphi'', \ldots$, le nombre de quanta $M(\varphi)$ qui s'y trouvaient. L'amplitude $\Psi'[M()]$, fonctionnelle de $M(\varphi)$, précise ainsi un «*état incident*». De même, $\Psi''[N()]$ précise «*l'état émergent*» sous forme d'une fonctionnelle de la distribution des quanta $N(\chi)$ parmi les paquets émergents $\chi = \chi', \chi'', \ldots$ Alors l'amplitude de transition

$$S\,[V()\,,\ N()/M()] \rightarrow \boldsymbol{S}\,[V] \tag{1.1}$$

est fonctionnelle de la région V (décrite par un champ classique $V(x)$), de $N(\chi)$ et de $M(\varphi)$. L'opérateur $\boldsymbol{S}[V]$ est ainsi une matrice unitaire dans l'espace des deux distributions, fonctionnelle d'un champ classique. Elle relie les deux «états» par la relation:

$$\Psi'' = \boldsymbol{S}\,[V]\,\Psi' \tag{1.2}$$

Si, dans le dispositif de la fig. 1, la limite pour des hypersurfaces temporelles existe, on peut considérer $\Psi''[N()] \equiv \Psi''[t''(), N()]$ comme une fonctionnelle de l'hypersurface temporelle $t = t''(\vec{x})$. Cette condition est nécessaire et suffisante pour donner un sens à l'équation fonctionnelle des temps multiples (Stueckelberg[10]), Tomonaga[6]), Schwinger[5])). Cette limite n'existant pas, l'idée d'un «état à l'époque $t''()$» doit être abandonnée. La description des collisions doit donc se faire sous forme d'une théorie explicitement intégrale (1.2).

Le champ classique caractérisant la région d'évolution V est une fonction déterminée.

$$V(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ hors de} \\ 1 \text{ dans} \end{array} \right\} \text{ la région d'évolution } V \tag{1.3}$$

Elle figure dans les intégrations spatio-temporelles sous forme d'un poids de l'élément de volume, que nous écrivons sous la forme

$$\int V\,dx\ldots = \int (dx)^4\, V(x)\ldots \tag{1.4}$$

Les époques d'observation de la fig. 1, resp. la région des compteurs de la fig. 2, sont caractérisées par des champs classiques du type

$$v(x) = (V - V^2)(x)\,;\quad \vartheta_{\alpha\beta}(x) = (\partial_\alpha V \cdot \partial_\beta V)(x) \tag{1.5}$$

qui ne sont différents de zéro que dans la région de l'hypersurface.

§ 2. Le développement de l'opérateur S en termes d'une action locale $h(x)$.

Le développement de $\boldsymbol{S}$ en fonction d'un paramètre de couplage ε est

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{S}_{(n)}\,. \tag{2.1}$$

La contribution d'ordre n

$$\boldsymbol{S}_{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{S}_{(nm)} \equiv \boldsymbol{H}_{(n)} + i\,\boldsymbol{A}_{(n)} \tag{2.2}$$

est une somme *d'expressions multilinéaires* d'ordre m dans les opérateurs de création $\boldsymbol{d}^\dagger(\chi)$ et d'annihilation $\boldsymbol{c}(\varphi)$ de quanta dans les paquets émergeants $\chi(x)$, resp. incidents $\varphi(x)$. La *condition d'unitarité* établit une relation de récurrence

$$\boldsymbol{H}_{(n)} = -\frac{1}{2}\sum_{n'=1}^{n-1} \boldsymbol{S}^\dagger_{(n')}\boldsymbol{S}_{(n-n')} \tag{2.3}$$

déterminant univoquement la *partie hermitienne* $\boldsymbol{H}_{(n)}$ de $\boldsymbol{S}_{(n)}$ par l'approximation précédente. Toute expression multilinéaire d'ordre $m = m_x + m_y + \ldots + m_z$ a la forme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{(nm)}[V] &= \sum_\chi \ldots \sum_\varphi \ldots \boldsymbol{d}^\dagger(\chi)\ldots \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{c}(\varphi)\ldots S_{(nm)}(\chi\ldots/\varphi\ldots)\\ &= i\int V\,dx \int V\,dy \ldots \int V\,dz\,\big(\boldsymbol{\varphi}^{m_x}(x)\,\boldsymbol{\varphi}^{m_y}(y)\ldots\boldsymbol{\varphi}^{m_z}(z)\big)^{\sim}\\ &\qquad \times D^{(c)}_{(nm)}(x-z,\, y-z,\, \ldots)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Le symbole $\sim$ indique que l'expression multilinéaire est *ordonnée* (les $\boldsymbol{d}^\dagger$ opérant *après* les $\boldsymbol{c}$). L'opérateur $\boldsymbol{I}$ fait correspondre à tout état incident $\Psi'[M()]$ l'état émergent $\Psi''[N()]$ qu'on obtient si le système saturé des paquets $\varphi(x)$ est développé en termes du système saturé des $\chi(x)$. Les noyaux $D^{(c)}$ doivent satisfaire à la *condition de*

causalité, discutée autre part[2]). Elle exige que pour toute *constellation des événements* $x, y, \ldots, z$, différente de leur coïncidence simultanée $x = y = \ldots = z$, les $D^{(c)}$ se résolvent en une somme de produits de fonctions causales d'un seul déplacement spatio-temporel $D^{(c)}(x - z)$:

$$D^{(c)}(x-z, y-z, \ldots) \doteq D^{(c)}_{(1)}(x-z)\, D^{(c)}_{(2)}(y-z) \ldots D^{(c)}_{(3)}(x-y) \cdots + \cdots \tag{2.5}$$

$$D^{(c)}(x-y) = D^{(\pm)}(x-y) \quad \text{pour} \quad x^4 \gtrless y^4 \tag{2.6*}$$

A la décomposition de $\boldsymbol{S}_{(nm)}$ en ses parties hermitienne et antihermitienne (2.2) correspond une décomposition des noyaux

$$i\, D^{(c)}_{(nm)} = -\frac{1}{2} D^{(1)}_{(nm)} + i\, D^{(s)}_{(nm)} \tag{2.7}$$

Nous avons évité le signe d'égalité (=) en (2.5) et y avons substitué le signe $\doteq$ exprimant ainsi que (2.5) est indéfini lorsque deux ou plusieurs événements coïncident. Considérons maintenant les conséquences de ces deux conditions. L'unitarité exige que $\boldsymbol{H}_{(1)} = 0$ d'où il résulte que $D^{(1)}_{(1\,m)} = 0$ en (2.7). La causalité et l'hermiticité de $\boldsymbol{A}_{(1)}$ excluent un $D^{(s)}_{(1\,m)}(x-z, \ldots) \neq 0$ sauf pour la coïncidence simultanée de tous les événements et pour leurs constellations infinitésimalement voisines. Un tel $D^{(s)}$ est caractérisé par une *distribution*;

$$D^{(s)}_{(1\,m)}(x-z, \ldots) = \sigma(x-z, y-z \ldots) = a\,\delta(x-z)\,\delta(y-z) \ldots + \ldots \tag{2.8}$$

Elle s'exprime en termes du $\delta(x)$ spatio-temporel et d'un nombre fini de ses dérivées. Par intégration partielle (cf. § 3), le $\boldsymbol{A}_{(1)}$ peut être réduit à une intégrale simple sur une *densité d'action locale* $\boldsymbol{h}_{(1\,m)}(x)$ et une action de surface explicite (cf. § 3).

Le développement de $\boldsymbol{S}$ en termes de cette action locale est obtenu de la manière suivante:

L'*unitarité*, vu la formule de récurrence (2.3), nous fournit $\boldsymbol{H}_{(2)}$ et ainsi la première partie $-\frac{1}{2} D^{(1)}_{(2\,m)}$ dans la décomposition (2.7) des noyaux. La *condition de causalité* détermine ensuite l'autre partie $i\, D^{(s)}_{(2\,m)}$ à des distributions (2.8) près. La partie antihermitienne ainsi déterminée, $\boldsymbol{A}_{(2)}$ (resp. $D^{(s)}_{(2\,m)}$) est appelée le *complément causal* de $\boldsymbol{H}_{(2)}$ (resp. $D^{(1)}_{(2\,m)}$). Avec le $\boldsymbol{S}_{(2)}$ ainsi trouvé, on forme $\boldsymbol{A}_{(3)}$ et y détermine les $D^{(s)}_{(3\,m)}$ à des nouvelles distributions près et ainsi de suite. L'arbitraire contenu dans ces distributions est égal, à des actions

*) $D^{(\pm)}(x)$ sont des fonctions à fréquences définies ($\pm$), cf. Stueckelberg et Rivier[2]).

de surface près, à l'arbitraire qui nous est permis dans le choix de l'action élémentaire $\boldsymbol{h}_{(1\,m)}(x)$. $\boldsymbol{S}$ est développé en termes d'une action élémentaire précisée si une règle détermine univoquement le complément causal $\boldsymbol{A}_{(n)}$ (resp. $D^{(s)}_{(nm)}$) pour tout $\boldsymbol{H}_{(n)}$ (resp. $D^{(1)}_{(nm)}$) obtenu par récurrence (2.3). Une règle pareille serait la «*règle naturelle*» exprimée par le signe d'égalité en (2.5). Elle réduit, par récurrence, d'abord l'arbitraire en (2.5) à l'arbitraire des $D^{(s)}_{(2m)}$ de la deuxième approximation qui doit être défini en termes des potentiels symétriques (voir § 4). Malheureusement, cette règle ne peut pas être appliquée en général, car les produits (2.5) de fonctions intégrables peuvent être non intégrables. Ceci nous oblige à substituer à cette règle un procédé plus général qui équivaut à la «règle naturelle» pour des produits intégrables. Ce procédé fait intervenir les deux étapes suivantes: 1° Si le produit (2.5) n'est pas intégrable, on en construit une *fonction covariante approximative*, ${}_PD^{(c)}(x, y, \ldots)$. Elle possède une représentation de Fourier et ne se distingue du produit que dans les très hautes fréquences (d'ordre P). 2° Un *processus limite* définit alors $D^{(c)}(x, y, \ldots)$ à un minimum de constantes arbitraires près.

1° *La fonction approximative*: Pour trouver ${}_PD^{(c)}(x, y, \ldots)$, on choisit un des facteurs dans (2.5) et on le remplace par une *fonction non covariante*, par exemple

$$D^{(c)}_{(3)}(x) \rightarrow {}_PD^{(c)}_{(3)}(x) = (2\pi)^{-4} \int\limits_P dp\, e^{ipx} D^{(c)}_{(3)}(p) \tag{2.9}$$

P définit l'intérieur d'un cylindre sphérique resp. hyperbolique de rayon P autour d'un axe temporel ou spatial. Le ${}_PD^{(c)}(x - y, \ldots)$ de (2.5) ainsi défini possède un développement de Fourier. Par exemple, la fonction des deux déplacements écrits en (2.5) peut être développée en

$${}_PD^{(c)}(x, y) = (2\pi)^{-8} \int dp \int dq\, e^{i(px+qy)}\, {}_PD^{(c)}(p, q) \tag{2.10}$$

en termes de sa transformée de Fourier.

$${}_PD^{(c)}(p, q) = (2\pi)^{-4} \int\limits_P dk\, D^{(c)}_{(1)}(p-k)\, D^{(c)}_{(2)}(q-k)\, D^{(c)}_{(3)}(k) \tag{2.11}$$

La fonction ${}_PD^{(c)}(x, y)$ en (2.10) a perdu sa covariance au même titre que (2.9). Pourtant, pour un P arbitrairement grand, il existe un ensemble arbitrairement grand de référentiels de Lorentz dans lesquels les ${}_PD^{(c)}(x, y)$ *non covariants* ne se distinguent que par les contributions à très grande fréquence. On peut alors définir un

${}_PD^{(c)}(x, y)$ *covariant* si on fixe, pour chaque terme (2.11) du développement (2.10), une orientation invariante du cylindre P par rapport aux quadrivecteurs p et q. Cette fonction covariante (2.10) continue à rester l'équivalent du produit en (2.5) sauf pour les contributions à très grande fréquence. En général, $D^{(c)}(x, y, ..)$ est une expression spinorielle et tensorielle. Elle se réduit à différents termes, composé chacun d'un facteur covariant (dépendant des deux vecteurs p et q) qui multiplie une fonction invariante (scalaire) de la longueur des trois vecteurs $\xi = p^2$, $\eta = q^2$, $\zeta = (p-q)^2$

$$ {}_PD(^{(c)}p, q) = {}_PD^{(c)}\left(p^2, q^2, (p-q)^2\right) \equiv {}_PD^{(c)}(\xi, \eta, \zeta) \tag{2.12}$$

2⁰ *Le passage à la limite* $P \to \infty$. Si la limite

$$ D^{(c)}(\xi, \ldots) = \lim_{P=\infty} {}_PD^{(c)}(\xi, \ldots) \tag{2.13}$$

existe, la fonction est la fonction définie par le produit. Si elle n'existe pas, nous cherchons, parmi les systèmes d'équations aux dérivées partielles qui suffisent à déterminer $D^{(c)}(\xi, \ldots)$,

$$ \partial^n_\xi \partial^n_\eta \ldots D^{(c)}(\xi, \eta, \ldots) = \lim_{P=\infty} \partial^n_\xi \partial^n_\eta \ldots {}_PD^{(c)}(\xi, \eta \ldots) \tag{2.14}$$

le «*système définissant*» pour lequel a) le deuxième membre existe, et b) la solution générale $D^{(c)}(\xi, \ldots)$ possède le *minimum de constantes* arbitraires. Ce $D^{(c)}$est donné à un polynome près. C'est-à-dire la transformation suivante reste possible:

$$ D'^{(c)}(p, q) = D^{(c)}(p, q) + \sigma(p^2, q^2, (p-q)^2) \tag{2.15}$$

$\sigma(p^2, \ldots)$ est un polynôme en p^2, q^2, ... contenant ce minimum de constantes arbitraires, soit la représentation de Fourier d'une distribution. Cette règle est la généralisation recherchée de la «règle naturelle». Car, si la limite (2.13) existe, l'équation (2.13), est elle-même le système définissant.

§ 3. Les actions de surface.

1⁰ *Actions de surface implicites*: En choisissant comme paquets des ondes planes, on constate que les intégrales d'espace-temps entrant dans l'expression des amplitudes de transition qui se rapportent à des *processus conservatifs*, sont proportionnelles à l'hypervolume $2\,T\,(2\,L)^3$). En plus de ces processus, il y a les *processus*

non-conservatifs qui empruntent de l'énergie et de la quantité de mouvement au champ classique. Un exemple d'un tel processus (l'émission d'un photon par un électron) a été discuté autre part[4]) Les amplitudes sont proportionnelles à $(2\,L)^3$ seulement (aire de l'hypersurface). Nous les appelons *actions de surface implicites.* Dans une approximation donnée, certaines actions seulement contiennent des processus conservatifs. Dans les amplitudes de tels processus, l'influence des compteurs peut être éliminée si l'on donne à la région V des dimensions grandes par rapport aux dimensions des hypercouches. Pour rendre négligable la contribution des processus non conservatifs dans le dispositif de la fig. 1, on doit passer à la limite

$$2\,T \gg \Delta t'', \quad \Delta t' \gg \mu^{-1} \tag{3.1}$$

où μ est *la masse de la particule la plus légère.*

2⁰ *Actions de surface explicites*: Outre les actions implicites que nous venons de discuter, l'introduction des *actions à distance infinitésimale* sous forme de distributions (2.8) fait apparaître des actions de surface qui contiennent explicitement les champs macroscopiques (1.5). Par une intégration partielle, on démontre que la différence entre une action locale et une action à distance infinitésimale est une action explicite de surface. Par exemple

$$\begin{aligned}\int V\,dx\;(\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{\chi})^{\sim}(x) - \int V\,dx \int V\,dy\,\big(\boldsymbol{\varphi}(x)\,\boldsymbol{\chi}(y)\big)^{\sim}\,\delta(x-y)\\ = \int v\,dx\,(\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{\chi})^{\sim}(x)\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int V\,dx\big(\boldsymbol{\varphi}\,\Box\,\boldsymbol{\chi} + (\Box\,\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\chi}\big)^{\sim}(x)\\ &- \int V\,dx \int V\,dy\,\big(\boldsymbol{\varphi}(x)\,\boldsymbol{\chi}(y)\big)^{\sim}\,\Box\,\delta(x-y)\\ &= \frac{1}{2}\int v\,dx\big(\boldsymbol{\varphi}\,\Box\,\boldsymbol{\chi} + (\Box\,\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{\chi}\big)^{\sim}(x) + \int \vartheta_{\varrho}^{\varrho}\,dx\,(\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{\chi})^{\sim}(x)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Les deux champs classiques $v(x)$ et $\vartheta_{\alpha\beta}(x)$ de (1.5) figurent donc explicitement dans les intégrands spatio-temporels. Pour éviter qu'ils contribuent aux amplitudes de probabilité, il faut de nouveau donner aux époques d'observation une durée suffisamment longue (3.1) pour qu'aucun effet ne se produise dans la région des compteurs. On voit en (3.1) que la limite $\mu \to 0$, c'est-à-dire le passage à l'électrodynamique des photons à masse nulle, fait intervenir des durées infinies pour les époques d'observation.

§ 4. La deuxième approximation en électrodynamique.

1° *Résumé de la théorie.* Nous appliquons la règle établie au § 2 pour développer $\boldsymbol{S}$ en termes de l'action trilinéaire

$$\boldsymbol{h}^J_{(13)}(x) = (\boldsymbol{\varphi}_\alpha \boldsymbol{J}^\alpha)(x); \quad \boldsymbol{J}^\alpha(x) = (\boldsymbol{u}^\dagger \gamma^\alpha \boldsymbol{u})^\sim(x) \tag{4.1}$$

Elle contient un champ tensoriel *(champ des photons de masse non nulle μ)* satisfaisant aux équations d'onde

$$\partial_\alpha \boldsymbol{\varphi}_\beta - \partial_\beta \boldsymbol{\varphi}_\alpha - \boldsymbol{B}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{0}; \quad \partial_\alpha \boldsymbol{B}^{\alpha\beta} - \mu^2 \boldsymbol{\varphi}^\beta = \boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

qui sont équivalentes à

$$(\Box - \mu^2)\, \boldsymbol{\varphi}^\alpha(x) = \boldsymbol{0}; \quad \partial_\alpha \boldsymbol{\varphi}^\alpha(x) = \boldsymbol{0} \tag{4.3}$$

et un champ spinoriel *(champ des positrons-électrons de masse $\varkappa$)* ayant les équations d'onde

$$\boldsymbol{u}^\dagger(x)(\gamma\partial - \varkappa) = \boldsymbol{0}; \quad (\gamma\partial + \varkappa)\, \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{0} \tag{4.4}$$

La normalisation des paquets est contenue dans les lois habituelles de commutation, resp. d'anticommutation. Nous n'écrivons ici que les relations

$$i[\boldsymbol{\varphi}'_\alpha, \boldsymbol{\varphi}_\beta]_- = (g_{\alpha\beta} - \mu^{-2}\partial_\alpha\partial_\beta)\, D^{(0)}_{(\mu)}(x'-x)\, \boldsymbol{1} \equiv D^{(0)}_{(\mu)\alpha\beta}(x'-x)\, \boldsymbol{1} \tag{4.5}$$

$$[\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}^\dagger]_+ = -(\gamma\partial - \varkappa)\, D^{(0)}_{(\varkappa)}(x'-x)\, \boldsymbol{1} \equiv -\Delta^{(0)}_{(\varkappa)}(x'-x)\, \boldsymbol{1} \tag{4.6}$$

2° *La première approximation*

$$\boldsymbol{S}_{(1)} = i\boldsymbol{A}_{(13)} = i\int V\,dx\, \boldsymbol{h}^J_{(13)}(x) \tag{4.7}$$

ne contient aucun processus conservatif. Les processus non-conservatifs, qui empruntent de l'énergie au champ superficiel, ont été discutés autre part[4]).

3° La *deuxième approximation,* écrite conformément au développement multilinéaire (2.2) et (2.4), a la forme

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{(2)}[V] &= \boldsymbol{S}_{(20)} + \boldsymbol{S}_{(22)} + \boldsymbol{S}_{(24)} + \boldsymbol{S}_{(26)} = \boldsymbol{H}_{(2)} + i\boldsymbol{A}_{(2)} \\
&= i\int V\,dx \int V\,dy \Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{I}\, D^{(c)}_{(20)}(x-y) \\
&\quad - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^\alpha(x)\, D^{(c)}_{(22)\alpha\beta}(x-y)\, \boldsymbol{\varphi}^\beta(y) - i\boldsymbol{u}^\dagger(x)\, \Delta^{(c)}_{(22)}(x-y)\, \boldsymbol{u}(y) \\
&\quad - i\boldsymbol{u}^\dagger(\gamma\boldsymbol{\varphi})(x)\, \Delta^{(c)}_{(24)}(x-y)\, (\gamma\boldsymbol{\varphi})\, \boldsymbol{u}(y) \\
&\quad + \frac{1}{2}\boldsymbol{J}^\alpha(x)\, D^{(c)}_{(24)\alpha\beta}(x-y)\, \boldsymbol{J}^\beta(y)\Big)^\sim - \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}^\dagger_{(1)}\boldsymbol{S}_{(1)})^\sim[V]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Le *terme sixlinéaire* ne contient aucun noyau. Les *deux termes quadrilinéaires* ont des noyaux*)

$$\Delta^{(c)}_{(24)}(x) = (\gamma\,\partial - \varkappa)\, D^{(c)}_{(\varkappa)}(x) \equiv \Delta^{(c)}_{(\varkappa)}(x) \tag{4.9}$$

$$D^{(c)}_{(24)\alpha\beta}(x) = (g_{\alpha\beta} - \mu^{-2}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta)\, D^{(c)}_{(\mu)}(x) \equiv D^{(c)}_{(\mu)\alpha\beta}(x) \tag{4.10}$$

dans lesquels le complément causal doit encore être défini. Ce complément introduit dans $\boldsymbol{A}_{(24)}$ *des actions à distance (actions bilocales)*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{(24)}(x, y) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{J}^\alpha(x)\, D^{(s)}_{(\mu)\alpha\beta}(x-y)\,\boldsymbol{J}^\beta(y)\\ - i\,\boldsymbol{u}^\dagger(\gamma\,\boldsymbol{\varphi})(x)\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x-y)\,(\gamma\,\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{u}(y)\end{aligned} \tag{4.11}$$

Nous définissons $\Delta^{(s)}$ et $D^{(s)}_{\alpha\beta}$ comme des *pures actions à distance* en les représentant par des *potentiels symétriques*

$$\begin{aligned}(\Box - \mu^2)\, D^{(s)}_{(\mu)\alpha\beta}(x) = -g_{\alpha\beta}\,\delta(x) + \mu^{-2}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta\,\delta(x)\\ (\gamma\,\partial + \varkappa)\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x) = -\,\delta(x)\end{aligned} \tag{4.12}$$

qui sont intégrables. C'est par cette définition que nous marquons l'absence d'actions locales quadrilinéaires. Notre règle donne alors les corrections causales des *termes bilinéaires*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{(22)}(x, y) = -\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\varphi}^\alpha(x)\,\boldsymbol{\varphi}^\beta(y)\big)^{\sim}\, D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(x-y)\\ - i\,\big(\boldsymbol{u}^{\dagger A}(x)\,\boldsymbol{u}^B(y)\big)^{\sim}\,\Delta^{(s)}_{(22)AB}(x-y)\big)\end{aligned} \tag{4.13}$$

par les deux produits

$$D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\,\big(\gamma_\alpha\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x)\,\gamma_\beta\,\Delta^{(1)}_{(\varkappa)}(-x) + \overset{(1)\,(s)}{\cdots}\big) \tag{4.14**}$$

$$\Delta^{(s)}_{(22)}(x) = \frac{1}{2}\,\gamma^\alpha\big(\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x)\, D^{(1)}_{(\mu)\alpha\beta}(x) + \overset{(1)\,(s)}{\cdots}\big)\,\gamma^\beta \tag{4.15}$$

---

*) *Règle de notations pour les noyaux.* Les lettres D et Δ sont utilisées pour les noyaux tensoriels $D_{\alpha\beta}$, resp. spinoriels Δ_{AB}. Les indices supérieurs $^{(1)}$, $^{(s)}$ et $^{(c)}$ sont employés pour marquer la décomposition des noyaux causals. Deux indices numériques inférieurs $_{(n\,m)}$ indiquent que ce noyau apparaît dans la n-ième approximation d'un terme m-linéaire. Les indices inférieurs $_{(\varkappa)}, _{(\mu)}, _{(\varkappa+\mu)}$ indiquent l'étendue spatiale ($\sim \varkappa^{-1}$, μ^{-1}, $(\varkappa+\mu)^{-1}$) des noyaux spatiaux obtenus par intégration sur le temps. Les lettres G et Γ sont des fonctions tensorielles, resp. spinorielles, utilisées pour définir les noyaux. Appliqués à ces fonctions, les indices $^{(s)}$, $_{(\varkappa)}$, etc. gardent leur signification. L'index numérique $_{(l)}$ numérote les différentes fonctions G et Γ d'après leur entrée dans le texte. De tous ces indices, nous omettrons, dans les calculs intermédiaires, ceux qui sont sous-entendus.

**) $\overset{(1)\,(s)}{\cdots}$ est la terme obtenu par permutation des indices $^{(1)}$ et $^{(s)}$.

Le *terme zérolinéaire* (en $\boldsymbol{I}$) contient, dans sa partie hermitienne, une diminution de la probabilité de trouver du vide, diminution due à la production spontanée de trois quanta d'après $\boldsymbol{A}_{(13)}$ de la première approximation. Son complément causal équivaut à un changement de phase arbitraire et indépendant de l'état incident et ne contient donc aucune action observable.

4. *Evaluation des produits*: Evaluons maintenant, en suivant notre règle, les noyaux des termes bilinéaires. En vertu de l'identité de Schwinger

$$\int_0^1 du\, \delta'\big(a + (b-a)\,u\big) = -\big(a^{-1}\,\delta(b) + b^{-1}\,\delta(a)\big) \tag{4.16}$$

on trouve la transformée approximée

$$\begin{aligned} {}_P D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(p) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_P dk \int_0^1 du\, \delta'\big(k^2 + \varkappa^2 + u\,(p^2 - 2\,p\,k)\big) \\ &\times \big[(p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha - 2\,k_\alpha k_\beta) - g_{\alpha\beta}\,(p\,k - k^2 - \varkappa^2)\big] \end{aligned} \tag{4.17}$$

La somme étant convergente pour une région P finie, les intégrations peuvent être interchangées. (4.17) est covariante si P décrit un cylindre de rayon P autour du vecteur p. Cette orientation du cylindre est telle que (4.17) est invariante par rapport à la *translation de l'origine* $k' = k - up$, nécessaire pour mettre en évidence les fonctions scalaires de p^2. Effectuant cette translation, on obtient

$$\begin{aligned} {}_P D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(p) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^1 du \int_P dk\, \delta'\,[k^2 + A\,(p^2, u)] \\ &\times \Big(2\,(u - u^2)\,p_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta}\Big((u - u^2)\,p^2 - \frac{k^2}{2} - \varkappa^2\Big)\Big) \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$A\,(p^2, u) = p^2\,(u - u^2) + \varkappa^2 \tag{4.19}$$

Pour simplifier, nous avons déja utilisé les relations

$$\int_P dk\, k^\alpha f(k^2) = 0; \qquad \int_P dk\, k^\alpha k^\beta f(k^2) = \frac{1}{4}\, g^{\alpha\beta} \int_P dk\, k^2 f(k^2) \tag{4.20}$$

dont la deuxième ne doit être appliquée qu'aux dérivées des scalaires dans (4.18) qui convergent pour $P = \infty$. La définition de $D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(p)$ se fait à partir de (4.18) en employant la règle générale (2.14). L'intégration en k peut être effectuée sur la première dérivée (par rap-

port à p^2) des scalaires indépendants de k^2 et sur la deuxième dérivée des termes avec k^2 si l'on utilise les valeurs limites*)

$$\lim_{P=\infty} \int_P dk\, \delta''(k^2 + A) = \frac{\pi}{A}$$

$$\lim_{P=\infty} \int_P dk\, k^2\, \delta'''(k^2 + A) = -\frac{2\pi}{A} \tag{4.21}$$

On trouve que

$$D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(p) = (p_\alpha p_\beta - g_{\alpha\beta} p^2)\, G(p^2) + b_0\, p_\alpha p_\beta + (b_1 + b_2 p^2)\, g_{\alpha\beta} \tag{4.22}$$

est déterminé en termes d'une fonction $G(p^2)$ et de *trois constantes arbitraires*. Vu que les noyaux définis en deuxième approximation apparaîtront dans les approximations supérieures, il est avantageux de les écrire dans une forme où l'opérateur d'onde est mis en évidence. On obtient ainsi

$$D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(p) = p_\alpha p_\beta G_{(0)}(p^2) - g_{\alpha\beta} \frac{(p^2+\mu^2)^2}{\varkappa^2} G_{(1)}(p^2) + g_{\alpha\beta}\big(b_1 \mu^2 - (p^2 + \mu^2)\, b_2\big) \tag{4.23}$$

On se rendra compte que $G_{(0)}$ ne contribue en quatrième approximation qu'aux effets de surface (elle contient une constante arbitraire). $G_{(1)}$ est une fonction définie qui figurera dans le résultat (Lamb shift) de la quatrième approximation.

$$G^{(s)}_{(\varkappa)\,(1)}(p^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{dv\left(v^2 - \frac{1}{3} v^4\right)}{\left(1 + \frac{p^2(1-v^2)}{4\varkappa^2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2(1-v^2)}{4\varkappa^2}\right)^2} \tag{4.24}$$

Pour évaluer (4.15), il est utile de décomposer ce spineur en

$$\Delta^{(s)}_{(22)}(p) = \Delta^{(s)}_{I\,(22)}(p) + \frac{1}{2\mu^2}\, \Delta^{(s)}_{II\,(22)}(p) \tag{4.25}$$

correspondant aux deux termes dans (4.5) et (4.10). L'évaluation de $\Delta^{(s)}_I(p)$ est analogue à celle de $D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}$. Nous l'écrivons sous une forme analogue à (4.23) en mettant en évidence l'opérateur d'onde.

$$\Delta^{(s)}_{I\,(22)}(p) = (i\gamma p + \varkappa)\, \Gamma_{(1)}(p)\, (i\gamma p + \varkappa) + b_3 \varkappa + b_4 (i\gamma p + \varkappa) \tag{4.26}$$

$\Gamma_{(1)}(p)$ est un spineur défini et les deux constantes sont arbitraires.

*) L'évaluation invariante en coordonnées polaires hyperboliques donne $0 \cdot \infty$.

Considérons maintenant $\Delta^{(s)}_{II\,(22)}(p)$. D'après (4.15) et (4.25), on a

$$_P\Delta^{(s)}_{II\,(22)}(p) = \frac{1}{(2\,\pi)^3} \int_P dk\,[(\gamma\,k)\,(i\,(\gamma,\,p-k)-\varkappa)\,(\gamma\,k)]\big(a^{-1}\,\delta(b)+b^{-1}\delta(a)\big)$$

$$a = k^2+\mu^2; \qquad b = (p-k)^2+\varkappa^2 \tag{4.27}$$

Nous écrivons l'expression spinorielle $[\ldots]$ sous la forme

$$[\ldots] = -(i\gamma\,p+\varkappa)\big(i\,(\gamma,\,p-k)-\varkappa\big)(i\gamma\,p+\varkappa)$$
$$-(i\gamma\,p+\varkappa)\,b - i\gamma\,k\,b \tag{4.28}$$

Alors l'identité $b\,\delta\,(b) \equiv 0$ et la règle

$$\lim_{P=\infty} \int_P dk\;\delta(k^2+\mu^2) = \text{const.} \tag{4.29}$$

déterminent (à un terme du type $b_4\,(i\gamma\,p+\varkappa)$ près)

$$\Delta^{(s)}_{II\,(22)}(p) = -(i\gamma\,p+\varkappa)\;\Gamma^{(s)}_{(0)}(p)\;(i\gamma\,p+\varkappa) \tag{4.30}$$

$\Gamma^{(s)}_{(0)}$ est une fonction à définir en employant la règle pour évaluer le produit

$$_P\Gamma^{(s)}_{(0)}(p) = \frac{1}{(2\,\pi)^4} \int_P dk\big(D^{(s)}_{(\mu)}(k)\;\Delta^{(1)}_{(\varkappa)}(p-k) + {}^{(1)\,(s)}_{\cdots}\big) \tag{4.31}$$

Elle contient deux constantes arbitraires. Nous montrerons que $\Gamma^{(s)}_{(0)}\,(p)$ ne contribue en quatrième approximation qu'aux effets de surface.

5. *Discussion des actions introduites par la deuxième approximation.* La mise en évidence des opérateurs d'onde $p^2+\mu^2$, resp. $i\gamma\,p+\varkappa$, montre par intégration partielle que, des actions bilinéaires, seule l'action locale

$$\boldsymbol{h}_{(22)}(x) = -\frac{1}{2}\,b_1\,\mu^2(\boldsymbol{\varphi})^{2\sim}(x) - i\,b_3\,\varkappa(\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{u})^{\sim}(x) \tag{4.32}$$

est explicitement indépendante de la surface. Elle contient une contribution proportionnelle au volume $(2\,L)^3\;2\,T$ de la période d'évolution. On peut montrer, qu'à des effets de surface près (4.32) est équivalent à une renormalisation des masses, déjà arbitraires, μ et $\varkappa$ du photon, resp. de l'électron, qu'on a introduites dans la théorie.

Les actions bilocales quadrilinéaires (4. 11) donnent lieu aux processus conservatifs de l'interaction entre deux charges, de l'effet Compton, et de la production de paires.

L'*interaction entre deux charges* contient un terme $\sim 1/\mu^2$. Par intégration partielle, ce terme se réduit à une action à distance entre des événements de surface parce que la charge satisfait à l'équation de continuité. L'influence de ce terme peut être négligée si la limite (3.1) est atteinte de la manière décrite à la fin du § 3. Dans les termes de l'*effet Compton*, on démontre que l'amplitude pour l'émission et l'absorption d'un photon longitudinal devient petite par rapport aux effets transversaux si $\mu \to 0$.

§ 5. La troisième approximation.

Pour ne pas allonger notre exposé, nous ne donnons pas la formule explicite analogue à (4.8), mais nous nous bornons à discuter le terme trilinéaire en $\boldsymbol{u}^\dagger \boldsymbol{u} \boldsymbol{\varphi}(x)$*). L'action contenue dans son complément causal est d'abord trilocale. On a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{(33)}(x, y, z) = -\Big[&\boldsymbol{\varphi}^\alpha(x)\, D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}(x-y)\, D^{(s)\beta\gamma}_{(\mu)}(y-z)\, \boldsymbol{J}_\gamma(z) - \frac{1}{4}\,(\overset{(1)\,(1)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}) \\ &+ \boldsymbol{u}^\dagger(x)\, \Delta^{(s)}_{(22)}(x-y)\, \Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(y-z)\, (\gamma\boldsymbol{\varphi})\, \boldsymbol{u}(z) - \frac{1}{4}\,(\overset{(1)\,(1)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}) \\ &+ \boldsymbol{u}^\dagger(\gamma\boldsymbol{\varphi})(x)\, \Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x-y)\, \Delta^{(s)}_{(22)}(y-z)\, \boldsymbol{u}(z) - \frac{1}{4}\,(\overset{(1)\,(1)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}) \\ &+ \boldsymbol{u}^\dagger(x)\, \Delta^{(s)}_{(33)\alpha}(x-y, y-z)\, \boldsymbol{u}(z)\, \boldsymbol{\varphi}^\alpha(y)\Big]^\sim \end{aligned} \tag{5.1}$$

Les trois premiers termes convergent sans autre et s'expriment en termes des fonctions apparues déjà en deuxième approximation. Le noyau nouveau est le produit

$$\begin{aligned}\Delta^{(s)}_{(33)\alpha}(x, y) = \frac{1}{2}\Big(&\gamma^\varrho\, \Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x)\, \gamma_\alpha\, \Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(y)\, \gamma^\sigma\, D^{(1)}_{(\mu)\varrho\sigma}(x+y) \\ &+ \overset{(s)\,(1)\,(s)}{\cdot\;\cdot\;\cdot} + \overset{(1)\,(s)\,(s)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}\Big) - \frac{1}{8}\,(\overset{(1)\,(1)\,(1)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Le dernier terme $-\frac{1}{8}(\ldots)$ converge sans autre. Puisqu'il ne contribue pas aux processus conservatifs de la quatrième approximation, il sera omis de la discussion au même titre que les $-\frac{1}{4}(\ldots)$ dans (5.1). Par analogie avec (4.25), nous mettons en évidence la contribution due au terme $\sim \mu^{-2}$.

$$\Delta^{(s)\alpha}_{(33)} = \Delta^{(s)\alpha}_{I\,(33)} + \frac{1}{2\,\mu^2}\, \Delta^{(s)\alpha}_{II\,(33)} \tag{5.3}$$

*) Dans les termes de plus haute linéarité, les produits (2.5) convergent. Les termes linéaires et trilinéaires en $\boldsymbol{\varphi}$ sont nuls pour des raisons de symétrie.

La première partie (~ 1) est

$$\Delta_{I\alpha}^{(s)}(p,q) \doteq \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_P dk \left((bc)^{-1}\delta(a) + (ca)^{-1}\delta(b) + (ab)^{-1}\delta(c)\right)$$
$$\times g_{\mu\nu}\left(\gamma^\mu (i(\gamma, p-k) - \varkappa)\gamma_\alpha (i(\gamma, q-k) - \varkappa)\gamma^\nu\right)$$
$$a = (p-k)^2 + \varkappa^2; \quad b = (q-k)^2 + \varkappa^2; \quad c = k^2 + \mu^2 \tag{5.4}$$

Elle sera évaluée analoguement à la première partie de (4.25). L'identité de Schwinger à employer est

$$\left((bc)^{-1}\delta(a) + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dv \int_0^1 du\, u\, \delta''\left(c(1-u) + \frac{1}{2}(a+b)u + \frac{1}{2}(a-b)uv\right) \tag{5.5}$$

La convergence de (5.4) nous permet d'interchanger de nouveau les intégrations. Par contre, pour mettre les variables scalaires,

$$\xi = p^2 \quad \eta = q^2 \quad \text{et} \quad \zeta = (p-q)^2 \tag{5.6}$$

en évidence, une translation

$$k' = k - \frac{u}{2}\left(p + q + (p-q)v\right) \tag{5.7}$$

doit être effectuée. Elle laisse invariant le domaine P (cylindre), *seulement si celui-ci est orienté parallèlement à l'axe* $p + q + (p-q)v$ *dépendant du scalaire* v. En vertu de (5.5), chaque facteur scalaire dans (5.4) est une somme sur des contributions dépendant de ce scalaire v. Ce changement du domaine, attribuant à chaque contribution un cylindre à orientation différente, ne peut affecter que la partie due aux très hautes fréquences.

Le résultat final est l'expression covariante

$${}_P\Delta_{I(33)}^{(s)\alpha}(p,q) = \frac{1}{4(2\pi)^3}\int_{-1}^{1} dv \int_0^1 du\, u \int_P dk\, \delta''\left(k^2 + B(\xi,\eta,\zeta,u,v)\right)$$
$$\times \left(\gamma^\varrho (i(\gamma, p-r) - \varkappa)\gamma^\alpha (i(\gamma, q-r) - \varkappa)\gamma_\varrho - k^2\gamma^\alpha\right)$$
$$r = \frac{u}{2}\left(p + q + (p-q)v\right) \tag{5.8}$$

avec

$$B(\xi,\eta,\zeta,u,v) = \mu^2(1-u) + \frac{p^2+\varkappa^2}{2}(u-u^2)(1+v)$$
$$+ \frac{(q^2+\varkappa^2)}{2}(u-u^2)(1-v) + u^2\varkappa^2\left(1 + \frac{(p-q)^2(1-v^2)}{4\varkappa^2}\right)$$

Le premier terme converge. Au deuxième terme, la règle fait correspondre le système définissant

$$\lim_{P=\infty} \partial_\xi \frac{-1}{4(2\pi)^3} \int_P dk\, k^2 \delta''\left(k^2 + B(\xi, \ldots)\right) = \frac{2\pi}{4(2\pi)^3} \partial_\xi \operatorname{Ln} \frac{B(\xi, \ldots)}{\varkappa^2} \tag{5.9}$$

Elle montre que la fonction logarithmique du deuxième membre est la solution générale avec une constante arbitraire. Mettant en évidence les opérateurs d'onde, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \Delta^{(s)\alpha}_{I(33)}(p, q) &= (i\gamma p + \varkappa)\, \Gamma^\alpha_{(2)}(p, q) + \Gamma^{\alpha\,\sim}_{(2)}(-q, -p)\,(i\gamma q + \varkappa) \\ &\quad + \gamma^\alpha \frac{((p-q)^2 + \mu^2)}{\varkappa^2} G_{(2)}\left((p-q)^2\right) \\ &\quad - i(p-q)_\gamma \frac{\sigma^{\alpha\gamma}}{2\varkappa}\left(\lambda + \frac{(p-q)^2 + \mu^2}{\varkappa^2} G_{(3)}\left((p-q)^2\right)\right) \\ &\quad - b_5 \gamma^\alpha; \qquad \sigma^{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\gamma]_- . \end{aligned} \tag{5.10*)}$$

Les termes contenant la fonction spinorielle $\Gamma^\alpha_{(2)}$ n'apportent pas de contribution dans l'exemple discuté. Nous écrivons par contre les fonctions scalaires qui déterminent la *constante* λ.

$$\begin{aligned} G_{(2)}(\zeta) = \Bigg[\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 u\, du \int_{-1}^1 dv \Bigg\{ \left(1 - u + \frac{u^2}{4}(1 + v^2)\right) \\ - \frac{\varkappa^2}{\zeta}(2 - 2u - u^2)\, v \frac{\partial}{\partial v} \Bigg\} \frac{\varkappa^2}{B(-\varkappa^2, -\varkappa^2, \zeta, u, v)} \Bigg] \\ - \frac{\mu^2}{\zeta + \mu^2}\left([\zeta] - [-\mu^2]\right) \end{aligned} \tag{5.11**)}$$

$$G_{(4)}(\zeta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 u\, du \int_{-1}^1 dv \frac{\varkappa^2 (u - u^2)}{B(-\varkappa^2, -\varkappa^2, \zeta, u, v)}$$

$$G_{(3)}(\zeta) = \frac{\varkappa^2}{\zeta + \mu^2}\left(G_{(4)}(\zeta) - G_{(4)}(-\mu^2)\right); \qquad \lambda = G_{(4)}(-\mu^2) \tag{5.12}$$

La deuxième partie de (5.3) est

$${}_P\Delta^{(s)\alpha}_{II(33)}(p, q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_P dk\, (\gamma^\mu \ldots \gamma^\nu)\, k_\mu k_\nu \left((bc)^{-1} \delta(a) + \ldots\right) \tag{5.13}$$

Elle contient l'expression spinorielle et les facteurs $\delta(a) \ldots$ de (5.4).

---

*) Dans (5.10) $\Gamma^{\alpha\,\sim}_{(2)AB} = \Gamma^\alpha_{(2)BA}$.

**) $[\zeta]$ et $[-\mu^2]$ sont le premier terme évalué pour ζ et pour $\zeta = -\mu^2$.

*

En analogie parfaite avec (4.27) et (4.28), on réarrange l'expression spinorielle pour obtenir la forme suivante (Λ^α est un spineur):

$$\begin{aligned}(k\gamma)\,(\,\overset{\alpha}{\cdot}\,)\,(k\gamma) &= (i\gamma p+\varkappa)\,\Lambda^\alpha(p,q,k)\,(i\gamma q+\varkappa)\\ &-(i\gamma p+\varkappa)\big(i(\gamma,p-k)-\varkappa\big)\gamma^\alpha b\\ &-\gamma^\alpha\big(i(\gamma,q-k)-\varkappa\big)(i\gamma q+\varkappa)\,a\\ &-\gamma^\alpha a\,b \end{aligned}\tag{5.14}$$

Au dernier terme, la règle (4.29) fait correspondre une constante, qu'on peut considérer comme déjà contenue dans la constante b_5. Le deuxième terme en (5.14) s'écrit, vu que $b\,\delta(b)\equiv 0$, sous la forme

$$-(i\gamma p+\varkappa)(2\pi)^{-3}\int\limits_P dk\big(i(\gamma,p-k)-\varkappa\big)\gamma^\alpha\big(c^{-1}\delta(a)+a^{-1}\delta(c)\big)\tag{5.15}$$

qui s'exprime en termes du $\Gamma_{(0)}(p)$ de (4.30). La même transformation peut être faite sur le troisième terme. Donc, le terme $\sim\frac{1}{2}\mu^{-2}$ en (5.3) a la forme

$$\begin{aligned}\Delta^{(s)\alpha}_{II\,(33)}(p,q) &= (i\gamma p+\varkappa)\,\Gamma^\alpha_{(3)}(p,q)\,(i\gamma q+\varkappa)\\ &-(i\gamma p+\varkappa)\,\Gamma_{(0)}(p)\,\gamma^\alpha\\ &-\gamma^\alpha\,\Gamma_{(0)}(q)\,(i\gamma q+\varkappa)\end{aligned}\tag{5.16}$$

$\Gamma^\alpha_{(3)}(p,q)$ doit être évalué en appliquant notre règle. Il contient une constante, mais n'apporte pas de contribution en quatrième approximation.

Discussion des résultats du terme trilinéaire de la troisième approximation: Elle ne peut être que formelle: La distinction entre des contributions dépendant explicitement de la surface et des contributions de volume n'a pas de sens, car comme dans la première approximation, aucun effet n'est possible sans qu'il n'emprunte de l'énergie au champ macroscopique. Mentionnons toujours, qu'une intégration partielle sépare la contribution proportionnelle à b_2 dans $D^{(s)}_{(22)\alpha\beta}$ en une action de surface explicite et une action de volume. Pour trouver l'action de volume, on utilise (3.3) dans (5.1) avec $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(x)$ et $\boldsymbol{\chi}^\alpha(x)=D^{(s)\alpha\beta}_{(\mu)}(x-y)\ldots$ On tient compte du fait que $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(x)$ et $D^{(s)\alpha\beta}_{(\mu)}$ satisfont à l'équation d'onde homogène, resp. inhomogène. La même séparation s'applique aux termes avec b_4 dans $\Delta^{(s)}_{(22)}$. On utilise dans (5.1) une relation analogue à (3.3):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int V dx\big(-\boldsymbol{u}(\gamma\partial)\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\cdot(\gamma\partial)\boldsymbol{w}\big)^\sim(x)-\int dx\big(V\boldsymbol{u}(x)\cdot\gamma\partial V\boldsymbol{w}(x)\big)^\sim\\ =+\frac{1}{2}\int v\,dx\big(-\boldsymbol{u}(\gamma\partial)\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\cdot(\gamma\partial)\boldsymbol{w}\big)^\sim\end{aligned}\tag{5.17}$$

et on tient compte du fait que $\boldsymbol{u}$ resp. $\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}$ satisfont à l'équation d'onde homogène, resp. inhomogène. Le terme avec la constante arbitraire $b_5\,\gamma^\beta$ et le terme avec la constante définie, λ, dans $\Delta^{(s)\alpha}_{(1)(33)}$ sont explicitement indépendants de la surface. Ainsi on trouve comme action de volume une action locale trilinéaire

$$\boldsymbol{h}_{(33)}(x) = \left(\frac{1}{2}\,b_2 + 2\,\frac{1}{2}\,b_4 + b_5\right)\boldsymbol{h}^J_{(13)}(x) + \lambda\,\boldsymbol{h}^N_{(33)}(x) \tag{5.18}$$

avec

$$\boldsymbol{h}^N_{(33)}(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}\boldsymbol{N}^{\alpha\beta}(x)\,; \quad \boldsymbol{N}^{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{2\varkappa}\,(\boldsymbol{u}^\dagger\sigma^{\alpha\beta}\boldsymbol{u})^\sim(x) \tag{5.19}$$

Cette action est équivalente à une renormalisation du paramètre arbitraire ε dans l'*action de charge*

$$\varepsilon \to \varepsilon'\,; \qquad \varepsilon' = \varepsilon\left(1 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\,b_2 + b_4 + b_5\right)\right) \tag{5.20}$$

et à l'introduction d'une nouvelle action trilinéaire, l'*action du moment* (5.19). Elle s'introduit avec un paramètre

$$\eta = \varepsilon^3\,\lambda = \varepsilon^3\,G_{(4)}(-\mu^2) \longrightarrow \frac{\varepsilon^3}{8\,\pi^2} \tag{5.21*}$$

§ 6. La quatrième approximation.

Nous ne discutons que les termes quadrilinéaires**). Considérons d'abord le terme en $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{\varphi}$: Son complément causal est une action quadrilocale.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_{(44)}(x,y,z,w) = \big(&i\,\boldsymbol{\varphi}_\alpha(x)D^{(s)\alpha\beta}_{(22)}(x-y)\,D^{(s)}_{(\mu)\beta\gamma}(y-z)\,\boldsymbol{u}^\dagger(z)\,\gamma^\gamma\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(z-w)(\gamma\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{u}(w)\\
&+\mathbf{conj}-\frac{1}{4}\,(\overset{(1)\,(1)\,(s)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}+\ldots)\\
&+i\,\boldsymbol{u}^\dagger\Delta^{(s)}_{(22)}(x-y)\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(y-z)\,(\gamma\boldsymbol{\varphi})\,(z)\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(z-w)\,(\gamma\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{u}\,(w)\\
&+\mathbf{conj}-\frac{1}{4}\,(\overset{(1)\,(1)\,(s)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}+\ldots)\\
&+i\,\boldsymbol{u}^\dagger(\gamma\boldsymbol{\varphi})(x)\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x-y)\,\Delta^{(s)}_{(22)}(y-z)\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(z-w)(\gamma\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{u}\,(w)-\frac{1}{4}\,(\ldots)\\
&+i\,\boldsymbol{u}^\dagger(x)\,\Delta^{(s)\alpha}_{(33)}(x-y,\,y-z)\,\boldsymbol{\varphi}_\alpha(y)\,\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(z-w)\,(\gamma\boldsymbol{\varphi})\,\boldsymbol{u}\,(w)\\
&+\mathbf{conj}-\frac{1}{4}\,(\overset{(1)\,(1)}{\cdot\;\cdot\;\cdot})\\
&+i\,\boldsymbol{u}^\dagger(x)\Delta^{(s)\alpha\beta}_{(44)}(x-y,y-z,z-w)\,\boldsymbol{u}\,(w)\,\boldsymbol{\varphi}_\alpha(y)\,\boldsymbol{\varphi}_\beta(z)\big)^\sim
\end{aligned} \tag{6.1***}$$

*) Dans (5.21), $\to$ signifie le passage à $\mu^2 \to 0$.

**) Les termes de plus haut degré convergent sans autre. Les processus conservatifs des termes bilinéaires donnent une nouvelle renormalisation arbitraire des masses μ et $\varkappa$.

***) **conj** signifie l'expression conjugée. $\overset{(1)\,(1)\,(s)}{\cdot\;\cdot\;\cdot}+\ldots$ comprend les trois permutations de $^{(1)\,(1)\,(s)}$.

Elle contient, outre les fonctions provenant de la deuxième et troisième approximation, le noyau

$$\Delta^{(s)\alpha\beta}_{(44)}(x,y,z) = \frac{1}{2}\big(\gamma^\varrho \Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(x)\gamma^\alpha \Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(y)\gamma^\beta \Delta^{(s)}_{(\varkappa)}(z)\gamma^\sigma(g_{\varrho\sigma}-\mu^{-2}\partial_\varrho\partial_\sigma)D^{(1)}_{(\mu)}(x+y+z)$$

$$+{}^{(s)(s)(1)(s)} + {}^{(s)(1)(s)(s)} + {}^{(1)(s)(s)(s)}\big) - \frac{1}{8}\big({}^{(1)(1)(1)(s)} + \ldots\big)$$

$$\equiv \Delta^{(s)\alpha\beta}_{I(44)} + \frac{1}{2\mu^2}\Delta^{(s)\alpha\beta}_{II(44)} - \frac{1}{8}(\ldots) \tag{6.2}$$

Comme cette approximation contient des processus conservatifs, on peut omettre le terme $\frac{1}{8}(\ldots)$ en (6.2) et les termes $-\frac{1}{4}(\ldots)$ en (6.1), car ils ne contribuent qu'à des effets implicites de la surface. Le reste de (6.2) est encore une fois séparé en ses deux parties ~ 1 et $\sim \mu^{-2}$. L'évaluation de la première partie utilise une identité de Schwinger. Il est explicitement donné par Schafrot[11]). Convergeant sans autre, il ne contient aucune constante arbitraire. La partie $\sim \frac{1}{2}\mu^{-2}$ peut s'évaluer d'une manière analogue aux deux évaluations précédentes. On montre qu'il se réduit à une expression contenant le $\Gamma_{(0)}$ introduit dans les deux approximations précédentes:

$$\Delta^{(s)\alpha\beta}_{II(44)} = -\,\delta(x)\,\gamma^\alpha \Gamma_{(0)}(y)\,\gamma^\beta\,\delta(z) \tag{6.3}$$

Vu qu'une séparation entre des processus conservatifs et non conservatifs est possible, il suffit de démontrer (6.3) par une intégration partielle des dérivées $\partial_\varrho\,\partial_\sigma\,D^{(1)}_{(\mu)}$ dans le ${}_P\Delta^{(s)\alpha\beta}_{II(44)}$ correspondant à (6.2). Parmi les quatre permutations, seules les permutations ^{sss1} et ^{s1ss} apportent une contribution, car, chaque fois qu'on a $\boldsymbol{u}^\dagger\gamma^\varrho\Delta^{(1)}_{(\varkappa)}$ ou $\Delta^{(1)}_{(\varkappa)}\gamma_\sigma\boldsymbol{u}$, l'équation de continuité annuelle le terme. Vu (4.31) et vu les équations d'onde (4.12), on obtient (6.3).

Discussion des termes quadrilinéaires et conservatifs de la quatrième approximation: 1. *Le terme quadrilinéaire en* $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{\varphi}$: Nous montrons d'abord l'influence des constantes arbitraires b_2, b_4, et b_5 contenues dans les distributions dans $D^{(s)\alpha\beta}_{(22)}$ (4.23), $\Delta^{(s)}_{(22)}$ (4.26), et dans $\Delta^{(s)\alpha}_{(33)}$ (5.10). L'intégration partielle (3.3) appliquée aux deux termes avec $D^{(s)}_{(22)}$ dans (6.1), y substitue (en vertu des équations d'onde pour $\boldsymbol{\varphi}$ et $D^{(s)}_{(\mu)}$) $2\cdot\frac{1}{2}b_2$ fois l'action correspondante de la deuxième approximation dans (4.11). L'intégration partielle (5.17) des deux termes contenant $\boldsymbol{u}^\dagger\,\Delta^{(s)}_{(22)}$ et $\Delta^{(s)}_{(22)}\,\boldsymbol{u}$ donne (en vertu des équations d'onde pour $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}^\dagger$, et $\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}$) $2\cdot\frac{1}{2}b_4$ fois cette action. Le cinquième terme dans (6.1), contenant $\Delta^{(s)}_{(22)}$ «au milieu», donne $2\cdot\frac{1}{2}b_4$ fois cette même action, car dans l'application de (5.17), $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{w}$ sont des $\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}$ qui satisfont les deux à l'équation inhomogène. Cette ma-

nière d'évaluer les contributions élimine l'arbitraire contenu dans la discussion de SCHWINGER*) et de DYSON**). Finalement, la partie arbitraire des deux termes contenant $\Delta^{(s)}_{(33)}$ donne $2\,b_5$ fois cette action. Ains, on obtient dans (6.1), comme contribution due aux constantes arbitraires, une action bilocale

$$\boldsymbol{h}_{(44)}(x, y) = 2\left(\frac{1}{2}\,b_2 + 2\,\frac{1}{2}\,b_4 + b_5\right)\boldsymbol{h}_{(24)}(x, y) \tag{6.4}$$

Cette action équivaut à la deuxième approximation en ε' (de l'action de charge) développée jusqu'à ε^4:

$$\begin{aligned}\varepsilon'\,\boldsymbol{h}^J_{(13)}(x) &= \varepsilon\,\boldsymbol{h}^J_{(13)} + \varepsilon^3\,\boldsymbol{h}^J_{(33)}(x)\\ &= \varepsilon\left(1 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\,b_2 + b_4 + b_5\right)\right)\boldsymbol{h}^J_{(13)}\end{aligned} \tag{6.5}$$

Il nous reste à discuter l'influence des constantes dans $\Gamma_{(0)}(x)$ figurant dans $\Delta^{(s)}_{II\,(22)}$ dans $\Delta^{(s)\alpha}_{II\,(33)}$ et dans $\Delta^{(s)\alpha\beta}_{II\,(44)}$. On vérifie immédiatement que les opérateurs d'onde contenus dans $\Delta^{(s)\alpha}_{II(33)}$ et $\Delta^{(s)}_{II(22)}$, opérant (par intégration partielle) sur les $\Delta^{(s)}_{(\varkappa)}$ et les $\boldsymbol{u}$, réduisent ces termes à la forme (6.3), et que *leur somme est nulle.*

2⁰ *Le terme quadrilinéaire en* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{u}^\dagger$: Il contient la même renormalisation de la charge (6.4) et (6.5). La contribution $\sim \mu^{-2}$ de $\Delta^{(s)}_{(22)}$ et $\Delta^{(s)\alpha}_{(33)}$ n'entre pas dans $\boldsymbol{h}_{(44)}$. Le terme ~ 1, $\Delta^{(s)}_{I\,(44)}$, est convergent sans ambiguïté. Dans la fonction $\Delta^{(s)}_{II\,(44)}$, les deux termes avec μ^{-2} se compensent mutuellement. A part l'action tétralocale contenant $\Delta^{(s)}_{I\,(44)}$, et l'action (6.4), une *nouvelle action bilocale à longue distance* ($\sim \mu^{-2}$) apparaît:

$$\boldsymbol{h}^{NJ}_{(\mu)(44)}(x, y) = -\,\lambda\left(\partial_\alpha \boldsymbol{N}^{\alpha\beta}(x)\,D^{(s)}_{(\mu)\,\beta\gamma}(x-y)\,\boldsymbol{J}^\gamma(y)\right)^{\sim} \tag{6.6}$$

Elle exprime que la charge $\boldsymbol{J}^\alpha$ agit par son potentiel symétrique sur le moment $\boldsymbol{N}^{\alpha\beta}$ (anomalie du facteur g). Une *action à courte distance* ($\sim \varkappa^{-1}$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_{(\varkappa)(44)}(x,y) &= \frac{1}{2\,\varkappa^2}\,\boldsymbol{J}^\alpha(x)\left\{G_{(\varkappa)(1)} - 2\,G_{(\varkappa)(2)}\right\}(x-y)\,\boldsymbol{J}_\alpha(y)\\ &\quad - \frac{1}{\varkappa^2}\,\partial_\alpha \boldsymbol{N}^{\alpha\beta}(x)\,G_{(\varkappa)(3)}(x-y)\,\boldsymbol{J}_\beta(y)\end{aligned} \tag{6.7}$$

entre les deux charges, resp. entre moment et charge, s'ajoute aux actions à longue distance (LAMB-RETHERFORD shift).

---

*) Bibliographie 5, p. 794, Eqs. (1.48)—(1.52).
**) Bibliographie 8, p. 1752, Eq. 98.

3° *Le terme quadrilinéaire en* φ converge avec l'emploi de la règle naturelle, donc sans l'introduction de constantes arbitraires. Il a été explicitement calculé par KARPLUS et NEUMAN[12]).

4° Mentionnons encore que la partie hermitienne de $\boldsymbol{S}_{(4)}$ contient aussi des actions de volume dues au réarrangement de $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}_{(2)}\boldsymbol{A}_{(2)})^{\sim}$. On constate en particulier que les termes dus à μ^{-2} n'apportent pas de contribution.

Nous avons donc démontré que l'action de charge détermine, en utilisant la règle proposée, les amplitudes des processus conservatifs dans la matrice $\boldsymbol{S}[V]$ *en quatrième approximation**). Celles-ci dépendent uniquement des *deux masses arbitraires* (μ et $\varkappa$) et d'un *paramètre de couplage arbitraire* (ε).

5° Le passage à la limite $\mu \to 0$ est possible sans autres précautions que celles mentionnées à la fin des §§ 3 et 4, car toute contribution $\sim \mu^{-2}$ a disparu dans les amplitudes qui se rapportent aux processus conservatifs**).

Institut de Physique de l'Université, Genève.

BIBLIOGRAPHIE.

1) D. RIVIER, H.P.A. XXII **3**, 265 (1949).
2) E. C. G. STUECKELBERG et D. RIVIER, H. P. A. XXIII, 1—2, 216 (1950).
3) E. C. G. STUECKELBERG et D. RIVIER, H.P.A. XXIII, Sup. 3, 236 (1950).
4) E. C. G. STUECKELBERG, Phys. Rev. **81**, 130 (1951).
5) J. SCHWINGER, Phys. Rev. **76**, 790 (1949).
6) TOMONAGA, Progress in Theoretical Physics 1 (1946).
7) FEYNMAN, Phys. Rev. **76**, 749 et 769 (1949).
8) DYSON, Phys. Rev. **75**, 486 et 1736 (1949).
9) W. PAULI et F. VILLARS, Rev. Mod. Phys. **21**, Nr. 3, 434 (1949).
10) E. C. G. STUECKELBERG, H. P. A. **11**, 242 (1938).
11) SCHAFROTH, H.P.A. XXII, 501 (1949).
12) KARPLUS and NEUMAN, Phys. Rev. **80**, 381 (1950).

*) *Note ajoutée aux épreuves:* Entre temps, M. A. PETERMANN (Lausanne) a trouvé la démonstration que les contributions provenant des termes $\sim \mu^{-2}$ s'éliminent dans toutes les approximations pour les processus conservatifs. Ce résultat fera l'objet d'une publication prochaine.

**) Dans la fonction $G_{(2)}$ (Eqs. (5.10) et (5.11)) la constante $\mathrm{Ln}\ \varkappa/\mu$, que l'on obtient en effectuant l'intégration en u, correspond à la constante

$$\left(1+\mathrm{Ln}\ \frac{\varkappa}{2\,k_{\mathrm{min.}}}\right)$$

qui apparaît dans la théorie de SCHWINGER[5]).