**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta

**Band:** 24 (1951)

**Heft:** II

**Artikel:** Zur Theorie der starken Kopplung zwischen Nucleonen und pseudovektoriellen Mesonen

**Autor:** Rüdenberg, Klaus

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-112209

# Zur Theorie der starken Kopplung zwischen Nucleonen und pseudovektoriellen Mesonen

von **Klaus Rüdenberg.**

(19. VII. 1950.)

Wenn man aus den Mesonfeldtheorien die Kernkräfte berechnen will, steht die tatsächliche Stärke der Wechselwirkung einer erfolgreichen Anwendung der üblichen, eine schwache Kopplung voraussetzenden, Störungstheorie bekanntlich im Wege. Um dies Hindernis zu überwinden, hat G. Wentzel vorgeschlagen, eine Entwicklung nach fallenden anstatt nach steigenden Potenzen des Kopplungsparameters vorzunehmen, was die Annahme einer sehr starken Kopplung zwischen Mesonen und Nucleonen impliziert. Seither sind Rechnungen in diesem Sinne an den verschiedenen Varianten der Mesontheorie mit Ausnahme des Pseudovektorfeldes ausgeführt worden, und es haben sich dabei Widersprüche mit der Erfahrung ergeben[1]).

Um die Sachlage völlig klären zu können, ist es nötig, auch das pseudovektorielle Mesonfeld in starker Kopplung an Nucleonen zu untersuchen. Dieser Feldtypus ist bisher etwas stiefmütterlich behandelt worden, vermutlich weil er bei schwacher Kopplung abstossende Kräfte für das Zwei-Nucleon-Problem liefert[2]). Diese Tatsache sollte indessen zu keinem Vorurteil führen, da die starke Kopplung neue Verhältnisse schafft, infolge derer die Kräfte zwischen zwei Nucleonen ganz allgemein die Tendenz haben, für kleine Abstände anziehend zu werden[3]).

Die vorliegende Arbeit will einen ersten Beitrag zur Ausfüllung der erwähnten Lücke leisten. Die Hauptziele sind, unter Zugrundelegung der beiden bekannten Kopplungsansätze des Pseudovektorfeldes[2]) die „Isobaren-Energie“ und die statischen Kernkräfte bei starker Kopplung in der üblichen Näherung zu berechnen, und zwar für eine ladungs-symmetrische Theorie. — Weitere Fragen, wie die nach dem Sättigungscharakter der abgeleiteten Kräfte oder nach dem magnetischen Moment von Proton und Neutron, sollen hier ausser Betracht bleiben.

Die allgemeinen Linien der Untersuchung entsprechen dem in diesem Gebiet bisher angewendeten Schema und ähneln speziell der Behandlung des Vektorfeldes durch G. WENTZEL[4]). Unser Wechselwirkungsansatz ist von jenem Fall jedoch deutlich verschieden, insbesondere koppelt jeder seiner beiden Terme longitudinale und transversale Mesonen zugleich.

## I. Hamiltonfunktion und passende Feldvariable.

### *§ 1. Lagrange- und Hamiltonfunktion für das Ein-Nucleon-Problem.*

Das reelle Pseudovektorfeld, mit dessen Betrachtung wir beginnen, besteht aus den reellen Feldfunktionen $(\psi_1\, \psi_2\, \psi_3\, \psi_0)$. Bei einer Lorentztransformation der Raumzeitkoordinaten $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4 = ict)$ transformiert sich $(\psi_1\, \psi_2\, \psi_3\, \psi_4 = i\, \psi_0)$ als Pseudovektor, d. h. der Vierervektortransformation ist noch die Multiplikation mit der Determinante $(\pm 1)$ der Lorentztransformation hinzuzufügen. In der Lagrangefunktion des Feldes

$$L = L_0 + L' \tag{1.1}$$

charakterisiert

$$L_0 = -\frac{1}{4} \sum_{\lambda\,\nu}^{4} \left(\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_\nu}\right)^2 - \frac{1}{2}\, \mu^2 \sum_{\nu}^{4} \psi_\nu^2 \tag{1.2}$$

das Vakuumfeld[5]). (Wir setzen $\hbar = c = 1$, $\mu$ = Mesonruhmasse mit der Dimension einer reziproken Länge. Im Vakuum stimmen Vektor- und Pseudovektorfeld überein.) $L'$ stellt die Wechselwirkung mit dem Nucleon dar. Wir denken es als ruhend vorgegeben, wie man es in der starken Kopplung bisher stets angenommen hat, eine Berücksichtigung der Rückwirkung auf das Nucleon ist noch nicht versucht worden. — Um $L'$ zu finden, gehen wir von dem Kopplungsansatz aus, den N. KEMMER für den allgemeinen Fall der nichtstatischen Wechselwirkung zwischen einem Pseudovektorfeld und einem Dirac-Nucleonfeld abgeleitet hat[2]):

$$L' = -\left\{ f \sum_{\nu}^{4} S_\nu\, \psi_\nu + \frac{g}{\mu}\, \frac{1}{2} \sum_{\mu\,\nu}^{4} R_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}\right) \right\} \tag{1.3}$$

Hierin sind $f, g$ zwei reelle Kopplungsparameter und die $S_\nu\, R_{\mu\nu}$ aus den Dirac-Nucleon-Spinoren $\Phi = (\Phi_1\, \Phi_2\, \Phi_3\, \Phi_4)$ und den Dirac-Matrizen $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3\, \gamma_4$, $\gamma_5 = \gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3\, \gamma_4$, $\sigma_j = -\, i\gamma_k\, \gamma_l$ ($j\,k\,l$ zykl.) gebildet gemäss:

$$S_\nu = \Phi^*\, \sigma_\nu\, \Phi, \qquad \sigma_j = -\, i\, \gamma_k \gamma_l, \qquad \sigma_4 = -\, i\, \gamma_5 \tag{1.4}$$

($j$, $k$, $l$: (zykl. Perm. v. 123)

$$R_{\mu\nu} = \Phi^*\, \varrho_{\mu\nu}\, \Phi, \quad \varrho_{jk} = \gamma_l, \quad \varrho_{4j} = i\, \sigma_j\, \beta = \gamma_k\, \gamma_l\, \gamma_4, \quad \varrho_{\nu\nu} = 0 \tag{1.5}$$

D. h. $S_\nu$ ist der duale Pseudovektor zum antimetrischen Tensor III. Stufe $(-\Phi^+\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\,\Phi)$, ($\lambda_{\mu\nu}$ alle verschieden, $\Phi^+ = i\Phi^*\gamma_4$); und $R_{\mu\nu}$ ist der duale Pseudotensor zum antimetrischen Tensor II. Stufe $(-i\Phi^+\gamma_\mu\gamma_\nu\Phi)$, $(\mu \neq \nu)$. Damit ergibt sich für $L'$ die zu fordernde relativistische Invarianz. — Beschränken wir uns nun im Sinne der Annahme eines ruhenden Nucleons auf die unrelativistische Näherung $\Phi_3 = \Phi_4 = 0$, $\{\Phi_1\,\Phi_2\} = \{\varphi_+\,\varphi_-\} = \varphi$, so vereinfacht sich der Kopplungsansatz (1.3), wenn man für die Diracmatrizen die übliche Darstellung wählt, zu

$$L' = -\left(\vec{S}\cdot\left[f\vec{\psi} + \frac{g}{\mu}\,i\left(\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial x_4} - \operatorname{grad}\psi_4\right)\right]\right) \tag{1.6}$$

$$\vec{\psi} = (\psi_1\,\psi_2\,\psi_3) \qquad \vec{S} = \varphi^*\,\vec{\sigma}\,\varphi$$

wo jetzt $\vec{\sigma} = (\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3)$ die Paulischen Spinmatrizen sind.

Indem wir in der Lagrangefunktion (1.1, 2,6) nun $\vec{S}$ als die vorgegebenen Quellen des Feldes behandeln, erhalten wir die Feldgleichungen des Pseudovektorfeldes $\vec{\psi}$. Zur Transformation in die kanonische Form ist zu bemerken, dass $\pi_4 = 0$ wird, da $L$ nicht von $\dot{\psi}_4$ abhängt. Wie in der Vektortheorie wird der Übergang in die Hamiltonsche Form dadurch möglich, dass man $\psi_4$ aus den Feldgleichungen eliminiert. Diese Methode[6]) führt uns zu der Hamiltonfunktion $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}'$:

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{1}{2}\left\{\mu^2\vec{\psi}^2 + (\operatorname{rot}\vec{\psi})^2 + \vec{\pi}^2 + \frac{1}{\mu^2}(\operatorname{div}\vec{\pi})^2\right\} \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{H}' = \left(\vec{S}\cdot\left[f\vec{\psi} + \frac{g}{\mu}\cdot\vec{\pi}\right]\right) \tag{1.8}$$

wo $\vec{\pi} = (\pi_1\,\pi_2\,\pi_3)$ das zu $\vec{\psi} = (\psi_1\,\psi_2\,\psi_3)$ kanonisch konjugierte Feld ist. Genau gesagt: Die kanonischen Gleichungen

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial t} = \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\pi_j} - \sum_k^3 \frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\left(\frac{\partial\pi_j}{\partial x_k}\right)} \qquad \frac{\partial\pi_j}{\partial t} = -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\psi_j} + \sum_k^3 \frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x_k}\right)}$$

und die zusätzliche Definition von $\psi_0$ durch $\mu^2\psi_0 = \operatorname{div}\vec{\pi}$ sind zusammen dem aus $L$ folgenden Lagrangeschen Gleichungssystem äquivalent.

Den Übergang zur Quantentheorie vollziehen wir, indem wir die $\vec{\psi}$, $\vec{\pi}$ als hermitesche Operatorfelder auffassen, die auf eine Schrödingerfunktion $F$ wirken. Ferner soll jetzt, auch bei ruhendem Nucleon, die Rückwirkung auf den Nucleonspin berücksichtigt werden. Wir nehmen daher eine zweikomponentige Schrödingerfunktion $F_\alpha$ $(\alpha = +-)$ an, und setzten in Analogie zu (1.6) für $\vec{S}$ den Operator $\vec{S} = \delta_a(x)\vec{\sigma}$, so dass $\mathfrak{H}$ durch die Matrizen $\sigma_k$ auf die

Spinindizes $\alpha$ von $F$ operiert. Die vorgegebene reelle Formfunktion $\delta_a(x)$ des Nucleons beschreibt eine Quelle der Lineardimension $a$. Wir müssen dabei stehenbleiben, obwohl im Sinne der punktförmigen Wechselwirkung und der relativistischen Invarianz $\delta_a$ durch die Diracsche $\delta$-Funktion zu ersetzen wäre. Denn — wie wir später sehen werden — führt der lim $a \to 0$ zu unendlich grosser Spinträgheit. Damit ergibt sich aus (1.8) der Operator

$$\mathfrak{H}' = \delta_a(x) \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \left(f\, \psi_k + \frac{g}{\mu}\, \pi_k\right) \tag{1.9}$$

Die Formfunktion $\delta_a(x)$ wird zweckmässig kugelsymmetrisch gewählt (vgl. § 2) und erfüllt:

$$\int dX\, \delta_a(x) = 1 \qquad x = \vec{x} = (x_1\, x_2\, x_3) \qquad dX = dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{1.10}$$

Die dimensionslosen Kopplungskonstanten $f$, $g$ sollen reell $> 0$ sein.

Nun gehen wir noch vom reellen Feld zum ladungssymmetrischen Feld über. An die Stelle von $\vec{\psi}$ treten 3 reelle Felder $\vec{\psi}_\varrho$ mit den 9 Komponenten $\psi_{k\varrho}$ ($k$, $\varrho$ = 1, 2, 3) und die kanonisch konjugierten $\pi_{k\varrho}$. Der neue Index $\varrho$ bezeichnet „Komponenten im Raum des isotopen Spins". Zum Unterschied vom reellen Feld trägt das symmetrische eine Ladung. Um der Rückwirkung auf die Ladung des Nucleons Rechnung zu tragen, erhält die Schrödingerfunktion zu dem Spinindex $\alpha$ (= +, —) noch den Ladungsindex $\lambda$ (= 0,1) und wird so vierkomponentig: $F_{\alpha\lambda}$. Der Hamiltonoperator dieses symmetrischen Pseudovektorfeldes ergibt sich in bekannter Verallgemeinerung[7]) der Gleichungen (1.7,9) zu:

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{3} \left\{ \vec{\pi}_\varrho^{\,2} + \frac{1}{\mu^2} (\operatorname{div} \vec{\pi}_\varrho)^2 + \mu^2\, \vec{\psi}_\varrho^{\,2} + (\operatorname{rot} \vec{\psi}_\varrho)^2 \right\} \tag{1.11}$$

$$\mathfrak{H}' = \delta_a(x) \sum_{k=1}^{3} \sum_{\varrho=1}^{3} \sigma_k\, \tau_\varrho \left(f\, \psi_{k\varrho} + \frac{g}{\mu}\, \pi_{k\varrho}\right) \tag{1.11'}$$

wo die den Paulischen Matrizen analogen „isotopen Spinmatrizen" $(\tau_1\, \tau_2\, \tau_3) = \vec{\tau}$ auf die Ladungsindizes $\lambda$ von $F_{\alpha\lambda}$ wirken. Die $(\sigma_k \tau_\varrho)$ sind als direkte Produkte (Kroneckerprodukte) mit 4 Zeilen und Kolonnen aufzufassen. Der durch (1.11, 11') gegebene Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H' = \int dX\, (\mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}') \tag{1.12}$$

gibt der symmetrischen Theorie bekanntlich den Vorzug, zu ladungsunabhängigen Kernkräften zu führen.

## § 2. *Entwicklung nach einem reellen Orthogonalsystem.*

Es empfiehlt sich, die Feldfunktionen $\psi_{k\varrho}\ \pi_{k\varrho}$ nach einem vollständigen Orthogonalsystem von reellen Ortsfunktionen $U_r$ ($r = 0, 1, 2, \ldots \infty$) zu entwickeln[8]):

$$\psi_{k\varrho} = \sum_r q_{rk\varrho} U_r(x) \qquad \pi_{k\varrho} = \sum_r p_{rk\varrho} U_r(x) \qquad \int dX\, U_r U_s = \delta_{rs} \tag{2.1}$$

Über die $U_r$ werden keine besonderen Annahmen gemacht, bis auf die Festsetzung

$$U_0(x) = \frac{1}{\eta}\,\delta_a(x) \qquad (\eta > 0) \tag{2.2}$$

Sie bedingt:

$$\int dX\, \delta_a(x)\, U_s(x) = 0 \qquad \text{für } s \geqslant 1 \tag{2.3}$$

$$\int dX\, \delta_a^2(x) = \eta^2 \qquad \text{für } \eta \tag{2.4}$$

woraus in Verbindung mit (1.10) die Grössenordnung

$$\eta \approx a^{-3/2} \tag{2.5}$$

folgt. Die Wahl (2.2) führt zu einem einfachen Ausdruck für $H'$, und es wird sich später zeigen, dass der Teil ($q_{0k\varrho}\, U_0(x)$) des Mesonfeldes $\psi_{k\varrho}$, welcher „nur am Ort des Nucleons" $\neq 0$ ist, als derjenige Feldanteil aufgefasst werden kann, den das Nucleon fest an sich bindet.

Indem wir (2.1, 2) in den Hamiltonoperator (1.11, 11′, 12) einführen erhalten wir[8])

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_\varrho \sum_{rs} \sum_{kl} \{A_{rk,sl}\, p_{rk\varrho}\, p_{sl\varrho} + B_{rk,sl}\, q_{rk\varrho}\, q_{sl\varrho}\} \tag{2.6}$$

$$H' = \eta \sum_{\varrho k} \sigma_k \tau_\varrho \left(f\, q_{0k\varrho} + \frac{g}{\mu}\, p_{0k\varrho}\right) \tag{2.7}$$

wobei:

$$A_{rk,sl} = \int dX\, U_r \left\{\delta_{kl} - \frac{1}{\mu^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l}\right\} U_s \tag{2.8}$$

$$B_{rk,sl} = \int dX\, U_r \left\{\delta_{kl}(\mu^2 - \Delta) + \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l}\right\} U_s \tag{2.9}$$

Die inversen Matrizen

$$\overline{A}_{rk,sl} = \int dX\, U_r \left\{\delta_{kl} + \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l}\,(\mu^2 - \Delta)^{-1}\right\} U_s \tag{2.10}$$

$$\overline{B}_{rk,sl} = \int dX\, U_r \left\{\delta_{kl} - \frac{1}{\mu^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_l}\right\} (\mu^2 - \Delta)^{-1}\, U_s \tag{2.11}$$

erfüllten die Beziehungen

$$\sum_{sl} A_{rk,\,sl}\,\bar{A}_{sl,\,r'k'} = \sum_{sl} B_{rk,\,sl}\,\bar{B}_{sl,\,r'k'} = \delta_{rr'}\,\delta_{kk'}$$

Man erhält sie, wenn man in der Identität

$$\sum_{l}\left\{\delta_{kl}(\mu^2-\Delta)+\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\right\}\left\{\delta_{lk'}-\frac{1}{\mu^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_{k'}}\right\}(\mu^2-\Delta)^{-1}=\delta_{kk'}$$

die reellen hermiteschen Operatoren

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\,,\quad (\mu^2-\Delta)\,,\quad (\mu^2-\Delta)^{-1}f(x)=\int dX'\,f(x')\,\frac{e^{-\mu|x-x'|}}{4\pi\,|x-x'|}$$

durch die Matrizen ersetzt, welche sie in der Basis der $U_r$ darstellen.

Die Matrizen $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ sind in $(r, s)$ und in $(k, l)$ getrennt symmetrisch. Für $r = s = 0$ vereinfachen sie sich, wenn man die Kugelsymmetrie in (2.2) in Betracht zieht, zu[9]):

$$A_{0k,\,0l}=A_0\,\delta_{kl},\quad \bar{A}_{0k,\,0l}=\bar{A}_0\,\delta_{kl},\quad B_{0k,\,0l}=B_0\,\delta_{kl},\quad \bar{B}_{0k,\,0l}=\bar{B}_0\,\delta_{kl} \tag{2.12}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A_0&=1-\frac{1}{3\,\mu^2}\int dX\,U_0\,\Delta U_0 & \bar{A}_0&=\frac{2}{3}+\frac{\mu^2}{3}\int dX\,U_0(\mu^2-\Delta)^{-1}U_0\\ B_0&=\mu^2-\frac{3}{2}\int dX\,U_0\,\Delta U_0 & \bar{B}_0&=\frac{1}{3\,\mu^2}+\frac{2}{3}\int dX\,U_0(\mu^2-\Delta)^{-1}U_0\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

## II. Approximation des Hamiltonoperators im Fall $f \neq 0$, $g = 0$.

### *§ 3. Einführung der Näherungsvoraussetzungen der starken Kopplung.*

Die Grundvorstellung der starken Kopplung ist, dass man infolge der Grösse der Parameter $f$ und $g$ den Wechselwirkungsterm $H'$ als etwas Grosses zu betrachten hat. Im Gegensatz zur üblichen Störungstheorie wendet man daher die Aufmerksamkeit zunächst diesem Operator $H'$ zu, und unser erster Schritt wird darin bestehen, ihn als Matrix bezüglich Spin und Ladungsvariablen diagonal zu machen. Wir transformieren zu diesem Zweck die Schrödingergleichung

$$\sum_{\alpha'\lambda'} H_{\alpha\lambda,\,\alpha'\lambda'}\,F_{\alpha'\lambda'} = E\,F_{\alpha\lambda} \tag{3.1}$$

mit einer unitären Matrix $\mathfrak{U}_{\alpha\lambda,\,\alpha'\lambda'}$ in

$$\sum_{\alpha'\lambda'}\left\{(\mathfrak{U}^*H_0\,\mathfrak{U})_{\alpha\lambda,\,\alpha'\lambda'}+(\mathfrak{U}^*H'\,\mathfrak{U})_{\alpha\lambda,\,\alpha'\lambda'}\right\}F'_{\alpha'\lambda'}=E\,F'_{\alpha\lambda} \tag{3.2}$$

$$F'=\mathfrak{U}^*F,\quad F=\mathfrak{U}F' \tag{3.2'}$$

wobei $\mathfrak{U}$ so gewählt ist, dass $(\mathfrak{U}^*H'\,\mathfrak{U})$ eine Diagonalmatrix wird.

Zur Durchführung setzen wir im folgenden zunächst $g = 0$ voraus, so dass

$$H' = \gamma \sum_{\varrho k} (\sigma_k \times \tau_\varrho)\, q_{0\,k\,\varrho} \qquad \gamma = \eta f > 0 \text{ [10]} \tag{3.3}$$

Zur Konstruktion der Matrix $\mathfrak{U}$ gehen wir folgendermassen vor. Sei mit $q$ die reelle Matrix $(q_{0\,k\varrho})$, $(k, \varrho = 1, 2, 3)$ bezeichnet, mit $q'$ ihre Transponierte. Dann sind die Eigenwerte der Matrix $(qq')$ reell, da $(qq')$ symmetrisch, und positiv (da die zugehörige quadratische Form sich leicht als Summe von Quadraten schreiben lässt). Sei $r$ die Matrix $(r_n\,\delta_{nm})$, wo $r_1, r_2, r_3$ die positiven Wurzeln dieser Eigenwerte sind, und sei $s$ die reelle, orthogonale Matrix, die $(qq')$ diagonal macht, so dass:

$$s'(qq')\,s = r^2 \qquad ss' = 1 \tag{3.4}$$

Dann gilt folgendes: Die Matrix $t = q' s r^{-1}$ ist ebenfalls orthogonal, und sie bringt die Matrix $(q'\,q)$ auf Diagonalform. In der Tat folgt aus (3.4):

$$r^{-1} s' q q' s r^{-1} = t' t = 1$$

und

$$t' q' q t = (r^{-1} s' q)\,(q' s s' q)\,(q' s r^{-1}) = r^{-1} r^2 r^2 r^{-1} = r^2 \tag{3.4'}$$

Also: $(qq')$ und $(q'q)$ haben die gleichen Eigenwerte $r_n^2$, und zwischen den Matrizen $q, r, s, t$ besteht die Beziehung

$$q = s r t', \qquad q_{0\,k\,\varrho} = \sum_n r_n\, s_{k\,n}\, t_{\varrho\,n} \tag{3.5}$$

Wir betrachten nun die $r_n$, $s_{kn}$, $t_{\varrho n}$ als Funktionen der 9 Variablen $q_{0\,k\varrho}$, berechnet als Eigenwerte und Eigenvektoren. Mit ihrer Hilfe können wir, wegen (3.5), für $H'$ jetzt

$$H' = \gamma \sum_n r_n \Big(\sum_k \sigma_k\, s_{kn}\Big) \times \Big(\sum_\varrho \tau_\varrho\, t_{\varrho n}\Big) \tag{3.6}$$

schreiben. Da nun $s$ und $t$ orthogonal sind, entsprechen ihnen zwei unitäre Matrizen $Y_s$, $Y_t$ in der Darstellung der Drehgruppe vom Grade 2, und diese haben die Eigenschaft

$$\sum_k \sigma_k\, s_{k\,n} = Y_s\, \sigma_n\, Y_s^*, \qquad \sum_\varrho \tau_\varrho\, t_{\varrho\,n} = Y_t\, \tau_n\, Y_t^* \tag{3.7}$$

wie sich aus der Spinortheorie ergibt. Das liefert uns

$$H' = \gamma\,(Y_s \times Y_t) \cdot \sum_n r_n\,(\sigma_n \times \tau_n) \cdot (Y_s \times Y_t)^* \tag{3.8}$$

Schliesslich bemerken wir noch, dass die unitäre Matrix

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 + i\,\tau_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\sigma_1 \times 1) + i\,(1 \times \tau_2)\} \tag{3.9}$$

den Beziehungen

$$Z\,\sigma_3\,Z^* = -(\sigma_2 \times \tau_2) \qquad Z\,\tau_3\,Z^* = -(\sigma_1 \times \tau_1)$$
$$Z\,(\sigma_3 \times \tau_3)\,Z^* = -(\sigma_3 \times \tau_3) \tag{3.9'}$$

genügt, wodurch es möglich ist,

$$H' = -\gamma\,\mathfrak{U}\,R\,\mathfrak{U}^* \tag{3.10}$$

zu schreiben, mit den Definitionen

$$\mathfrak{U} = (Y_s \times Y_t) \cdot Z \tag{3.11}$$

$$R = r_1\,\tau_3 + r_2\,\sigma_3 + r_3\,(\sigma_3 \times \tau_3) = R_{\alpha\lambda}\,\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta_{\lambda\lambda'} \tag{3.12}$$

Wie angedeutet, ist $R$ eine Diagonalmatrix. Die Diagonalelemente berechnet man zu:

$$\begin{aligned}
R_{+0} &= \gamma \left(-\sum_{n=1}^{3} r_n\right) && (\text{entsprechend: } \sigma_3 = 1 \quad \tau_3 = 1)\\
R_{-0} &= R_{+0} + 2\,\gamma\,(r_2 + r_3) && (\text{entsprechend: } \sigma_3 = -1 \;\; \tau_3 = 1)\\
R_{+1} &= R_{+0} + 2\,\gamma\,(r_3 + r_1) && (\text{entsprechend: } \sigma_3 = 1 \;\; \tau_3 = -1)\\
R_{-1} &= R_{+0} + 2\,\gamma\,(r_1 + r_2) && (\text{entsprechend: } \sigma_3 = -1 \;\; \tau_3 = -1)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Das durch (3.11) definierte $\mathfrak{U}$ hat also die gewünschte Eigenschaft, und die Gleichung (3.2) schreibt sich in unserem Fall ($g = 0$):

$$\sum_{\alpha'\lambda'} (\mathfrak{U}^*\,H_0\,\mathfrak{U})_{\alpha\lambda,\,\alpha'\lambda'} \cdot F'_{\alpha'\lambda'} - \gamma\,R_{\alpha\lambda} \cdot F'_{\alpha\lambda} = E\,F'_{\alpha\lambda} \tag{3.14}$$

Wir kommen nun zum zweiten Schritt, der darin besteht, von den 4 simultanen Gleichungen (3.14) zu einer einkomponentigen Schrödingergleichung überzugehen. Mit diesem Übergang führen wir zum ersten Male eine Näherung in unsere Rechnungen ein, für welche wir die Konstante $\gamma$ als genügend gross anzunehmen haben. Wir setzen $\gamma$ als so gross voraus, dass die Grössenordnung der Eigenwerte $E$ in (3.14) wesentlich durch den Term ($-\gamma\,R_{\alpha\lambda}$) bestimmt wird, was für $\gamma = \infty$ ja zutrifft. Aus (3.13) folgt dann, dass in diesem Fall die Eigenwerte $E$ in zwei Gruppen zerfallen: die erste entspricht dem Diagonalelement $R_{+0}$, die zweite entspricht den Diagonalelementen $R_{-0}$, $R_{+1}$, $R_{-1}$ und liegt wegen der Grösse von $\gamma$ und wegen $r_n > 0$ sehr viel höher als die erste. Dies berechtigt uns, unser Interesse auf die erste Gruppe zu beschränken. Diese tiefliegenden Eigenwerte berechnen sich nun aber in einer ersten Näherung aus der einkomponentigen Schrödingergleichung

$$\{(\mathfrak{U}^* H_0 \mathfrak{U})_{+0,\,+0} - \gamma R_{+0}\} F'_{+0} = E F'_{+0} \tag{3.15}$$

sofern man $\gamma$ als so gross voraussetzt, dass die Ausserdiagonalelemente von $(\mathfrak{U}^* H_0 \mathfrak{U})$ die Bedingung

$$/(\mathfrak{U}^* H_0 \mathfrak{U})_{\alpha\lambda,\,+0}/ \ll \gamma r_n \tag{3.16}$$

erfüllen (nicht zugleich $\alpha = +, \lambda = 0$). — Im Vorangehenden ist stillschweigend angenommen, dass die $r_n$ nicht etwa $\sim 1/\gamma$ oder gar $= 0$ sind; in der Tat wird sich im folgenden ergeben, dass die $r_n$ selbst noch einmal $\sim \gamma$ und $\neq 0$ sind.

Unser dritter Schritt besteht in der Einführung einer weiteren Näherung. Zunächst schreiben wir (3.15) in der Form:

$$\{(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U})_{+0.\,+0} - E\} F'_{+0} = 0 \tag{3.17}$$

wobei jetzt nach (2.6), (3.13), (3.5)

$$K = F + G \tag{3.17'}$$

$$G = \frac{1}{2} \sum_{\varrho} \sum_{rs} \sum_{kl} A_{rk,\,sl}\, p_{rk\varrho}\, p_{sl\varrho} \tag{3.18}$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\varrho} \sum_{rs} \sum_{kl} B_{rk,\,sl}\, q_{rk\varrho}\, q_{sl\varrho} - \gamma \sum_{n} r_n \tag{3.19}$$

$$q_{0k\varrho} = \sum_{n} r_n s_{kn} t_{\varrho n}, \qquad r_n = \sum_{k\varrho} q_{0k\varrho} s_{kn} t_{\varrho n} \tag{3.20}$$

Die Funktion $F$ hat, wie wir sehen werden, ein Minimum (für $\mathfrak{U}^* F \mathfrak{U}$ gilt das Gleiche), und wir führen nun die Bedingung ein, dass die $q_{rk\varrho}$ nur kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführen. Diese Bedingung entspricht dem Wesen der starken Kopplung und gewährleistet auch, dass die Anregungsenergien dieser kleinen Schwingungen klein sind im Vergleich zum Energieabstand von der Gruppe der vernachlässigten hochliegenden Eigenwerte. In den folgenden Paragraphen werden wir dann diese Bedingung zur Vereinfachung des Ausdruckes $(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U})_{+0,+0}$ benutzen.

Um sie zu formulieren, haben wir das Minimum zu bestimmen. Zunächst betrachten wir die $s_{kn}, t_{\varrho n}$ als Konstante, dann ist $F$ quadratisch und hat offenbar ein Minimum. Wir finden es, indem wir alle $q_{rk\varrho}$ und $r_n$ als unabhängige Variable betrachten und die Gleichungen (3.20) als Nebenbedingungen. — Bezeichnen wir mit $\alpha_{l\sigma}$ Lagrangesche Multiplikatoren, so können wir die Gleichungen für die Minimallagen $\mathring{r}_n$, $\mathring{q}_{rk\varrho}$ schreiben:

$$\left\{\sum_{rk\varrho}\frac{\partial}{\partial q_{rk\varrho}}dq_{rk\varrho}+\sum_n\frac{\partial}{\partial r_n}dr_n\right\}\left\{F-\sum_{l\sigma}\alpha_{l\sigma}\left(q_{0l\sigma}-\sum_n r_n s_{ln}t_{\sigma n}\right)\right\}=0$$

das heisst:

$$\sum_{sl} B_{rk,\,sl}\,\mathring{q}_{sl\varrho}-\delta_{0r}\alpha_{k\varrho}=0 \qquad (\varrho, k=1,2,3) \quad (r=0,1,2\ldots) \tag{3.21}$$

$$-\gamma+\sum_{l\sigma}\alpha_{l\sigma}s_{ln}t_{\sigma n}=0 \qquad (n=1,2,3) \tag{3.22}$$

Gleichung (3.21) lässt sich vermöge (2.11) umkehren:

$$\mathring{q}_{sl\varrho}=\sum_k \overline{B}_{sl,\,0k}\,\alpha_{k\varrho} \tag{3.23}$$

dies geht für $s=0$ über in (vgl. (2.12)):

$$\mathring{q}_{0l\varrho}=\overline{B}_0\,\alpha_{l\varrho} \tag{3.24}$$

Aus (3.24), (3.22), (3.20) folgt

$$\mathring{r}_n=B_0\,\gamma=\Gamma \tag{3.25}$$

was, in (3.20) eingesetzt

$$\mathring{q}_{0k\varrho}=\Gamma(st')_{k\varrho}=\Gamma S_{k\varrho} \tag{3.26}$$

liefert. Aus (3.26) und (3.24) ergibt sich $\alpha_{l\varrho}$, welches wir in (3.23) einsetzen, so dass:

$$\mathring{q}_{rk\varrho}=\gamma\sum_l \overline{B}_{rk,\,0l}\,S_{l\varrho} \tag{3.27}$$

Diese Gleichung gilt für $r=0$ und $r\neq 0$. Im Vorangehenden haben wir die Definitionen

$$\Gamma=\gamma\,\overline{B}_0 \tag{3.28}$$

$$S=st' \tag{3.29}$$

benutzt, wobei die Matrix $S$ wie $s$ und $t$ orthogonal ist.

Führt man (3.25, 26, 27) in $F$ (3.19) ein, so findet man den Minimalwert

$$\mathring{F}=-\frac{3}{2}\gamma\,\Gamma \tag{3.30}$$

welcher, wie wir sehen, für alle Werte von $s_{kn}$, $t_{\varrho n}$ der gleiche ist.

Daher können wir jetzt das Postulat der kleinen Schwingungen durch die folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$q_{rk\varrho} = \mathring{q}_{rk\varrho} + \overline{q}_{rk\varrho} = \gamma \sum_l \overline{B}_{rk,0l} S_{l\varrho} + \overline{q}_{rk\varrho} \qquad (r \geqslant 0) \tag{3.31}$$

$$r_n = \mathring{r}_n + \overline{r}_n = \Gamma + \overline{r}_n \tag{3.32}$$

Speziell wird (vgl. (3.20)):

$$\mathring{q}_{0k\varrho} = \Gamma S_{k\varrho} \qquad \overline{q}_{0k\varrho} = (s\,\overline{r}\,t')_{k\varrho} \tag{3.33}$$

Hier sind die $\overline{q}_{rk\varrho}$ und $\overline{r}_n$ die kleinen Abweichungen von der Gleichgewichtslage, und die $r_n$ müssen die Bedingungen

$$\overline{r}_n \ll \Gamma = \gamma\, \overline{B}_0 \tag{3.34}$$

erfüllen.

In (3.16) und (3.34) haben wir die Bedingungen abgeleitet, welche die Ideen bezüglich der Grösse von $\gamma$ fixieren. Wegen (3.32, 34) können wir offenbar (3.16) durch

$$/\,(\mathfrak{U} K^* \mathfrak{U})_{\alpha\lambda,\,+0}/ \ll \gamma\, \Gamma = \gamma^2\, \overline{B}_0 \tag{3.35}$$

ersetzen. Berechnen werden wir (3.34), (3.35) später, es wird sich dann zeigen, dass beide die gleiche „Bedingung für starke Kopplung" für die Kopplungskonstante $f$ liefern. Dies stimmt damit überein, dass unsere Näherung eine erste Approximation im Sinne einer Entwicklung nach fallenden Potenzen von $f$ darstellt.

### *§ 4. Einführung von Winkelkoordinaten.*

Um die Bedingung (3.34) zur Vereinfachung von $(\mathfrak{U}^* K\, \mathfrak{U})_{+0,+0}$ auszunutzen, ist es zweckmässig, an Stelle der Koordinaten $q_{rk\varrho}$ im wesentlichen die kleinen Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage als neue Variable einzuführen. Zu diesem Zweck schreiben wir die Formeln (3.31, 33) unter Benutzung der in (3.29) definierten orthogonalen Matrix

$$S = s\, t' \tag{4.1}$$

und der durch

$$\xi = t\,\overline{r}\,t' = t r t' - \Gamma, \qquad \xi_{\varrho\sigma} = \sum_n r_n\, t_{\varrho n} t_{\sigma n} - \Gamma\, \delta_{\varrho\sigma} = \xi_{\sigma\varrho} \tag{4.2}$$

definierten symmetrischen Matrix $\xi$ in der Form

$$q = S(\Gamma + \xi) \qquad \overline{q}_{0k\varrho} = (S\,\xi)_{k\varrho} \tag{4.3}$$

$$q_{rk\varrho} = \gamma \sum \overline{B}_{rk,0l} S_{l\varrho} + \overline{q}_{rk\varrho} \qquad (r \geqslant 1) \tag{4.4}$$

D. h. $q$ ist das Produkt einer orthogonalen und einer symmetrischen Matrix (was für jede reelle Matrix zutrifft), wobei die symmetrische in nullter Näherung (im Sinne einer Entwicklung nach $\xi/\Gamma$) die Einheitsmatrix ist. Die Bedingung (3.34) lautet wegen (4.2) und der Orthogonalität von $t$ jetzt

$$/\xi_{\varrho\sigma}/ \ll \Gamma \tag{4.5}$$

Weiter denken wir uns die Matrix $S$ als Funktion von drei Eulerschen Winkeln $(\Theta\,\Phi\,\Psi)$ dargestellt:

$$S = S(\Theta\Phi\Psi) \qquad S_{k\varrho} = S_{k\varrho}(\Theta\Phi\Psi) \tag{4.6}$$

wie es für jede orthogonale Matrix möglich ist. Die explizite Form der Abhängigkeit, sowie einige Eigenschaften von $S$ finden sich in § 13 im Anhang.

Die neuen Variablen, die nun eingeführt werden, sind: die 9 Grössen $(\Theta, \Phi, \Psi, \xi_{\varrho\sigma} = \xi_{\sigma\varrho})$ und die $\bar{q}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$. Durch (4.3, 4.6) werden die alten Variablen, nämlich die 9 Grössen $q_{0kr}$ und die Grössen $q_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ als Funktionen der Neuen gegeben. Den neuen Koordinaten entsprechend sind zu ihnen kanonisch konjugierte neue Impulsoperatoren $p_\alpha$ $(\alpha = \Theta, \Phi, \Psi)$, $\pi_{\varrho\sigma} = \pi_{\sigma\varrho}$, $\bar{p}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ derart einzuführen, dass die kanonischen Vertauschungsrelationen invariant bleiben. Es ist hiermit verträglich, dass wir die $p_\alpha$ als

$$p_\alpha = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\alpha} \qquad (\alpha = \Theta, \Phi, \Psi) \tag{4.7}$$

festsetzen. Die übrigen Impulskoordinaten fixieren wir nicht in dieser Weise. Weiter empfiehlt es sich, zur Formulierung der Transformation, zunächst einige Hilfsoperatoren zu definieren. Es seien:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sin\Psi \cdot p_\Theta + \frac{\cos\Psi}{\sin\Theta}\,(p_\Phi + \cos\Theta \cdot p_\psi) \\
P_2 &= -\cos\Psi \cdot p_\Theta + \frac{\sin\Psi}{\sin\Theta}\,(p_\Phi + \cos\Theta \cdot p_\psi) \\
P_3 &= p_\psi
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Wegen (4.7) ergeben sich die Vertauschungsrelationen

$$[P_j\,P_k] = i\,P_l \qquad (j\,k\,l:\ \text{zykl.}) \tag{4.9}$$

ferner

$$[P_j, S_{\varrho\sigma}] = P_j(S_{\varrho\sigma}) \tag{4.10}$$

Hier ist auf der linken Seite $S_{\varrho\sigma}$ als Operator aufgefasst, während die rechte Seite bedeutet, dass der Operator $P_j$ auf die *Funktion* $S_{\varrho\sigma}(\Theta\Phi\Psi)$ wirkt. Wegen der Gleichung (13.9) folgen aus (4.10) dann die V. R.

$$[P_j, S_{\varrho j}] = 0\,, \quad [P_j, S_{\varrho k}] = i S_{\varrho l}\,, \quad [P_j, S_{\varrho l}] = -i S_{\varrho k} \tag{4.11}$$

($jkl$ bedeuten stets: zykl. Perm. von 123). Mit der antimetrischen Matrix von Operatoren

$$P = (P_{jk})\,, \quad P_{jk} = -P_l \tag{4.12}$$

lassen sich die V. R. (4.11) auch

$$[P_{kl}, S_{\varrho\sigma}] = i\{S_{\varrho k}\,\delta_{\sigma l} - S_{\varrho l}\,\delta_{\sigma k}\} \tag{4.13}$$

schreiben.

Nachdem wir noch die symmetrische Matrix von Operatoren

$$\Pi = (\Pi_{\varrho\sigma})\,, \quad \Pi_{\varrho\sigma} = \pi_{\varrho\sigma} + \delta_{\varrho\sigma}\pi_{\varrho\varrho} \tag{4.14}$$

definiert haben, bilden wir schliesslich die Operatoren

$$\bar{p}_{0k\varrho} = \bar{p}_{k\varrho} + \bar{\bar{p}}_{k\varrho} \tag{4.15}$$

mit den beiden Summanden:

$$p_{k\varrho} = \frac{1}{2}\,(S\Pi)_{k\varrho} = \frac{1}{2}\Big(\sum_j S_{kj}\,\pi_{j\varrho} + S_{k\varrho}\,\pi_{\varrho\varrho}\Big) \tag{4.16}$$

$$\bar{p}_{k\varrho} = \frac{1}{2\,\Gamma}\{S(i-P)\}_{k\varrho} = \frac{1}{2\,\Gamma}\,\{(P-i)\,S'\}_{\varrho k} \tag{4.17}$$

$$\bar{p}_{1\varrho} = \frac{1}{2\,\Gamma}\,(P_2 S_{k3} - S_{k2} P_3) = \frac{1}{2\,\Gamma}\,(S_{k3} P_2 - P_3 S_{k2}) \quad \text{(und zykl.)} \tag{4.17'}$$

Die Äquivalenz von (4.17) und (4.17′) folgt aus (4.11, 13).

Mit Hilfe der getroffenen Definitionen lassen sich nun die alten Impulsoperatoren folgendermassen als Funktionen der neuen Koordinaten und Impulsoperatoren ausdrücken: [8])

$$p_{0k\varrho} = \bar{p}_{0k\varrho} + \sum_s{}' \sum_{l\sigma} \lambda_{k\varrho,\,sl\sigma}\,\bar{p}_{sl\sigma}\,, \quad p_{rk\varrho} = \bar{p}_{rk\varrho} \quad (r \geqslant 1) \tag{4.18}$$

Hierin hängen die $\lambda$ noch von den $(\Theta\ \Phi\ \Psi)$ ab, gemäss:

$$\lambda_{k\varrho,\,sl\sigma} = \frac{1}{2\,\bar{B}_0} \sum_j \bar{B}_{sl,\,0j}\,(S_{k\sigma} S_{j\varrho} - \delta_{kj}\,\delta_{\sigma\varrho})\,, \qquad \lambda_{k\varrho,\,0l\sigma} = 0 \tag{4.19}$$

Hierbei ist von (4.5) schon in folgendem Sinne Gebrauch gemacht: Die Gleichungen (4.18, 19) bilden zusammen mit (4.3, 4) nur die erste Näherung einer kanonischen Transformation, worauf wir uns beschränken. Um dies nachzuweisen, gehen wir davon aus, dass aus (4.3, 4) die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \sum_{k\varrho} \frac{\partial q_{0k\varrho}}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial q_{0k\varrho}} + \sum_r{}' \sum_{k\varrho} \frac{\partial q_{rk\varrho}}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial q_{rk\varrho}}, \qquad {}^{8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{\sigma\sigma'}} = \sum_{k\varrho} \frac{\partial q_{0k\varrho}}{\partial \xi_{\sigma\sigma'}} \frac{\partial}{\partial q_{0k\varrho}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{q}_{rk\varrho}} = \frac{\partial}{\partial q_{rk\varrho}} \quad (r \geqslant 1)$$

folgen. Man entnimmt daraus, dass die Transformationsformeln

$$p_\alpha = \sum_{k\varrho} \frac{\partial q_{0k\varrho}}{\partial \alpha} p_{0k\varrho} + \sum_r{}' \sum_{k\varrho} \frac{\partial q_{rk\varrho}}{\partial \alpha} p_{rk\varrho}, \tag{4.20}$$

$$\Pi_{\sigma\sigma'} = \sum_{k\varrho} \frac{\partial q_{0k\varrho}}{\partial \xi_{\sigma\sigma'}} p_{0k\varrho}, \qquad \bar{p}_{rk\varrho} = p_{rk\varrho} \quad (r \geqslant 1) \tag{4.20'}$$

zusammen mit (4.3, 4) die kanonischen V. R. invariant lassen, auch wenn die Impulsoperatoren nicht als Ableitungen definiert sind. Für $r \geqslant 1$ stellt man schon Übereinstimmung mit (4.18) fest. Für die andere Gleichung (4.20′) liefert die Ausrechnung

$$\Pi_{jj'} = (S'p)_{j'j} + (S'p)_{jj'} \qquad (S'\text{: Transponierte von } S) \tag{4.21}$$

wo $\Pi$ durch (4.14) und die Matrix $p$ durch

$$p = (p_{0k\varrho}) \tag{4.22}$$

definiert ist. Ferner ergibt sich aus (4.20)

$$p_\alpha = \sum_{k\varrho} \left\{ \frac{\partial S}{\partial \alpha} (\Gamma + \xi) \right\}_{k\varrho} p_{0k\varrho} + \gamma \sum_r{}' \sum_{k\varrho} \sum_l B_{rk,0l} \frac{\partial S_{l\varrho}}{\partial \alpha} p_{rk\varrho}$$

woraus nach (13.4), (13.7) und (4.8):

$$P_j = -\sum_{k\varrho} \{SA_j(\Gamma + \xi)\}_{k\varrho} p_{0k\varrho} - \gamma \sum_r{}' \sum_{kl} \bar{B}_{rk,0l} \sum_\varrho (SA_j)_{l\varrho} p_{rk\varrho}$$

Durch Einsetzen der Matrizen $A_1\ A_2\ A_3$ (13.5) und der Definition (4.12) folgt:

$$P_{jj'} = \sum_{k\varrho} \{(\Gamma + \xi)_{j\varrho} S_{kj'} - (\Gamma + \xi)_{j'\varrho} S_{kj}\} p_{0k\varrho} + (\Lambda_{jj'} - \Lambda_{j'j}) \tag{4.23}$$

mit

$$\Lambda_{jj'} = \gamma \sum_r{}' \sum_{lk} \bar{B}_{rk,0l} S_{lj'} p_{rkj} \tag{4.23'}$$

Um nun die alten Impulskoordinaten in Funktion der neuen zu erhalten, hat man die Gleichungen (4.21, 23) nach den $p_{0k\varrho}$ aufzulösen. Die Lösung kann man sich nach den $(\xi_{\varrho\sigma}/\Gamma)$ entwickelt denken, und im Sinne unserer Näherung interessieren nur die

$\xi$-freien Terme. Diese erhalten wir, wenn wir (4.23) durch die Gleichung

$$(S'p)_{j'j} - (S'p)_{jj'} = \frac{1}{\Gamma}\{P_{jj'} + \Lambda_{j'j} - \Lambda_{jj'}\} \tag{4.24}$$

ersetzen, welche sich aus (4.23) durch Nullsetzen von $\xi$ ergibt. — Addition von (4.21) und (4.24) liefert jetzt, wenn man noch die Symmetrie von $\Pi$ und die Antimetrie von $P$ benutzt:

$$\begin{aligned} 2\,(S'p) &= \Pi - \frac{1}{\Gamma} P + \frac{1}{\Gamma}(\Lambda - \Lambda') \\ p &= \frac{1}{2}(S\Pi) - \frac{1}{2\,\Gamma}(SP) + \frac{1}{2\,\Gamma} S\,(\Lambda - \Lambda') \end{aligned} \tag{4.25}$$

Der erste Term der rechten Seite ist mit (4.16) identisch, der dritte mit dem $\lambda$-Term in der ersten Gleichung (4.18), wie man wegen (4.19) und (4.23') bestätigt. Der zweite Term in Gleichung (4.25) unterscheidet sich von (4.17) durch das Fehlen des Summanden $(iS/2\,\Gamma)$. Bis auf diesen Unterschied stimmt also (4.25) mit der ersten Gleichung (4.18) überein. Man kann nun vermöge der V. R. (4.9, 13) leicht einsehen, dass die Addition des Termes $(iS/2\,\Gamma)$ die Invarianz gegen die kanonischen V. R. nicht beeinträchtigt, und damit ist (4.18) in der betrachteten Näherung als kanonisch erwiesen.

Der Grund, den Term mit $S$ hinzuzufügen, liegt in Folgendem: Später (§ 9) wird sich ergeben, dass die $P_k$ und $S_{l\sigma}$ als hermitesche Operatoren zu betrachten sind. Die Formulierung (4.17) sorgt dann (wegen (4.11)) dafür, dass auch die alten Operatoren $p_{0k\varrho}$ hermitesch sind, wie es sein muss. Hier liegt der Grund, warum die $p_{0k\varrho}$ nicht als Ableitungen der $q_{0k\varrho}$ definiert wurden.

Die neuen Variablen sind nun in $K$ (3.17') einzuführen. Setzt man (4.18) in den Term $G$ (3.18) ein, so berechnet sich

$$\begin{aligned} G = \frac{1}{2}\sum_{rs}\sum_{kl}\sum_{\varrho} A_{rk,sl}\,\overline{p}_{rk\varrho}\,\overline{p}_{sl\varrho} + \sum_{rs}{}''\sum_{kl}\sum_{\varrho\sigma} N_{rk\varrho,\,sl\sigma}\,\overline{p}_{rk\varrho}\,\overline{p}_{sl\sigma} \\ + \frac{1}{2} A_0 \sum_{k\varrho}\{-\overline{p}^2_{0k\varrho} + (\overline{p}_{0k\varrho} + \sum_{s}{}'\sum_{l\sigma}\lambda_{k\varrho,\,sl\sigma}\overline{p}_{sl\sigma})^2\} \end{aligned} \tag{4,26}$$

wobei man für $N$ entweder $N'$ oder $N''$ einsetzen kann, gemäss

$$N'_{rk\varrho,\,sl\sigma} = \sum_{j}(A_{rk,0j}\,\lambda_{j\varrho,\,sl\sigma}) \tag{4.27'}$$

$$N''_{rk\varrho,\,sl\sigma} = \frac{1}{2}(N'_{rk\varrho,\,sl\sigma} + N'_{sl\sigma,\,rk\varrho}) \tag{4.27''}$$

In $F$ (3.19) setzen wir im ersten Term (3.31) und im zweiten (3.32) ein, wodurch

$$F = \hat{F} + \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{kl} \sum_{\varrho} B_{rk,sl} \bar{q}_{rk\varrho} \bar{q}_{sl\varrho} + \gamma \sum_{k\varrho} \bar{q}_{0k\varrho} S_{k\varrho} - \gamma \sum_{n} \bar{r}_{n}$$

entsteht. Die letzten beiden Terme heben sich wegen (3.29, 33) fort, so dass unter Berücksichtigung von (3.30):

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \sum_{kl} \sum_{\varrho} B_{rk,sl} \bar{q}_{rk\varrho} \bar{q}_{sl\varrho} - \frac{3}{2} \gamma \Gamma \tag{4.28}$$

Gemäss der Konstruktion der $\bar{q}_{rk\varrho}$ war zu erwarten, dass $F$ in diesen Variablen rein quadratisch wird. Die $\bar{q}_{0k\varrho}$ sind nach (4.3) Funktionen von $S$ und $\xi$.

## § 5. *Abspaltung der Isobarenenergie.*

Gemäss (4.26) ist die Funktion $G$ die Summe aus einer homogenen quadratischen Form in den $\bar{p}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ und aus einer homogenen quadratischen Form in den $\bar{p}_{0k\varrho}$ und aus einer Bilinearform in den $\bar{p}_{0k\varrho}$ und den $\bar{p}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$. — Fassen wir die $\bar{p}_{rk\varrho}$ $\bar{p}_{0k\varrho}$ als klassische Variable auf und halten die $\bar{p}_{0k\varrho}$ konstant, d. h. fassen wir $G$ als quadratische Funktion der $\bar{p}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ allein auf, so hat $G$ also ein Minimum für gewisse Werte $\mathring{\bar{p}}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$, welche noch von den $\bar{p}_{0k\varrho}$ abhängen. Die Einführung neuer Variabler $\tilde{p}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ durch die Translation

$$\bar{p}_{rk\varrho} = \mathring{\bar{p}}_{rk\varrho} + \tilde{p}_{rk\varrho} \qquad (r \geqslant 1) \tag{5.1}$$

wird offenbar die erwähnte Bilinearform zum Verschwinden bringen, so dass $G$ in zwei Summanden zerfällt: der erste hängt von den $\bar{p}_{0k\varrho}$ allein ab, der zweite von den $\tilde{p}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ allein. Diese Aufspaltung von $G$ ist erwünscht, der erste Term wird zur sogenannten Isobarenenergie Anlass geben. — Indem wir die Ergänzung zu einer kanonischen Transformation sowie den Übergang zu den *Operatoren* $\bar{p}_{rk\varrho}$ zunächst zurückstellen, wollen wir die Transformation (5.1) jetzt durchführen.

Zur Bestimmung der Minimalwerte $\mathring{\bar{p}}_{rk\varrho}$ betrachten wir die Voraussetzungen $\bar{p}_{0k\varrho} = \text{const.}$ als 9 Nebenbedingungen, ähnlich wie früher die Gleichungen (3.20). Dadurch werden die Minimumsgleichungen, wenn wir mit $\beta_{k\varrho}$ wieder 9 Lagrangesche Multiplikatoren bezeichnen:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{p}_{rk\varrho}} \left\{ G - \sum_{k\varrho} \beta_{k\varrho} \bar{p}_{0k\varrho} \right\} = 0 \qquad (r \geqslant 0) \tag{5.2}$$

$$\mathring{\bar{p}}_{0k\varrho} = \bar{p}_{0k\varrho} = \text{const.} \tag{5.3}$$

Für (5.2) erhält man nach (4.26, 27''):

$$0=\sum_{sl} A_{rk,\,sl}\overset{\circ}{\bar{p}}_{sl\varrho}+A_0\Big\{\delta_{r0}\,(\mathring{p}_{0k\varrho}-\overset{\circ}{\bar{p}}_{0k\varrho})+\sum_{j\sigma}\lambda_{j\sigma,\,rk\varrho}\mathring{p}_{0j\sigma}\Big\}$$
$$+(1-\delta_{r0})\sum_{s}{}'\sum_{l\sigma}2\,N''_{rk\varrho,\,sl\sigma}\overset{\circ}{\bar{p}}_{sl\sigma}-\delta_{0r}\,\beta_{k\varrho} \tag{5.4}$$

wobei $\mathring{p}_{0k\varrho}$ durch (4.18) definiert ist, wenn man dort $\bar{p}_{rk\varrho}=\overset{\circ}{\bar{p}}_{rk\varrho}$ $(r>0)$ einsetzt. Substituiert man (4.27') in $N''$, so ergibt sich:

$$\sum_j A_{rk,\,0j}(\mathring{p}_{0j\varrho}-\overset{\circ}{\bar{p}}_{0j\varrho})+\sum_{sl}A_{rk,\,sl}\overset{\circ}{\bar{p}}_{sl\varrho}$$
$$+\sum_{j\sigma}\lambda_{j\sigma,\,rk\varrho}\Big\{A_0\,(\mathring{p}_{0j\sigma}-\overset{\circ}{\bar{p}}_{0j\sigma})+\sum_{sl}A_{0j,\,sl}\,\overset{\circ}{\bar{p}}_{sl\sigma}\Big\}-\delta_{r0}\,\beta_{k\varrho}=0 \tag{5.5}$$

Dies geht für $r=0$ (vgl. 4.19) über in

$$\beta_{k\varrho}=A_0\,(\mathring{p}_{0k\varrho}-\overset{\circ}{\bar{p}}_{0k\varrho})+\sum_{sl}A_{0k,\,sl}\overset{\circ}{\bar{p}}_{sl\varrho} \tag{5.6}$$

Wegen der Gültigkeit von (5.6) lässt sich (5.5) auch

$$\sum_{sl}A_{rk,\,sl}\overset{\circ}{\bar{p}}_{sl\varrho}+\sum_j A_{rk,\,0j}(\mathring{p}_{0j\varrho}-\overset{\circ}{\bar{p}}_{0j\varrho})+\sum_{j\sigma}\lambda_{j\sigma,\,rk\varrho}\,\beta_{j\sigma}-\delta_{r0}\,\beta_{k\varrho}=0 \tag{5.7}$$

schreiben. Die Ausführung der Operation: $\sum\limits_{rk}\bar{A}_{r'k',\,rk}$ an (5.7) ergibt

$$\overset{\circ}{\bar{p}}_{rk\varrho}+\delta_{r0}(\mathring{p}_{0k\varrho}-\overset{\circ}{\bar{p}}_{0k\varrho})+\sum_{j\sigma}\sum_{sl}\bar{A}_{rk,\,sl}\lambda_{j\sigma,\,sl\varrho}\,\beta_{j\sigma}-\sum_j A_{rk,\,0j}\,\beta_{j\varrho}=0 \tag{5.8}$$

welches sich für $r=0$ zu

$$\mathring{p}_{0k\varrho}=\bar{A}_0\,\beta_{k\varrho}-\sum_{j\sigma}\sum_{sl}\bar{A}_{0k,\,sl}\,\lambda_{j\sigma,\,sl\varrho}\,\beta_{j\sigma} \tag{5.9}$$

vereinfacht. Andererseits liefert die Operation $\sum\limits_{rk\varrho}\lambda_{k'\varrho',\,rk\varrho}$, auf (5.8) angewandt (dabei (4.18, 19) benutzt):

$$\mathring{p}_{0k\varrho}=\overset{\circ}{\bar{p}}_{0k\varrho}+\sum_{j\sigma}\sum_{sl}\bar{A}_{0j,\,sl}\,\lambda_{k\varrho,\,sl\sigma}\,\beta_{j\sigma}-\sum_{j\sigma}\Lambda^{(1)}_{k\varrho,\,j\sigma}\,\beta_{j\sigma} \tag{5.10}$$

mit

$$\Lambda^{(1)}_{k\varrho,\,j\sigma}=\sum_{sl}\sum_{s'l'}A_{sl,\,s'l'}\sum_{\tau}\lambda_{k\varrho,\,sl\tau}\,\lambda_{j\sigma,\,s'l'\tau}=\Lambda^{(1)}_{js,\,k\varrho} \tag{5.11}$$

Zwischen (5.9) und (5.10) eliminieren wir $\mathring{p}_{0k\varrho}$ und erhalten:

$$\bar{A}_0\,\beta_{k\varrho}+\sum_{j\sigma}(\Lambda^{(1)}_{k\varrho,\,j\sigma}-\Lambda^{(2)}_{k\varrho,\,j\sigma})\,\beta_{j\sigma}=\overset{\circ}{\bar{p}}_{0k\varrho}=\bar{p}_{0k\varrho} \tag{5.12}$$

mit:

$$\Lambda^{(2)}_{j\sigma,\,k\varrho}=\Lambda^{(2)}_{k\varrho,\,j\sigma}=\sum_{sl}(\bar{A}_{0k,\,sl}\lambda_{j\sigma,\,sl\varrho}+\bar{A}_{0j,\,sl}\,\lambda_{k\varrho,\,sl\sigma}) \tag{5.13}$$

Um die 9 Gleichungen (5.12) nach den 9 Variablen $\beta_{k\varrho}$ aufzulösen, sind im Anhang § 14 die Matrizen $\Lambda^{(1)}$ und $\Lambda^{(2)}$ berechnet. Gemäss (14.10) geht (5.12) in

$$(\bar{A}_0 - \Lambda)\,\beta_{k\varrho} + \Lambda \sum_{\tau\tau'} S_{k\tau'} S_{\tau\varrho}\,\beta_{\tau\tau'} = \bar{p}_{0k\varrho} \tag{5.14}$$

über. Die Konstante $\Lambda$ ist in (14.11) definiert. Gleichung (5.14) lässt sich leicht nach den $\beta_{k\varrho}$ auflösen, mit dem Resultat

$$\beta_{k\varrho} = \frac{1}{\bar{A}_0(\bar{A}_0 - 2\Lambda)} \left\{ (\bar{A}_0 - \Lambda)\,\bar{p}_{0k\varrho} - \Lambda \sum_{\tau\tau'} S_{k\tau'} S_{\tau\varrho}\,\bar{p}_{0\tau\tau'} \right\} \tag{5.15}$$

Vermöge der $\beta_{k\varrho}$ kann man die $\mathring{\bar{p}}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ aus (5.8) berechnen. Wir werden aber sofort sehen, dass dies nicht nötig ist, um $G$ in den neuen Variablen $\tilde{p}_{rk\varrho}$ auszudrücken.

Um die Transformation (5.1) in $G$ (4.26) einzuführen, schreiben wir $G$ in der Form

$$G = \sum_{rs}{}'' \sum_{kl} \Big\{ \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho} A_{rk,sl}\,\bar{p}_{rk\varrho}\,\bar{p}_{sl\varrho} + \sum_{\varrho\sigma} N''_{rk\varrho,sl\sigma}\,\bar{p}_{rk\sigma}\,\bar{p}_{sl\sigma} \Big\}$$
$$+ \sum_{k\varrho} \bar{p}_{0k\varrho} \Big( \sum_{sl}{}' A_{0k,sl}\,\bar{p}_{sl\varrho} \Big) + \tfrac{1}{2} A_0 \sum_{k\varrho} p_{0k\varrho}^2 \tag{5.16}$$

wo $p_{0k\varrho}$ nach (4.18) definiert ist. Setzen wir jetzt (5.1) ein, so kommt:

$$G = \tfrac{1}{2} \sum_{rs}{}'' \sum_{kl} \sum_{\varrho} A_{rk,sl}\,\tilde{p}_{rk\varrho}\,\tilde{p}_{sl\varrho} + \sum_{rs}{}'' \sum_{kl} \sum_{\varrho\sigma} N''_{rk\varrho,sl\sigma}\,\tilde{p}_{rk\varrho}\,\tilde{p}_{sl\sigma}$$
$$+ \tfrac{1}{2} A_0 \sum_{k\varrho} \Big( \sum{}' \sum_{l\sigma} \lambda_{k\varrho,sl\sigma}\,\tilde{p}_{sl\sigma} \Big)^2 + G_0 + G' \tag{5.17}$$

wobei sich $G_0$ aus $G$ (5.16) ergibt, indem man alle $\bar{p}_{rk\varrho}$ durch $\mathring{\bar{p}}_{rk\varrho}$ ersetzt, während $G'$ sich als

$$G' = \sum_{r}{}' \sum_{k\varrho} \tilde{p}_{rk\varrho} \left\{ \sum_{sl} A_{rk,sl}\,\mathring{\bar{p}}_{sl\varrho} + 2 \sum_{sl\sigma}{}' N''_{rk\varrho,sl\sigma}\,\mathring{\bar{p}}_{sl\sigma} + A_0 \sum_{l\sigma} \mathring{p}_{0l\sigma}\,\lambda_{l\sigma,rk\varrho} \right\}$$

schreiben lässt. Da die Summe das Glied $r = 0$ nicht enthält, folgt aus (5.4), dass die Klammer stets verschwindet, und damit auch $G'$. Andererseits erhält man aus (5.4) (unter Benutzung von (4.18)) durch die Operation $\sum_{rk\varrho} \mathring{\bar{p}}_{rk\varrho}$:

$$\sum_{rs} \sum_{kl} \sum_{\varrho} A_{rk,sl}\,\mathring{\bar{p}}_{rk\varrho}\,\mathring{\bar{p}}_{sl\varrho} + \sum_{rs}{}'' \sum_{kl} \sum_{\varrho\sigma} 2 N''_{rk\varrho,sl\sigma}\,\mathring{\bar{p}}_{rk\varrho}\,\mathring{\bar{p}}_{sl\sigma}$$
$$+ A_0 \sum_{k\varrho} \left( -\mathring{\bar{p}}_{0k\varrho}^2 + \mathring{p}_{0k\varrho}^2 \right) = \sum_{k\varrho} \mathring{\bar{p}}_{0k\varrho}\,\beta_{k\varrho} = \sum_{k\varrho} \bar{p}_{0k\varrho}\,\beta_{k\varrho}$$

Durch Vergleich mit (4.26) erkennt man, dass die linke Seite $= 2\,G_0$ ist. Indem man auf der rechten Seite für $\beta$ (5.15) einsetzt, findet man daher:

$$G_0 = \frac{1}{2\,\bar{A}_0(\bar{A}_0 - 2\Lambda)} \left\{ (\bar{A}_0 - \Lambda) \sum_{k\varrho} \bar{p}_{0k\varrho}^2 - \Lambda \sum_{k\varrho} \sum_{j\sigma} \bar{p}_{0k\varrho}\,S_{j\varrho}\,S_{k\sigma}\,\bar{p}_{0j\sigma} \right\} \tag{5.18}$$

Wir fragen jetzt nach den *Operatoren* $\tilde{p}_{rk\varrho}$ und der kanonischen Transformation. Die Rechnungen, die von (5.4) zu (5.15) führen, sind auch für Operatoren $\overset{\circ}{\bar{p}}_{rk\varrho}$, $\beta_{k\varrho}$ gültig. Um die Berechnung von $G$ für Operatoren nachzuahmen, sind wegen des Nichtkommutierens der $\bar{p}_{0j\tau}$ und der $\lambda_{k\varrho,sl\sigma}$ entsprechende Symmetrisierungen einzuführen. Dies ist aber erst sinnvoll, wenn (5.1) zu einer kanonischen Transformation ergänzt ist. Da die $\overset{\circ}{\bar{p}}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ gemäss (5.8, 15) noch von den $S_{l\sigma}$ und $\bar{p}_{0k\varrho}$ abhängen, wird die kanonische Transformation ähnlich derjenigen in (4.3, 4, 18), wobei aber die Rollen der $p$ und $q$ vertauscht sind. Es ist schon bei der Behandlung der Vektortheorie darauf hingewiesen[11]), dass diese Rechnungen erst auf die nächsthöhere Näherung im Sinne der Entwicklung nach Potenzen von $(g^{-1})$ Einfluss haben. Sie können in der hier betrachteten Näherung vernachlässigt werden, so dass die Gleichungen

$$\bar{q}_{rk\varrho} = \tilde{q}_{rk\varrho} \qquad (r \geqslant 0) \tag{5.19}$$

zusammen mit (5.1) als kanonische Transformation zu betrachten sind. Wir haben also (5.19) in $F$ (4.28) einzusetzen, und ferner in $G$ (5.17, 18) die $\tilde{p}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ als die zu den $\tilde{q}_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ kanonisch konjugierten Operatoren aufzufassen. Die Operatoren $\bar{p}_{0k\varrho}$ sind wieder durch (4.15 ff.) definiert, so dass sich

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k\varrho} \bar{p}^2_{0k\varrho} &= \frac{1}{2\Gamma^2}\Big(\sum_k P_k^2 + \frac{3}{2}\Big) + \frac{1}{4}\sum_{j\varrho} \Pi^2_{j\varrho} \\ \sum_{kj}\sum_{\varrho\sigma} \bar{p}_{0k\varrho} S_{k\sigma} S_{j\varrho} \bar{p}_{0j\sigma} &= \frac{1}{2\Gamma^2}\Big(-\sum_k P_k^2 + \frac{3}{2}\Big) + \frac{1}{4}\sum_{j\varrho} \Pi^2_{j\varrho} \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

ergibt.

Setzen wir nun die Funktion $K$ (3.17′) aus: (4.28) (5.19) sowie (5.17, 18, 20) und $G' = 0$ zusammen, so können wir sie folgendermassen schreiben:

$$K = \frac{1}{2}\sum_{rs}\sum_{kl}\sum_{\varrho} B_{rk,sl}\,\tilde{q}_{rk\varrho}\,\tilde{q}_{sl\varrho} + \frac{1}{2}\sum_{rs}{}''\sum_{kl}\sum_{\varrho} A_{rk,sl}\,\tilde{p}_{rk\varrho}\,\tilde{p}_{sl\varrho}$$

$$+ K_0 + K_s + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4\gamma^2 \bar{A}_0 \bar{B}_0^2} - \gamma^2 \bar{B}_0\right) \tag{5.21}$$

mit

$$K_0 = \frac{1}{2J}\sum_{n} P_n^2 + \frac{1}{8\bar{A}_0}\sum_{j\varrho} \Pi^2_{j\varrho} \tag{5.22}$$

$$K_s = \frac{1}{2}A_0\sum_{k\varrho}\Big(\sum_{sl\sigma}{}'\lambda_{k\varrho,\,sl\sigma}\,\tilde{p}_{sl\sigma}\Big)^2 + \sum_{rs}{}''\sum_{kl}\sum_{\varrho\sigma} N_{rk\varrho,\,sl\sigma}\,\tilde{p}_{rk\varrho}\,\tilde{p}_{sl\sigma} \tag{5.23}$$

wo $N_{rk\varrho,sl\sigma}$ durch (4.27′) oder (4.27″) gegeben ist. Die Konstante $J$ ergibt sich nach (5.18, 20) zu

$$J = 2\gamma^2 \bar{B}_0^2(\bar{A}_0 - 2\,A) \tag{5.22'}$$

was sich wegen (14.11), (2.2), (3.3) zu

$$J = \frac{2f^2}{3\mu^2}\left\{\int dX\,\delta_a(x)\,(\mu^2-\Delta)^{-1}\,\delta_a(x) + 2\,\mu^2\int dX\,\delta_a(\mu^2-\Delta)^{-2}\,\delta_a\right\} \tag{5.24}$$

berechnet.

Bemerken wir noch, dass unter Benutzung von (4.27′)

$$K_s = \frac{1}{2}A_0 \sum_{k\varrho}\left\{\left(\sum_{sl\sigma}{}' \lambda_{k\varrho,\,sl\sigma}\tilde{p}_{sl\sigma} + \frac{1}{A_0}\sum_{sl}{}' A_{0k,\,sl}\tilde{p}_{sl\varrho}\right)^2 - \frac{1}{A_0^2}\left(\sum_{sl}{}' A_{0k,\,sl}\tilde{p}_{sl\varrho}\right)^2\right\} \tag{5.25}$$

mit (5.23) identisch ist, so können wir für $K$ auch

$$K = H^0 + H^N + H^S + H_s' + \text{const.} \tag{5.26}$$

schreiben, wobei jetzt:

$$H^0 = H_0 \tag{5.27}$$

von (2.6), wenn man die $p_{rk\varrho}\,q_{rk\varrho}$ durch $\tilde{p}_{rk\varrho}\,\tilde{q}_{rk\varrho}$ ersetzt,

$$H^N = \frac{1}{2J}\sum_n P_n^2 \tag{5.28}$$

$$H^S = \frac{1}{2}A_0 \sum_{k\varrho}\left\{\left(\sum_{sl\sigma}{}' \lambda_{k\varrho,\,sl\sigma}\tilde{p}_{sl\sigma} + \frac{1}{A_0}\sum_{sl}{}' A_{0k,\,sl}\tilde{p}_{sl\varrho}\right)^2 - \frac{1}{A_0^2}\left(\sum_{sl} A_{0k,\,sl}\tilde{p}_{sl\varrho}\right)^2\right\} \tag{5.29}$$

$$H_s' = \frac{1}{8\bar{A}_0}\sum_{j\varrho} \Pi_{j\varrho}^2 \tag{5.30}$$

bedeuten sollen. $H^S$ (5.29) unterscheidet sich von $K_s$ (5.25) dadurch, dass die dritte Summe auch die Terme $s = 0$ umfasst. Die gleichen Terme treten auch in $H^0$ (5.27) auf und heben sich daher in $K$ (5.26) fort, was mit (5.21) übereinstimmt.

## *§ 6. $\mathfrak{U}$-Transformation.*

Es war unser Ziel, den Ausdruck $(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U})_{+0,\,+0}$ in (3.17) zu berechnen. — Nachdem wir in §§ 4, 5 mittels zweier kanonischer Transformationen für $K$ eine für unsere Zwecke geeignete Näherung erhalten haben, ist jetzt die Transformation mit der Matrix $\mathfrak{U}$

(3.11) vorzunehmen. Da es hierbei in $K$ nur auf die Terme $H^N$ (5.28) und $H'_s$ (5.30) ankommt, sind die Rechnungen genau gleichlautend wie diejenigen im Fall des Vektorfeldes, und wir können daher unter Verweis auf den § 8 der in Fussnote[4]) zitierten Arbeit[12]) sofort das Resultat

$$(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U}) = K + \frac{3}{8J} + \frac{1}{2J}\{(\sigma_1 \times 1) P_1 + (\sigma_2 P_3 - \sigma_3 P_2) \times \tau_2\} \tag{6.1}$$

angeben. Hierbei wurde wieder von (4.5) in der Weise Gebrauch gemacht, dass wir $\mathfrak{U}$ nach Potenzen von $\xi_{\varrho\sigma}/\Gamma$ entwickelten und uns in $(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U})$ auf das grösste Glied beschränkten. Die ersten beiden Terme in (6.1) sind Diagonalmatrizen, der dritte hat verschwindende Diagonalelemente. Daher finden wir in unserer Näherung

$$(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U})_{+0,+0} = K + \frac{3}{8J}, \quad \text{Ausserdiagonalelemente} \sim \frac{1}{J} \tag{6.2}$$

Denkt man sich $(3/8\,J)$ in die additive Konstante von $K$ (5.26) aufgenommen, so geht damit die Schrödingergleichung (3.17) schliesslich über in:

$$(K - E) F'_{+0} = 0, \quad \text{mit der „Randbedingung“:} \tag{6.3}$$

$$\left\{ e^{\pm \frac{i}{2}\Phi} \cdot e^{\pm \frac{i}{2}\Psi} \cdot F'_{+0} \right\} \text{ hat in } \Phi \text{ und } \Psi \text{ die Periode } 2\pi. \tag{6.4}$$

Die Begründung für (6.4) findet man in § 9 der in Fussnote[4]) zitierten Arbeit.

## *§ 7. Bedingung für starke Kopplung.*

In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen (3.34) und (3.35) untersucht werden, welche die Voraussetzung darstellen, unter der die Näherung (5.21, 26), (6.3) zulässig ist.

Da nach (3.20);

$$\sum_n r_n^2 = \sum_{j\varrho} \overline{q}_{0j\varrho}^2,$$

grössenordnungsmässig also

$$\overline{r}_n^2 \approx \sum_j \overline{q}_{0j\varrho}^2$$

gilt, und wegen (3.3) können wir (3.34) zunächst

$$f^2 \gg \frac{1}{\eta^2 \overline{B}_0^2} \sum_j \overline{q}_{0j\varrho}^2 \tag{7.1}$$

schreiben. In der quantisierten Theorie sind unter $\overline{q}_{0j\varrho}^2$ die Mittelwerte zu verstehen. Da diese auch im Grundzustand eine von Null verschiedene endliche Grösse haben, wird (7.1) zur Bedingung für $f$.

Man kann nun zeigen, dass der Grundzustandsmittelwert der Abweichung $\overline{q}^2_{0j\varrho}$ von der Minimumslage $\mathring{q}_{0j\varrho}$ (3.33) die gleiche Grössenordnung hat, wie der Mittelwert von $q^2_{0j\varrho}$ für die Nullpunktsschwingung des *wechselwirkungsfreien* Mesonfeldes. Wir berechnen die letztere. — Nach (2.1) gilt, wenn $M\{\cdots\}$ den Mittelwert bedeutet:

$$M\{q^2_{0j\varrho}\} = \int dX \int dX' U_0(x)\, U_0(x')\, M\{\psi_{j\varrho}(x)\, \psi_{j\varrho}(x')\} \tag{7.2}$$

Die Theorie des Vakuumfeldes[13]) liefert nach einiger Rechnung

$$\left.\begin{aligned} \sum_j M\{\psi_{j\varrho}(x)\,\psi_{j\varrho}(x')\} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathfrak{k}\, m(k)\, e^{i\vec{\mathfrak{k}}(\vec{x}-\vec{x}')} \\ m(k) = \frac{2}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\mu^2} \qquad & \omega_k^2 = \mu^2 + k_2 \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Dies in (7.2) eingesetzt ergibt (vgl. hierzu (12.1)):

$$\begin{aligned} \sum_j M(q^2_{0j\varrho}) = \int d^3\mathfrak{k}\, V_0^2(k)\, m(k) = 2\int dX\, U_0\,(\mu^2 - \varDelta)^{-\frac{1}{2}}\, U_0 \\ + \frac{1}{\mu^2}\int dX\, U_0\,(\mu^2 - \varDelta)^{\frac{1}{2}}\, U_0 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Der erste Summand rührt von den transversalen Mesonen her, der zweite von den longitudinalen.

Durch Einsetzen von (7.4), (2.5, 13) und der Grössenordnungen (12.5, 6) in (7.1) bekommt diese Bedingung jetzt die Form

$$f \gg (a\,\mu) \qquad \text{für } a\,\mu \ll 1 \tag{7.5}$$

$$f \gg (a\,\mu)^{3/2} \quad \text{für } a\,\mu \gg 1 \tag{7.5'}$$

Für die Bedingung (3.35) müssen wir die Ausserdiagonalelemente von $(\mathfrak{U}^* K\, \mathfrak{U})$ kennen. Nach (6.2) sind dieselben von der Grössenordnung $1/J$, so dass sich (3.35) unter Benutzung von (3.3) als

$$f^2\,\eta^2\, B_0\, J \gg 1 \tag{7.6}$$

fassen lässt. — Im Fall $a\,\mu \ll 1$ findet man für $J$ nach (5.24), (2.2), (12.4, 6, 7) in erster Näherung im Sinne einer Entwicklung nach $(a\mu)$:

$$J = \frac{f^2}{6\,\pi\,\mu^2\, a_0} \tag{7.7}$$

wo $a_0$ der in (12.4) definierte Nucleonradius ist. Grössenordnungsmässig ergibt sich aus (5.24), (2.2), (12.5 6, 7):

$$J \approx \begin{cases} f^2 a^{-1} \mu^{-2} & \text{für } a\mu \ll 1 \\ f^2 a^{-3} \mu^{-4} & \text{für } a\mu \gg 1 \end{cases} \tag{7.8}$$

Setzt man jetzt in (7.6) die Grössenordnungen gemäss (7.8), (2.5, 13), (12.5, 6) ein, so wird man wieder auf die Ungleichungen (7.5, 5′) geführt. Diese stellen also die am Ende des § 3 in Aussicht gestellte „Bedingung für starke Kopplung" dar, welche als die Voraussetzung aller hier durchgeführten Rechnungen zu betrachten ist.

## III. Approximation des Hamiltonoperators im Fall $f = 0$, $g \neq 0$.

### *§ 8. Übertragung der §§ 3—7 auf den anderen Kopplungsansatz.*

Wir werden die Theorie nicht für den allgemeinen Kopplungsansatz $f \neq 0$, $g \neq 0$ entwickeln, sondern beschränken uns darauf, jeden der beiden Wechselwirkungsterme für sich zu betrachten. Wir wollen daher jetzt den alternativen Fall $f = 0$, $g \neq 0$ untersuchen. Hierzu ist es zweckmässig, von den durch (2.1) definierten kanonischen Variablen zu den durch die kanonische Transformation

$$Q_{rk\varrho} = p_{rk\varrho}, \qquad P_{rk\varrho} = -q_{rk\varrho} \tag{8.1}$$

eingeführten neuen kanonischen Variablen $P_{rk\varrho}$, $Q_{rk\varrho}$ überzugehen. Diese substituieren wir in $H$ (2.6, 7), wodurch:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\varrho} \sum_{rs} \sum_{kl} \{B_{rk,sl} P_{rk\varrho} P_{sl\varrho} + A_{rk,sl} Q_{rk\varrho} Q_{sl\varrho}\} \tag{8.2}$$

$$H' = \eta \sum_{\varrho k} \sigma_k \tau_\varrho \left(\frac{g}{\mu} Q_{0k\varrho} - f P_{0k\varrho}\right) \tag{8.3}$$

entsteht, und für $f = 0$ dann

$$H' = \gamma_g \sum_{k\varrho} \sigma_k \tau_\varrho Q_{0k\varrho} \qquad \gamma_g = \frac{\eta g}{\mu} > 0 \tag{8.4}$$

Der Vergleich mit (3.3) lehrt, dass wir den Fall $f = 0$ auf die gleiche Form gebracht haben, die früher der Fall $g = 0$ hatte. Daher können wir alle früheren Rechnungen übernehmen. Der einzige Unterschied ist, dass die — immer noch durch (2.8 bis 13) definierten — Matrizen $A$, $B$ ihre Plätze vertauscht haben. Der Einfluss dieses Wechsels ist Schritt für Schritt nachzuprüfen.

Der § 3 kann im wesentlichen übernommen werden, einzig sind in (3.21) ff. die $B$ durch die $A$ zu ersetzen, speziell in (3.31—35), wo jetzt

$$\Gamma_g = \gamma_g \overline{A}_0 \tag{8.5}$$

auftritt. Gleichermassen ist in (4.3) $\Gamma_g$ und in (4.4) $\overline{A}$ zu schreiben. (4.19) ist durch

$$\lambda^{(g)}_{k\varrho, sl\sigma} = \frac{1}{2\overline{A}_0} \sum_j \overline{A}_{sl,0j} (S_{k\sigma} S_{j\varrho} - \delta_{kj} \delta_{\sigma\varrho}) \quad (s \geqslant 1) \tag{8.6}$$

zu ersetzen. In (4.26) tritt $B$ an die Stelle von $A$. Anstatt (4.27′) ist

$$N^{(g)}_{rk\varrho, sl\sigma} = \sum_j B_{rk,0j} \lambda^{(g)}_{j\varrho, sl\sigma} \tag{8.7}$$

zu verwenden. In (4.28) haben wir $A$, $(\gamma_g\ \Gamma_g)$ für $B$, $(\gamma\ \Gamma)$ einzusetzen. In § 5 ändern sich die Definitionen (5.11), (5.13) zu:

$$\Lambda^{(1g)}_{k\varrho, j\sigma} = \sum_{sl} \sum_{s'l'} \overline{B}_{sl,s'l'} \sum_\tau \lambda^{(g)}_{k\varrho, sl\tau} \lambda^{(g)}_{j\sigma, s'l'\tau} = \Lambda^{(1g)}_{j\sigma, k\varrho} \tag{8.8}$$

$$\Lambda^{(2g)}_{k\varrho, j\sigma} = \sum_{sl} \{\overline{B}_{0k,sl} \lambda^{(g)}_{j\sigma, sl\varrho} + \overline{B}_{0j,sl} \lambda^{(g)}_{k\varrho, sl\sigma}\} = \Lambda^{(2g)}_{j\sigma, k\varrho} \tag{8.9}$$

Diese beiden Matrizen sind ebenfalls im Anhang § 14 berechnet, und gemäss (14.10) hat man jetzt in (5.15) $\Lambda^{(g)}$ (durch (14.12) definiert) zu schreiben, ausserdem natürlich $\overline{B}_0$ statt $\overline{A}_0$. Die weiteren Rechnungen verlaufen wieder ganz analog, und (5.21) ist daher mit dem Zusatz gültig, dass in (5.23) $\lambda$, $N$ durch $\lambda^{(g)}$ (8.6) und $N^{(g)}$ (8.7), (4.27″) ersetzt werden, und dass an die Stelle von (5.22′) jetzt

$$J_g = 2\gamma_g^2 A_0^2 \{\overline{B}_0 - 2\Lambda^{(g)}\} \tag{8.10}$$

tritt. In (8.10) sind (14, 12), (2.2), (8.4) einzusetzen, wodurch wir

$$J_g = \frac{2g^2}{3\mu^2}\left\{2\int dX\, \delta_a(x) (\mu^2 - \Delta)^{-1} \delta_a(x) + \mu^2 \int dX\, \delta_a (\mu^2 - \Delta)^{-2} \delta_a\right\} \tag{8.11}$$

erhalten. Im Vergleich mit (5.24) ist die Vertauschung der Faktoren 1 und 2 zu bemerken. Der Übergang zu (5.26) gilt auch hier.

Der § 6 ist ohne Änderung zu übernehmen, so dass noch die Bedingung für starke Kopplung § 7 zu diskutieren bleibt. Da sich die Bedingung (3.34) im vorliegenden Fall, wie erwähnt

$$\overline{r}_n \ll \gamma_g A_0 \tag{8.12}$$

schreibt, liefern die gleichen Überlegungen, die zu (7.1) führten, wegen (8.4) jetzt

$$g^2 \gg \frac{\mu^2}{\eta^2 \overline{A}_0^2} \sum_j \overline{Q}^2_{0j\varrho} \tag{8.13}$$

Der (7.2) entsprechende und rechts einzusetzende Mittelwert wird wegen (8.1), (2.1) jetzt

$$M\{Q^2_{0j\varrho}\} = \int d\,X \int d\,X'\; U_0(x)\, U_0(x')\, M\{\pi_{j\varrho}(x)\,\pi_{j\varrho}(x')\} \quad (8.14)$$

Die gleiche Theorie des Vakuumfeldes, die zu (7.3) führte liefert uns auch

$$\sum_j M\{\pi_{jl}(x)\,\pi_{jl}(x')\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathfrak{k}\; m'(k)\, e^{i\vec{\mathfrak{k}}(\vec{x}-\vec{x}')}$$

mit:

$$m'(k) = 2\,\omega_k + \frac{\mu^2}{\omega_k} \qquad \omega_k^2 = \mu^2 + k^2 \quad (8.15)$$

Dies in (8.14) eingesetzt, ergibt analog zu (7.4)

$$\sum_j M\{\overline{Q}^2_{0j\varrho}\} = \int d^3\mathfrak{k}\; V_0^2(k)\, m'(k) = 2\int d\,X\, U_0\,(\mu^2 - \Delta)^{\frac{1}{2}}\, U_0$$

$$+ \mu^2 \int d\,X\, U_0\,(\mu^2 - \Delta)^{-\frac{1}{2}}\, U_0 \quad (8.16)$$

Der erste Summand entspricht den transversalen Mesonen, der zweite den longitudinalen. Setzt man nun (8.16), (2.5, 13) und die Grössenordnungen (12.5, 6) in (8.13) ein, so ergeben sich die Bedingungen:

$$g \gg a\,\mu \qquad \text{für } a\,\mu \ll 1 \quad (8.17)$$

$$g \gg (a\,\mu)^{3/2} \quad \text{für } a\,\mu \gg 1 \quad (8.17')$$

Die Bedingung (3.35) andererseits lautet jetzt

$$(\mathfrak{U}^*\, K\, \mathfrak{U})_{\alpha\lambda,\,+0} \ll \gamma_g^2\, \overline{A}_0 \quad (8.18)$$

Analoge Überlegungen wie diejenigen, die zu (7.6) führten, liefern wegen (8.4) jetzt:

$$g^2\,\eta^2\,\overline{A}_0\, J_g \gg \mu^2 \quad (8.19)$$

oder, da nach (2.13) $\overline{A}_0$ von der gleichen Grössenordnung wie $\mu^2\,\overline{B}_0$ ist:

$$g^2\,\eta^2\,\overline{B}_0\, J_g \gg 1 \quad (8.19')$$

Der Vergleich von (8.11) mit (5.24) zeigt ferner, dass grössenordnungsmässig

$$\frac{J_g}{g^2} \approx \frac{J}{f^2} \quad (8.20)$$

gilt. Infolgedessen können die auf (7.6) folgenden Überlegungen hier in gleicher Weise gemacht werden, sofern man nur $J$, $f$ durch $J_g$, $g$ ersetzt. Daher folgen aus (8.19′) wieder die Ungleichungen (8.17, 17′), welche die „Bedingung für starke Kopplung" im vorliegenden Fall darstellen. Sie sind den Bedingungen (7.5, 5′) vollkommen analog. — Wir geben noch die erste Näherung von $J_g$ im Sinne einer Entwicklung nach $(a\mu)$ bei $a\mu \ll 1$ an:

$$J_g = \frac{g^2}{3\pi\mu^2 a_0} \qquad (a\,\mu \ll 1) \tag{8.21}$$

welche sich aus (8.11) analog ergibt wie (7.7) aus (5.24)

## IV. Diskussion der Gleichung (6.3).

### *§ 9. Das komplexe Nucleon.*

Um die Bedeutung der Schrödingergleichung (6.3) mit $K$ (5.26) zu diskutieren, behandeln wir zunächst den Term $H^N$ (5.28), den wir nach (4.7, 8)

$$H^N = \frac{-1}{2J}\left\{\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2} + 2\cos\Theta\frac{\partial^2}{\partial\Phi\partial\Psi} + \frac{\partial^2}{\partial\Psi^2}\right)\right\} \tag{9.1}$$

schreiben, für sich; d. h. wir betrachten das Eigenwertproblem

$$(H^N - E^N)\,F^N(\Theta\,\Phi\,\Psi) = 0\,, \tag{9.2}$$

nach dessen Eigenfunktionen wir uns später eine Entwicklung vorgenommen denken. Dieses Vorgehen ist ganz gleich wie in der Vektormesontheorie und wir können für die Rechnungen daher auf den § 9 der in Fussnote[4]) zitierten Arbeit verweisen. Der Ausdruck (9.1) ist der Hamiltonoperator eines Kugelkreisels mit dem Trägheitsmoment $J$, die Eigenfunktionen und Eigenwerte von (9.2) sind

$$\left.\begin{array}{c} F^N_{jmn} = e^{i(m\Phi + n\psi)}\,u_{jmn}(\Theta)\,,\quad E^N_j = \frac{1}{2J}\,j\,(j+1) \\ j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\cdots \qquad m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\cdots \qquad n = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \\ j \geqslant |m| \qquad j \geqslant |n| \end{array}\right\} \tag{9.3}$$

Die Halbzahligkeit der drei Quantenzahlen folgt aus der Bedingung (6.4).

Aus der Differential-Gleichung (9.1,2) ergibt sich für die Hermitizitäts- und Orthogonalitäts-Integrale das Volumelement $(d\Phi d\Psi d\Theta \sin\Theta)$, woraus die nach (4.25) erwähnte Hermitizität der $P$ (4.8) folgt. Nimmt man noch hinzu, dass (4.9) die Vertauschungsrelationen von Drehimpulsoperatoren sind, und dass (4.8) dieselben Gleichungen sind, wie diejenigen zwischen den Drehimpulskomponenten eines starren Körpers in einem körperfesten Axensystem und den zu den Eulerschen Winkeln $(\Theta\Phi\Psi)$ kanonisch konjugierten Impulsen $(p_\Phi p_\psi p_\Theta)$ — so erkennt man, dass die $P_n$ mathematisch die Rolle von Drehimpulsen eines Kugelkreisels mit der Rotationsenergie (9.1) spielen. Diesen Sachverhalt interpretiert man dahin, dass der durch die Freiheitsgrade $(\Theta \Phi \Psi)$ beschriebene Teil des Mesonfeldes durch die starke Kopplung fest an das ruhende Nucleon gebunden wird; er bildet mit diesem zusammen ein sogenanntes „komplexes Nucleon", welches sich wie ein Kugelkreisel verhält. Der Spin dieses komplexen Nucleons wird nämlich identisch mit den Komponenten des Kugelkreiseldrehimpulses bezüglich eines raumfesten Axensystems:

$$\left.\begin{array}{ll} M_i^N = -\sum\limits_n S_{in} P_n, \quad M_3^N = p_\Phi & \text{Eigenwerte: } M_3^N = m \\ \sum\limits_i (M_i^N)^2 = \sum\limits_n P_n^2, & \text{Eigenwerte: } j\,(j+1) \end{array}\right\} \tag{9.4}$$

so dass $H^N$ die diesem Spin entsprechende Rotationsenergie ist, sofern dem komplexen Nucleon das Trägheitsmoment $J$ zugeschrieben wird. Diese „Spinträgheit" wird für $a \to 0$ gemäss (7.8) unendlich gross, worauf wir vor (1.9) Bezug nahmen. — Die Quantenzahlen $j$, $m$ bestimmen also Rotationsenergie und Spin des komplexen Nucleons. Die Quantenzahl $n$ bestimmt ferner seine Ladung, da sich diese zu

$$e^N = \frac{1}{2} + P_3 = \frac{1}{2} + p_\Psi \quad \text{Eigenwerte} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{9.5}$$

ergibt. Die Grundzustände $j = 1/2$, $m = \pm 1/2$, $n = \pm 1/2$ entsprechen dem „nackten Nucleon", während sich für $j > 1/2$ sogenannte „Isobaren" ergeben.

Die vorstehenden Ausführungen gelten offenbar auch für den in § 8 diskutierten alternativen Kopplungsansatz, sofern man nur das Trägheitsmoment $J$ durch $J_g$ (8.11) ersetzt.

## *§ 10. Zum Streuproblem.*

Es sei ein Wort über die Streuung angefügt, wobei wir uns auf den Fall $g = 0$ beschränken. Die Sachlage in den anderen Mesontheorien lässt erwarten, dass der übrige Teil von $K$ (5.26) eine Streuung der „nicht im komplexen Nucleon absorbierten" Mesonen durch das komplexe Nucleon beschreibt, und dass das Problem sich in vereinfachter Form darbietet, wenn man sich auf den interessanten Fall $a\mu \ll 1$ beschränkt und die Energie $\omega_0 = \sqrt{\mu^2 + k^2}$ der einfallenden „freien Mesonen" als $\ll a^{-1}$ voraussetzt[14]). Es liegt nahe, dann in $K$ (5.26) den Term $H_s'$ zu streichen und in $H^0$, $H^S$ die $(q_{0k\varrho}\, p_{0k\varrho})$ als von den $(\Theta \Phi \Psi)$ unabhängige Variable aufzufassen, so dass die Hamiltonfunktion

$$K = H^N + H^0 + H^S + \text{const.} \tag{10.1}$$

leicht interpretierbar wird: $H^N$ entspricht dem komplexen Nucleon, $H^0$ repräsentiert das Vakuumfeld der „freien" Mesonen, $H^S$ $(p_{rk\varrho}/$

$\Theta\Phi\Psi$) liefert die Wechselwirkung zwischen beiden. In Analogie zu dem ähnlichen Vorgehen beim Vektor- und Skalarfeld wird man nämlich vermuten, dass die gemachten Vernachlässigungen das Fortlassen einer Streuung bedeuten, die klein gegen die durch $H^S$ bewirkte ist. — Nimmt man nun noch die Energie der einfallenden Mesonen als gross gegen die Isobaren-Energiedifferenzen an, so kann $H^N$ als konstant angesehen werden, und in $H^S$ sind die $(\Theta\Phi\Psi)$, also auch die $\lambda$ als vorgegebene Parameter zu behandeln:

$$K = H^0 + H^s + \text{const.} \tag{10.2}$$

Der Streuterm $H^S$ (5.29) ist komplizierter als in den übrigen Mesontheorien. Dies liegt in der ursprünglichen Hamiltonfunktion (2.6, 7) begründet. Diejenigen Impulskoordinaten $(p_{0k\varrho})$ nämlich, deren konjugierte $(q_{0k\varrho})$ in $H'$ (2.7) auftreten, erscheinen in $H_0$ (2.6) auch mit den übrigen $p_{rk\varrho}$ $(r \geqslant 1)$ multipliziert — ein Umstand, der weder in der Vektortheorie noch in der Pseudoskalartheorie sein Analogon hat. Immerhin lässt sich das zu (10.2) gehörige Streuproblem in ähnlicher Weise wie das entsprechende Problem in der Vektortheorie behandeln. Als Lösung ergibt sich:

$$\sum_r \tilde{q}_{rj\varrho} U_r = \tilde{\psi}_{j\varrho}(x,t) = \text{const.}\, e^{-i\omega_0 t}\left\{ e^{i\vec{\mathfrak{k}}_0\vec{x}}\delta_{jj_0}\,\delta_{\varrho\varrho_0} + f_{j\varrho,j_0\varrho_0}\cdot\frac{e^{ik_0 r}}{r}\right\} \tag{10.3}$$

mit:

$$\left.\begin{aligned} f_{j\varrho,j_0\varrho_0}(\Theta\Phi\Psi) &= a_0(a_1\mu)^2\, 3\sum_l (S_{l\varrho_0}S_{j_0\varrho} - \delta_{lj_0}\delta_{\varrho_0\varrho})\left(\delta_{lj} + \frac{k_0^2}{\mu^2}\,\mathfrak{s}_l\,\mathfrak{s}_j\right) \\ &\quad + a_0(a_1\omega_0)^2\,\frac{1}{2}\sum_{li}(S_{l\varrho_0}S_{i\varrho} + \delta_{li}\,\delta_{\varrho_0\varrho}) \\ &\quad \cdot\left\{\left(\delta_{lj} + \frac{k_0^2}{\mu^2}\,\mathfrak{s}_l\mathfrak{s}_j\right)\left(5\,\delta_{ij_0} + \frac{k_0^2}{\omega_0^2}\,\mathfrak{s}_i^0\,\mathfrak{s}_{j_0}^0\right) - \delta_{lj}\,\delta_{ij_0}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

wobei:

$$a_1^2 = \int dX\, U_0\,(-\Delta)^{-1}\, U_0,\ \vec{x} = r\vec{\mathfrak{s}},\ \vec{\mathfrak{k}}_0 = k_0\,\vec{\mathfrak{s}}^{\,0}\,(|\vec{\mathfrak{s}}| = |\vec{\mathfrak{s}}^{\,0}| = 1)$$

Nach (12.3) ist $a_1$ ebenso wie das durch (12.4) definierte $a_0$ von der Grössenordnung des Nucleonradius.

Wir wollen die ziemlich langen und verwickelten Rechnungen, die zu (10.4) führen, hier nicht angeben. Aus (10.4) folgt für den mittleren Wirkungsquerschnitt nämlich die Grössenordnung $\sim (a^6\,\mu^4)$, d. h. um $(a\,\mu)^4$ kleiner als in der Vektor- und Pseudoskalartheorie. Dieses Ergebnis lässt es als möglich erscheinen, dass durch die oben eingeführten Vereinfachungen eine stärkere Streuung ungerechtfertigterweise vernachlässigt ist.

## V. Mehrere Nucleonen.

### § 11. *Kräfte zwischen Nucleonen.*

Wenn anstatt eines einzigen Nucleons jetzt $N$ ruhende Nucleonen an den Orten $x_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots. N$) mit dem Mesonfeld in Wechselwirkung treten, so ist der Kopplungsterm (1.11′) durch

$$\mathfrak{H}' = \sum_{\nu=1}^{N} \mathfrak{H}_\nu, \quad \mathfrak{H}_\nu = \delta_a (x - x_\nu) \sum_{k\varrho} \sigma_k^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \left(f\, \psi_{k\varrho} + \frac{g}{\mu}\, \pi_{k\varrho}\right) \quad (11.1)$$

zu ersetzen, während $\mathfrak{H}_0$ (1.11) unverändert bleibt. Die Schrödingerfunktion hängt von den Spin- und Ladungsindizes aller $N$-Nucleonen ab, hat also $4^N$ Komponenten. Die Matrix $(\sigma_k^{(\nu)}\ \tau_\varrho^{(\nu)}$ wirkt auf die Indices des $\nu$-ten Nucleons allein, bezüglich der Indices der $(N-1)$ anderen Nucleonen ist sie als Einheitsmatrix aufzufassen.

In Analogie zu § 2 entwickeln wir die Feldfunktionen nach einem vollständigen Orthogonalsystem reeller Funktionen $U_r(x)$ [$r = \mathbf{1}, 2, \ldots (!)$]

$$\psi_{k\varrho} = \sum_r U_r\, q_{rkl} \qquad \pi_{k\varrho} = \sum_r U_r\, p_{rk\varrho} \qquad \left(\sum_r = \sum_{r=1}^{\infty}\right) \quad (11.2)$$

Und in Analogie zu (2.2) definieren wir die Funktionen $U_1(x)$, $U_2(x) \ldots U_N$ durch

$$U_\nu = \frac{1}{\eta}\, \delta_a (x - x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2 \cdots N) \quad (11.3)$$

$\eta$ ist für alle $U_\nu$ gleich und durch (2.4) gegeben. Da die Nucleonen als nicht überlappend:

$$\delta_a (x - x_\mu)\, \delta_a (x - x_\nu) \equiv 0 \ \text{ für } \ \mu \neq \nu \quad (11.4)$$

vorausgesetzt werden, ist die Orthogonalität der Funktionen $U_1 \ldots. U_N$ gewährleistet. Gehen wir jetzt mit (11.2, 3) in die Hamiltonfunktion (1.11) (11.1) ein, so resultiert

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_\varrho \sum_{rs} \sum_{kl} \{A_{rk,sl}\, p_{rk\varrho}\, p_{sl\varrho} + B_{rk,sl}\, q_{rk\varrho}\, q_{sl\varrho}\} \quad (11.5)$$

$$H' = \sum_{\nu=1}^{N} H_\nu \quad H_\nu = \eta \sum_{k\varrho} \sigma_k^{(\nu)} \tau_\varrho^{(\nu)} \left\{f\, q_{\nu k\varrho} + \frac{g}{\mu}\, p_{\nu k\varrho}\right\} \quad (11.6)$$

Dabei sind die Matrizen $A$, $B$ immer noch durch (2.8, 9) definiert, nur sind unter den $U_r(x)$ jetzt die neuen Funktionen zu verstehen. An die Stelle von (2.12, 13) treten daher erweiterte Gleichungen, die wir nur für $\bar{A}$, $\overline{B}$ ausrechnen. Man findet:

$$\bar{A}_{\nu k, \nu l} = \bar{A}_0\, \delta_{kl} \qquad \overline{B}_{\nu k, \nu l} = \overline{B}_0\, \delta_{kl} \quad (11.7)$$

wo $\bar{A}_0$, $B_0$ wieder durch (2.13) gegeben sind. Für $\nu \neq \mu$ liefert (2.10) wegen der Orthogonalität:

$$\bar{A}_{\mu k, \nu l} = \int d X U_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\mu^2 - \Delta)^{-1} U_\nu \tag{11.8}$$

was sich für $a \mu \ll 1$ und Nucleonabstände $|\vec{x}_\mu - \vec{x}_\nu| \ll a$ wegen (11.3) in erster Näherung zu

$$\bar{A}_{\mu k, \nu l} = \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^{(\mu\nu)} \partial x_l^{(\mu\nu)}} \left( \frac{e^{-\mu r_{\mu\nu}}}{4 \pi r_{\mu\nu}} \right) \quad \begin{aligned} \vec{x}^{(\mu\nu)} &= \vec{x}_\mu - \vec{x}_\nu \\ r_{\mu\nu} &= |\vec{x}^{(\mu\nu)}| \end{aligned} \quad (\mu, \nu \leqslant N) \tag{11.9}$$

vereinfacht. In analoger Weise findet man

$$\bar{B}_{\mu k, \nu l} = \frac{1}{\eta^2} \left\{ \delta_{kl} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^{(\mu\nu)} \partial x_l^{(\mu\nu)}} \right\} \left( \frac{e^{-\mu r_{\mu\nu}}}{4 \pi r_{\mu\nu}} \right) \tag{11.10}$$

Um die zu § 3 analogen Rechnungen durchzuführen, beschränken wir uns wieder auf einen einparametrigen Kopplungsansatz und setzen in (11.6) zunächst $g = 0$. Die Matrix, die $H' = \sum_\nu H_\nu$, dann analog zu (3.2) diagonalisiert, ist das direkte Produkt

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \cdots \times \mathfrak{U}_N \tag{11.11}$$

wobei $\mathfrak{U}_\nu$ gemäss (3.11) für das $\nu$-te Nucleon und seine Indices definiert ist, und $H_\nu$ gemäss (3.10, 12) auf Diagonalform bringt, so dass sich

$$H' = -\gamma \mathfrak{U} R \mathfrak{U}^*, \quad R = \sum_\nu^N R_\nu, \quad \gamma = \eta f \tag{11.12}$$

ergibt. $R_\nu$ ist die nach (3.12, 13) für das $\nu$-te Nucleon und seine Indices definierte Diagonalmatrix. Analoge Überlegungen wie in § 3 führen uns von hier zur einkomponentigen Schrödingergleichung:

$$\{(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U})_{+0 \ldots, +0 \ldots} - E\} F'_{+0, +0 \ldots, +0} = 0 \tag{11.13}$$

mit

$$K = H_0 - \gamma \sum_{\nu=1}^N \sum_n^3 r_n^{(\nu)} = F + G \tag{11.14}$$

$G$ ist mit (3.18) identisch, während

$$F = \frac{1}{2} \sum_\varrho \sum_{rs} \sum_{kl} B_{rk, sl} q_{rk\varrho} q_{sl\varrho} - \gamma \sum_\nu \sum_n r_n^{(\nu)} \tag{11.15}$$

$$q_{\nu k\varrho} = \sum_n r_n^{(\nu)} s_{kn}^{(\nu)} t_{\varrho n}^{(\nu)}, \quad r_n^{(\nu)} = \sum_{k\varrho} q_{\nu k\varrho} s_{kn}^{(\nu)} t_{\varrho n}^{(\nu)} \tag{11.16}$$

Die Funktion $F$ hat wieder ein Minimum, und bei starker Kopplung können wir uns auf kleine Schwingungen um dasselbe beschränken. Zur Bestimmung des Minimums wenden wir das gleiche

Verfahren wie in § 3 an und führen, den 9 $N$ Nebenbedingungen entsprechend, die 9 $N$ Lagrangeschen Multiplikatoren $\alpha_{\nu l \sigma}$ ein. An die Stelle Gleichungen (3.21, 22) treten dann:

$$\sum_{sl} B_{rk,sl} \mathring{q}_{sl\varrho} - \sum_{\mu=1}^{N} \delta_{\mu r} \alpha_{\mu k \varrho} = 0 \tag{11.17}$$

$$(k\ \varrho = 1, 2, 3)\ (r = 1, 2, \cdots \infty)$$

$$-\gamma + \sum_{l\sigma} \alpha_{\nu l \sigma} s_{ln}^{(\nu)} t_{\sigma n}^{(\nu)} = 0 \tag{11.18}$$

$$(n = 1, 2, 3)\ (\nu = 1, 2, 3 \cdots N)$$

Gleichung (11.17) lässt sich mittels (2.11) umkehren:

$$\mathring{q}_{sl\varrho} = \sum_{\mu k} \overline{B}_{sl,\mu k} \alpha_{\mu k \varrho} \tag{11.19}$$

welches für $s = \nu = 1, 2, \ldots . N$ in

$$\mathring{q}_{\nu l \varrho} = \overline{B}_0 \alpha_{\nu l \varrho} + \sum_{\mu}{}' \sum_{k} \overline{B}_{\nu l,\mu k} \alpha_{\mu k \varrho} \quad \left(\sum_{\mu}{}' = \sum_{\mu=1}^{N} \text{ aber } \mu \neq \nu\right) \tag{11.20}$$

übergeht. Aus (11.16, 18, 20) folgt:

$$\mathring{r}_{n}^{(\nu)} = \Gamma + \sum_{\mu}{}' \sum_{kl\varrho} \overline{B}_{\nu l,\mu k} s_{ln}^{(\nu)} t_{\varrho n}^{(\nu)} \alpha_{\mu k \varrho} \tag{11.21}$$

$$\sum_{n} \mathring{r}_{n}^{(\nu)} = 3\,\Gamma + \sum_{\mu}{}' \sum_{kl\varrho} \overline{B}_{\nu l,\mu k} S_{l\varrho}^{(\nu)} \alpha_{\mu k \varrho} \tag{11.22}$$

wo $\Gamma$ wieder durch (3.28) und $S^{(\nu)}$ analog (3.29) definiert ist. Da nun die $\overline{B}_{\nu j,\mu k}$ $(\nu \neq \mu)$ gemäss (11.10) für grosse $r_{\mu\nu}$ sehr klein sind, denkt man sich die Grössen $\mathring{q}_{rk\varrho}$, $\mathring{r}_{n}^{(\nu)}$, $\alpha_{\nu k \varrho}$ nach den $\overline{B}_{\nu j,\mu k}$ $(\nu \neq \mu)$ entwickelt. Die $\overline{B}$-freien Terme ergeben sich, indem man in den obigen Gleichungen die $\overline{B}_{\nu j,\mu k} = 0$ $(\nu \neq \mu)$ setzt. So findet man aus (11.20, 21) und mittels (11.16):

$$[\mathring{q}_{\nu l \varrho}]_0 = \overline{B}_0 [\alpha_{\nu l \varrho}]_0\,,\ [\mathring{r}_{n}^{(\nu)}]_0 = \Gamma = \gamma\, \overline{B}_0\,,\ [\alpha_{\nu l \varrho}]_0 = \gamma\, S_{l\varrho}^{(\nu)} \tag{11.23}$$

Durch Einsetzen von (11.23) in (11.19—22) ergeben sich sodann die in den $\overline{B}_{\nu j,\mu k}$ $(\nu \neq \mu)$ linearen Terme, von denen wir nur aus (11.22):

$$\sum_{n} \mathring{r}_{n}^{(\nu)} = 3\,\Gamma + \gamma \sum_{\mu}{}' \sum_{kl} \overline{B}_{\nu l,\mu k} \sum_{\varrho} S_{l\varrho}^{(\nu)} S_{k\varrho}^{(\mu)} \tag{11.24}$$

berechnen. Das genügt schon um den Minimalwert $\mathring{F}$ von (11.15) zu erhalten. Aus (11.17) ergibt sich nämlich:

$$\sum_{\varrho} \sum_{rk} \sum_{sl} B_{rk,sl} \mathring{q}_{sl\varrho} \mathring{q}_{rk\varrho} = \sum_{\mu k \varrho} \mathring{q}_{\mu k \varrho} \alpha_{\mu k \varrho}$$

und aus (11.16, 18):

$$\gamma \sum_{\nu n} \mathring{r}_{n}^{(\nu)} = \sum_{\nu l \sigma} \alpha_{\nu l \sigma} \mathring{q}_{\nu l \sigma}$$

Für $\overset{\circ}{F}$ (11.15) finden wir daher, wenn wir noch (11.24) berücksichtigen:

$$\overset{\circ}{F} = -\frac{1}{2}\gamma \sum_{\nu n} \overset{\circ}{r}_n^{(\nu)} = -\frac{3}{2}\gamma^2 \overline{B}_0 N + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}{}' V_f^{(\mu\nu)} \tag{11.25}$$

mit:

$$V_f^{(\mu\nu)}(r_{\mu\nu}) = -\gamma^2 \sum_{\varkappa l} \overline{B}_{\mu k, \nu l} \sum_{\varrho} S_{k\varrho}^{(\mu)} S_{l\varrho}^{(\nu)} \tag{11.26}$$

$V_f^{(\mu\nu)}$ hängt gemäss (11.10) von $r_{\mu\nu}$ ab.

Die Berechnung von $\overset{\circ}{F}$ ist hinreichend, um die Kräfte zwischen den ruhenden Nucleonen in einer ersten Näherung zu liefern. In der Tat: $\overset{\circ}{F}$ ist die erste Näherung von $K$ und damit von $(\mathfrak{U}^* K \mathfrak{U})_{+0 \ldots,}$ $_{+0 \ldots}$. Daraus, dass diese Näherung der Hamiltonfunktion sich gemäss (11.26) zu einer Funktion der Nucleonkoordinaten allein reduziert, entnimmt man, dass sich die Kräfte zwischen den Nucleonen aus den statischen Potentialen (11.25, 26) ableiten. Wir begnügen uns mit dieser Näherung, wollen aber vor der Diskussion noch auf den alternativen Kopplungsansatz eingehen. Es ist klar, dass ein analoges Vorgehen, wie wir es im § 8 eingeschlagen haben, uns hier zu dem Ausdruck

$$\overset{\circ}{F}_g = -\frac{3}{2}\gamma_g^2 \overline{A}_0 N + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}{}' V_g^{(\mu\nu)} \tag{11.27}$$

mit

$$V_g^{(\mu\nu)} = -\gamma_g^2 \sum_{kl} \overline{A}_{\mu k, \nu l} \sum_{\varrho} S_{k\varrho}^{(\mu)} S_{l\varrho}^{(\nu)} \tag{11.28}$$

führen wird, in Analogie zu (11.25, 26). Setzen wir nun die Werte (11.9, 10) für $\overline{A}$ und $\overline{B}$ in (11.26, 28) ein, so ergeben sich folgende statische Potentiale der Nucleonkräfte:

$$V_f^{(\mu\nu)} = -f^2 \sum_{\varrho} \left\{ \sum_k S_{k\varrho}^{(\mu)} S_{k\varrho}^{(\nu)} - \frac{1}{\mu^2} \left( \sum_k S_{k\varrho}^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\mu\nu)}} \right) \cdot \left( \sum_l S_{l\varrho}^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_l^{(\mu\nu)}} \right) \right\} \frac{e^{-\mu r_{\mu\nu}}}{4\pi r_{\mu\nu}} \tag{11.29}$$

$$V_g^{(\mu\nu)} = -\frac{g^2}{\mu^2} \sum_{\varrho} \left( \sum_k S_{k\varrho}^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\mu\nu)}} \right) \left( \sum_l S_{l\varrho}^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial x_l^{(\mu\nu)}} \right) \frac{1}{4\pi r_{\mu\nu}} e^{-\mu r_{\mu\nu}} \tag{11.30}$$

Man hat es mit Kräften zwischen den komplexen Nucleonen im Sinn von § 9 zu tun, von deren „inneren Variablen“ $(\Theta_\nu\, \Phi_\nu\, \Psi_\nu)$ die Potentiale durch die $S^{(\nu)}$ noch abhängen. Infolgedessen sind die $V_f$, $V_g$ als Operatoren auf die Schrödingerfunktion aufzufassen, wodurch sich der Austauschcharakter der Kräfte ergibt. Denkt man sich die Schrödingerfunktion nun nach Produkten aus den Eigenfunktionen $F^{N\nu}_{jmn}(\Theta_\nu\, \Phi_\nu\, \Psi_\nu)$ der Isobarenenergien $H^{N\nu}$ (9.1) der verschiedenen Nucleonen entwickelt, so entsprechen den Operatoren $V_f$, $V_g$ in dieser Basis Matrizen mit den Elementen

$$(j_1' m_1' n_1' \cdots j_N' m_N' n_N' \mid V^{(\mu\nu)} \mid j_1'' m_1'' n_1'' \cdots j_N'' m_N'' n_N'') \qquad (11.31)$$

Die Untermatrix, die dem Fall entspricht, dass alle Nucleonen im Neutron-Protonzustand sind ($j_\nu' = j_\nu'' = 1/2$ für alle $\nu$), ergibt sich zu[15]:

$$V_f^{(\mu\nu)} = \frac{1}{9} f^2 (\vec{\tau}^{(\mu)} \cdot \vec{\tau}^{(\nu)}) \cdot \left\{ -(\vec{\sigma}^{(\mu)} \cdot \vec{\sigma}^{(\nu)}) + \frac{1}{\mu^2} (\vec{\sigma}^{(\mu)} \cdot \mathrm{grad})(\vec{\sigma}^{(\nu)} \cdot \mathrm{grad}) \right\} \mathfrak{U}(r_{\mu\nu}) \qquad (11.32)$$

$$V_g^{(\mu\nu)} = \frac{1}{9} g^2 (\vec{\tau}^{(\mu)} \cdot \vec{\tau}^{(\nu)}) \left\{ -\frac{1}{\mu^2} (\vec{\sigma}^{(\mu)} \cdot \mathrm{grad})(\vec{\sigma}^{(\nu)} \cdot \mathrm{grad}) \right\} \mathfrak{U}(r_{\mu\nu}) \qquad (11.33)$$

mit:

$$\mathfrak{U}(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\mu r} \qquad (11.34)$$

wo die Paulischen Spinmatrizen $\sigma_k^{(\nu)}$ auf die Quantenzahlen $m_\nu$, und die isotopen Spinmatrizen $\tau_k^{(\nu)}$ auf die Quantenzahlen $n_\nu$ wirken.

Dieses Resultat ist bis auf den Faktor 1/9 identisch mit dem Nucleonwechselwirkungsoperator, den die Methode der schwachen Kopplung liefert[16]. In dem Fall also, dass bei Nucleonwechselwirkungen die höheren Isobaren-Zustände ($j \geqslant 3/2$) unangeregt bleiben, sind die Kernkräfte in der ersten Näherung der starken Kopplung bis auf den Zahlfaktor die gleichen wie in der ersten Näherung der schwachen Kopplung. Es ist indessen zu beachten, dass wir — im Gegensatz zur schwachen Kopplung — nicht berechtigt sind, im Fall $f \neq 0$, $g \neq 0$ das Potential als $V = V_f + V_g$ anzusetzen; der allgemeine Fall würde eine besondere Untersuchung erfordern[17].

Sowohl nach (11.32) wie nach (11.33) wären die Kräfte zwischen einem Proton und einem Neutron in einem $S$-Zustand ($(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) = -3$) auf grosse Distanzen abstossend, während bei stärkerer Annäherung die zunehmende Anregung der Isobarenzustände, wie eingangs bemerkt[3], zu einer Anziehung führen würde.

Es dürfte indessen nicht angezeigt sein, das Deuteronproblem nach dieser Theorie in Angriff zu nehmen, bevor nicht die Frage nach dem Sättigungscharakter der abgeleiteten Kräfte im Fall der schweren Kerne abgeklärt ist[18]. In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, dass das Wechselwirkungspotential (11.32) sich von dem analogen Potential der Vektormesontherie nur durch das Vorzeichen unterscheidet, und dass das Gleiche zwischen dem Potential (11.33) und demjenigen der Pseudoskalartheorie gilt. Wie nun F. Coester mittels der statistischen Methode (Thomas-Fermi-Näherung) gezeigt hat[19]), liefern zwar die ladungssymmetrische Pseudoskalar- und Vektortheorie Kräfte mit Sättigungscharakter; dieser Sachverhalt kann sich indessen infolge des Vorzeichenwechsels ändern.

## VI. Anhang.

### *§ 12. Abschätzung einiger Integrale.*

Um die folgenden Abschätzungen herzuleiten entwickelt man $U_0$ (2.2) als Fourierintegral:

$$U_0(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3 \mathfrak{k}\, V_0(k)\, e^{i(\vec{\mathfrak{k}} \cdot \vec{x})} \tag{12.1}$$
$$d^3\mathfrak{k} = d\mathfrak{k}_1\, d\mathfrak{k}_2\, d\mathfrak{k}_3 \qquad k = |\vec{\mathfrak{k}}|$$

Wegen der Kugelsymmetrie von $U_0$ [vgl. (1.10)] gilt das gleiche für $V_0$ im $\vec{\mathfrak{k}}$-Raum. $U_0$ ist wesentlich $\neq 0$ für $|x| < a$, $V_0$ für $k < 1/a$. Daher gilt

$$\int dX\, U_0 R(\varDelta)\, U_0 = \int d^3\mathfrak{k} \cdot R(-k^2)\, V_0^2(k) = 4\pi \int_0^{1/a} dk \cdot k^2 R(-k^2)\, V_0^2(k)$$

wo $R(\varDelta)$ eine der unten vorkommenden einfachen Funktionen von $\varDelta$ ist. Ersetzt man wegen

$$\int d^3\mathfrak{k}\, V_0^2 = \int dX\, U_0^2 = 1$$

und unter Voraussetzung eines vernünftig glatten Verlaufs, $V_0^2$ durch den Mittelwert $a^3$, so wird

$$\int dX\, U_0 R(\varDelta)\, U_0 \approx a^3 \int_0^{1/a} dk \cdot k^2 R(-k^2) \tag{12.2}$$

Hierdurch berechnet man sich folgende Abschätzungen[20]). Zunächst:

$$\int dX\, U_0 (-\varDelta)^n\, U_0 \approx [a^{-2n}] \qquad \left(n > -\frac{3}{2} \text{ und rational}\right) \tag{12.3}$$

Hiermit steht die Definition des Nucleonradius von Oppenheimer und Schwinger ($a_0$) in Übereinstimmung[21]) — vgl. (2.5)

$$a_0^{-1} = \int dX \int dX' \frac{\delta_a(x)\, \delta(x')}{|x - x'|} = 4\pi \int dX\, \delta_a (-\varDelta)^{-1} \delta_a$$
$$= 4\pi\eta^2 \int dX\, U_0 (-\varDelta)^{-1} U_0 \tag{12.4}$$

Weiter findet man für $a\mu \gg 1$ im Sinne einer Entwicklung nach $(a\mu)^{-1}$

$$\int d X\, U_0 (\mu^2 - \Delta)^n\, U_0 = \mu^{2n} \{1 + [a\,\mu]^{-2} + \cdots\} \approx [\mu^{2n}] \quad (12.5)$$

$(n = \text{beliebig rational})$

Für $a\,\mu \ll 1$ andererseits hat man im Sinne einer Entwicklung nach $(a\,\mu)$:

$$\int dX U_0 (\mu^2 - \Delta)^n U_0 = \int dX\, U_0 (-\Delta)^n\, U_0 \{1 + [a\,\mu] + \cdots\} \approx [a^{-2n}] \quad (12.6)$$

für $n > 0$ rational und $n = -1/2, -1$. Dagegen wird:

$$\int d X\, U_0\, (\mu^2 - \Delta)^{-2}\, U_0 \approx [a^4\, (a\,\mu)^{-1}\,] \text{ für } a\,\mu \ll 1 \quad (12.7)$$

Dies hängt damit zusammen, dass für (12.7) — im Gegensatz zu (12.6) — die in (12.2) auftretende rationale Funktion $k^2 R\,(-k^2)$ den Grad $\leqslant -1$ in $k$ hat.

## § 13. *Eigenschaften der orthogonalen Matrix $S$* (Zu §§ 4,6).

Die in (4.6) zugrunde gelegte Abhängigkeit der orthogonalen Matrix $S$ von den Eulerschen Winkeln $(\Theta \Phi \Psi)$ lautet:

$$S = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \cos\Phi \cdot \cos\Theta & \sin\Phi \\ -\sin\Psi & \cos\Psi \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cos\Phi \cdot \cos\Theta & \sin\Phi \\ \cos\Psi & \sin\Psi \end{vmatrix} & \cos\Phi \cdot \sin\Theta \\ \begin{vmatrix} \sin\Phi \cdot \cos\Theta & \cos\Phi \\ \sin\Psi & \cos\Psi \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \sin\Phi \cdot \cos\Theta & \cos\Phi \\ -\cos\Psi & \sin\Psi \end{vmatrix} & \sin\Phi \cdot \sin\Theta \\ -\cos\Psi \cdot \sin\Theta & -\sin\Psi \cdot \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \quad (13.1)$$

Die Variablenbereiche sind: $\Phi = (0{,}2\,\pi)$, $\Psi = (0{,}2\,\pi)$, $\Theta = (0{,}\pi)$. Aus (13.1) folgt:

$$S_{ir} = S_{js} S_{kt} - S_{ks} S_{jt} \quad \begin{Bmatrix} (ijk) \\ (rst) \end{Bmatrix} \text{ zykl. Perm. von } (1, 2, 3) \quad (13.2)$$

*Ableitungen*: Definiert man die antimetrischen Matrizen $A_\Phi A_\Psi A_\Theta$ durch:

$$A_\alpha = \frac{\partial S'}{\partial \alpha} S = -S' \frac{\partial S}{\partial \alpha} \;(S' = S^{-1} = \text{Transponierte von } S) \quad (13.3)$$

so gilt:

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha} = A_\alpha S' \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -S A_\alpha \quad (13.4)$$

Wie alle antimetrischen Matrizen lassen sich die $A_\alpha$ als Linearkombinationen der

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.5)$$

den infinitesimalen orthogonalen Matrizen, darstellen. Man findet:

$$\left.\begin{aligned} A_\Phi &= \sin\Theta\,(A_1\cdot\cos\Psi + A_2\cdot\sin\Psi) - A_3\cdot\cos\Theta \\ A_\Theta &= A_1\cdot\sin\Psi - A_2\cdot\cos\Psi \\ A_\psi &= A_3 \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

Wir benötigen die Umkehrung:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_\Theta \sin\Psi + \frac{\cos\Psi}{\sin\Theta}(A_\Phi + \cos\Theta\cdot A_\psi) \\ A_2 &= -A_\Theta\cdot\cos\Psi + \frac{\sin\Psi}{\sin\Theta}(A_\Phi + \cos\Theta\cdot A_\psi) \\ A_3 &= A_\psi \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Lässt man die Operatoren $P_1\,P_2\,P_3$ (4.8) auf die $S_{\varrho\sigma}$ — als Funktionen von $(\Theta\Phi\Psi)$ aufgefasst—wirken, was $P_k(S_{\varrho\sigma})$ geschrieben sei, so erhält man auf Grund von (4.7, 8) und (13.4, 7):

$$P_k(S) = i\,(S\,A_k),\ \text{d.h.}\ P_k(S_{\varrho\sigma}) = i\,(S\,A_k)_{\varrho\sigma} \tag{13.8}$$

Die Ausrechnung der rechten Seite liefert:

$$P_j(S_{\varrho j}) = 0 \qquad P_j(S_{\varrho k}) = i\,S_{\varrho l} \qquad P_j(S_{\varrho l}) = -i\,S_{\varrho k} \tag{13.9}$$
$$(jkl = \text{zykl. Perm. von } 1, 2, 3)$$

## § 14. *Rechnungen zu §§ 5, 8.*

Zur Berechnung von $A^{(1)}\,A^{(2)}\,A^{(1g)}\,A^{(2g)}$ setzen wir (4.19) in (5.11) und (5.13) ein, sowie (8.6) in (8.8) und (8.9). Das ergibt:

$$\left.\begin{matrix} A^{(1)}_{k\varrho,l\sigma} \\ A^{(1g)}_{k\varrho,l\sigma} \end{matrix}\right\} = \sum_{ij} \left\{\begin{matrix} a_{ij} \\ a^{(g)}_{ij} \end{matrix}\right\} \sum_\tau (S_{k\tau}S_{i\varrho} - \delta_{ki}\,\delta_{\tau\varrho})\,(S_{l\tau}S_{j\sigma} - \delta_{lj}\,\delta_{\tau\sigma}) \tag{14.1}$$

mit:

$$a_{ij} = \frac{1}{4\,\overline{B}_0^2}\left\{\sum_{ls}\sum_{l's'} \overline{B}_{0i,sl}\,\overline{A}_{sl,s'l'}\,\overline{B}_{s'l',0j} + \delta_{ij}\,\overline{A}_0\,\overline{B}_0^2 - \right.$$
$$\left. - \overline{B}_0 \sum_{ls} (\overline{B}_{0i,sl}\,\overline{A}_{sl,0j} + \overline{A}_{0i,sl}\,\overline{B}_{sl,0j})\right\} \tag{14.2}$$

$$a^{(g)}_{ij} = \frac{1}{4\,A_0^2}\left\{\sum_{ls}\sum_{l's'} \overline{A}_{0i,sl}\,\overline{B}_{sl,s'l'}\,\overline{A}_{s'l',0j} + \delta_{ij}\,\overline{B}_0\,\overline{A}_0^2 - \right.$$
$$\left. - \overline{A}_0 \sum_{ls} (\overline{A}_{0i,sl}\,\overline{B}_{sl,0j} + \overline{B}_{0i,sl}\,\overline{A}_{sl,0j})\right\} \tag{14.3}$$

und:

$$\left.\begin{matrix} \Lambda^{(2)}_{k\varrho,l\sigma} \\ \Lambda^{(2g)}_{k\varrho,l\sigma} \end{matrix}\right\} = \sum_i \left\{\begin{matrix} b_{ki} \\ b^{(g)}_{ki} \end{matrix}\right\} (S_{l\varrho}\, S_{i\sigma} - \delta_{li}\, \delta_{\varrho\sigma}) + \sum_i \left\{\begin{matrix} b_{li} \\ b^{(g)}_{li} \end{matrix}\right\} (S_{k\sigma} S_{i\varrho} - \delta_{ki} \delta_{\sigma\varrho}) \quad (14.4)$$

mit:

$$b_{ji} = \frac{1}{2\,B_0} \left\{ \sum_{ls} \bar{A}_{0j,sl}\, \bar{B}_{sl,0i} - \delta_{ji}\, \bar{A}_0\, \bar{B}_0 \right\} \quad (14.5)$$

$$b^{(g)}_{ji} = \frac{1}{2\,A_0} \left\{ \sum_{ls} \bar{B}_{0j,sl}\, \bar{A}_{sl,0i} - \delta_{ji}\, \bar{A}_0\, \bar{B}_0 \right\} \quad (14.6)$$

Nun gilt:

$$\sum_{tj} \bar{A}_{rk,tj}\, \bar{B}_{tj,sl} = \delta_{kl}\, I_{rs} \qquad I_{rs} = \int d\,X\, U_r\, (\mu^2 - \Delta)^{-1}\, U_s \quad (14.7)$$

$$\sum_{sl} \sum_{s'l'} \bar{B}_{0j,sl}\, \bar{A}_{sl,s'l'}\, \bar{B}_{s'l',0k} = \delta_{jk} \left\{ \frac{1}{3\,\mu^2}\, I_{00} + \frac{2}{3} \int d\,X\, U_0\, (\mu^2 - \Delta)^{-2}\, U_0 \right\} \quad (14.8)$$

$$\sum_{sl} \sum_{s'l'} \bar{A}_{0j,sl}\, \bar{B}_{sl,s'l'}\, \bar{A}_{s'l',0k} = \delta_{jk} \left\{ \frac{2}{3}\, I_{00} + \frac{\mu^2}{3} \int d\,X\, U_0\, (\mu^2 - \Delta)^{-2}\, U_0 \right\} \quad (14.9)$$

wie man durch Übergang von den Matrixprodukten zu den entsprechenden Operatorprodukten gemäss (2.10, 11) berechnet. — Aus (14.1, 2, 4, 5, 7, 8) einerseits und (14.1, 1, 3, 4, 6, 7, 9) andererseits ergibt sich dann:

$$\left.\begin{matrix} \Lambda^{(1)}_{k\varrho,l\sigma} - \Lambda^{(2)}_{k\varrho,l\sigma} \\ \Lambda^{(1g)}_{k\varrho,l\sigma} - \Lambda^{(2g)}_{k\varrho,l\sigma} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \Lambda \\ \Lambda^{(g)} \end{matrix}\right\} (S_{k\sigma}\, S_{l\varrho} - \delta_{kl}\, \delta_{\varrho\sigma}) \quad (14.10)$$

wobei die Konstanten $\Lambda$, $\Lambda^{(g)}$ durch die Gleichungen

$$(\bar{A}_0 - 2\,\Lambda)\, B_0^2 = \frac{1}{3\,\mu^2}\, I_{00} + \frac{2}{3} \int d\,X\, U_0\, (\mu^2 - \Delta)^{-2}\, U_0 \quad (14.11)$$

$$(\bar{B}_0 - 2\,\Lambda^{(g)})\, \bar{A}_0^2 = \frac{2}{3}\, I_{00} + \frac{\mu^2}{3} \int d\,X\, U_0\, (\mu^2 - \Delta)^{-2}\, U_0 \quad (14.12)$$

bestimmt sind.

Die mitgeteilte Untersuchung habe ich auf Anregung von Herrn Professor Dr. GREGOR WENTZEL unternommen. Für seine stete Bereitschaft zu Diskussion und Ratschlägen, sowie für das fördernde Wohlwollen, welches er mir dauernd entgegenbrachte, möchte ich an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer aufs herzlichste danken.

University of Chicago, Department of Physics.

### Anmerkungen.

[1]) Eine Übersicht über Rechnungen und Literatur bis Ende 1946 findet sich in §§ 1 und 4 des Artikels von G. WENTZEL, Rev. Mod. Phys., Vol. 19, Nr. 1 (1947).

[2]) Vgl. N. KEMMER, Proc. Roy. Soc. **166**, 127 (1938).

[3]) Vgl. M. FIERZ und G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta, **17**, 215 und 252 (1944); K. BLEULER, H.P.A. **17**, 405 (1944) und **18**, 317 (1945); G. WENTZEL, H.P.A. **18**, 430 (1945).

[4]) G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **16**, 551 (1943).

[5]) Vgl. G. WENTZEL, Quantentheorie der Wellenfelder (Deuticke, 1943), Formeln (12.5), (16.5).

[6]) Vgl. G. WENTZEL, Quantentheorie der Wellenfelder § 12, wo der entsprechende Übergang für Operatorfelder ausgeführt ist.

[7]) Vgl. N. KEMMER, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34**, 354 (1938); auch G. WENTZEL, Quantentheorie der Wellenfelder § 10.

[8]) Im folgenden gelten stets folgende Summationsregeln: In $\sum_r \sum_s$ laufen $r, s$ von 0 bis $\infty$. In $\sum_r' \sum_s'$ laufen $r, s$ von 1 bis $\infty$. Anderseits laufen die Indices ($\varrho\,\sigma\,\tau$, $i\,j\,k\,l\,m\,n$) stets von 1 bis 3.

[9]) In der in Fussnote [4]) zitierten Arbeit über das Vektorfeld ist die Konstante, die unserem $\overline{B}_0$ analog ist, mit $C$ bezeichnet.

[10]) In § 3 und § 6 deuten wir das direkte Produkt zweier Matrizen durch $\times$ an, um es vom Matrixprodukt zu unterscheiden.

[11]) Vgl. die in Fussnote [4]) zitierte Arbeit, p. 568.

[12]) Unsere Matrix $\mathfrak{U}$ ist dort mit $S$ bezeichnet.

[13]) Vgl. § 12 des in Fussnote [5]) zitierten Buches, im Vakuum stimmen Vektor- und Pseudovektorfeld überein.

[14]) Vgl. zu den Ausführungen in diesem Paragraphen den § 10 der in Fussnote[4]) zitierten Arbeit.

[15]) Vgl. Formeln (15.9) bis (15.13) der in Fussnote [4]) zitierten Arbeit.

[16]) Vgl. Formel (69b) der in Fussnote [2]) zitierten Arbeit. Dort ist beim Term $(f_c^2 \sigma_N, \sigma_P)$ versehentlich der Faktor $k^2$ ausgelassen. Kemmers Konstanten hängen mit unseren wie folgt zusammen: $f_c = f\sqrt{2}/\mu\sqrt{\mu}$, $g_c = g\sqrt{2\,\mu}/\mu$.

[17]) Vgl. §§ 11—13 der in Fussnote [4]) zitierten Arbeit.

[18]) Herr E. TRUCCO hat hier eine Untersuchung dieser Frage vorgenommen.

[19]) Vgl. F. COESTER, Helv. Phys. Acta **17**, 35 (1944).

[20]) Im folgenden heisst [.....]: von der Grössenordnung.

[21]) Phys. Rev. **60**, 150 (1941).