Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 23 (1950)

Heft: V

Artikel: Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen

Autor: Bleuler, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112124

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen

von **K. Bleuler.**

(10. VI. 1950.)

Summary: Gupta has introduced an alternative method of quantization for the Maxwell field which differs from the usual one in that the scalar part of the field is quantized by means of the indefinite metric of Dirac. It is shown that this method can be extended into a general and consistent theory, including the case of interaction with electrons. Some of the advantages of the new method are the following: The well known difficulty of normalizing a state vector satisfying the Lorentz-condition no longer occurs. For processes taking place within long time intervals the photon-vacuum can consistently be stated in the form $A_\mu^+(x)\psi_0 = 0$, a condition which could not be fulfilled in the ordinary theory. Gauge invariance is exhibited in a peculiar direct way. It is shown, by a canonical transformation, that the theory is equivalent with the reduced theory where the longitudinal field is eliminated, and replaced by the static Coulomb-interaction. All physical results are therefore identical with those of the ordinary theory. Lorentz invariance is exhibited in a simple way.

I. Einleitung.

In der Quantenelektrodynamik hat es sich als sehr zweckmässig erwiesen mit allen vier Komponenten des Vektorpotentials $A_\mu(x)$ in symmetrischer Weise zu rechnen; d. h. man vermeidet die Elimination des longitudinalen und skalaren Teils mit der entsprechenden Ersetzung durch das Coulombpotential („reduzierte Theorie"). Dann hat man aber eine Nebenbedingung (Lorentzbedingung) zu verwenden; nach FERMI[1]) schreibt man im Falle ohne Wechselwirkung:

$$\Omega(x)\,\psi \equiv \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\,\psi = 0 \tag{1.1}$$

(x steht für den allgemeinen Raumzeitpunkt $(x_1, \ldots x_4)$; über gleiche Indizes $\mu = 1, \ldots 4$ soll stets summiert werden; ψ bedeutet den zeitunabhängigen Zustandsvektor). Damit stösst man aber auf eine erste Schwierigkeit: Mit der üblichen Definition der Operatoren A_μ enthält der Zustand ψ, der (1.1) erfüllt, eine unendliche Anzahl von skalaren und longitudinalen Photonen[2]). Abgesehen von der unphysikalischen Tatsache, dass diese Photonen auch im Vakuum vorhanden sein müssen, führt dies auch zu mathematischen

Schwierigkeiten: ψ ist nicht normierbar, d. h. (1.1) ist streng genommen gar nicht erfüllbar. BELINFANTE hat auch gezeigt, dass dieser Umstand zu Mehrdeutigkeiten im Resultat führt[2]).

Weiter wirkt es sehr störend, dass, trotz der symmetrischen Form der Theorie, das Vakuum nur durch Abspaltung des transversalen Teils definiert werden kann. Zwar hat SCHWINGER[3]) den Vorschlag gemacht, die folgende Vakuumdefinition einzuführen:

$$A_\mu^+(x)\,\psi_0 = 0\,. \tag{1.2}$$

(A^+ bedeutet den Anteil positiver Frequenz.)

Formal wäre diese Bedingung lorentzinvariant und stellte in einfachster Weise denjenigen Zustand dar, für welchen der Erwartungswert der Energie zu einem Minimum wird (ohne die Nebenbedingung zu benützen). In der bisherigen Theorie ist aber (1.2) unerfüllbar: Wenn A_4 nach der gewöhnlichen Methode quantisiert wird, ist A_4^+ der Emissionsoperator und es gibt offenbar keinen Zustand, bei dem die Emission eines skalaren Photons verhindert werden kann. Ausserdem widerspricht (1.2) der Lorentzbedingung. Trotz dieser Widersprüche hat es sich gezeigt, dass die formale Benützung von (1.2) zur Berechnung von Vakuum-Erwartungswerten (jedenfalls für Prozesse in langen Zeitintervallen) in einfachster Weise zu richtigen Resultaten führt*). Die „Richtigkeit" der Resultate beweist man eben entweder dadurch, dass sie identisch mit den Resultaten der reduzierten Theorie (longitudinales und skalares Feld eliminiert) sind[4]), oder durch die Feststellung, dass die so erhaltenen Vakuum-Erwartungswerte dieselben sind, wie wenn das Vakuum durch die Abwesenheit der transversalen Photonen allein definiert ist[5]). Beidemal muss man sich im wesentlichen auf die reduzierte, nicht invariant formulierte Theorie als Kriterium für „Richtigkeit" beziehen.

Diese höchst merkwürdige Situation legt es nahe, zu vermuten, dass es eine widerspruchsfreie Theorie geben muss, die von vorneherein die 4 Photonenarten symmetrisch behandelt und bei der das Vakuum durch (1.2) definiert ist.

Ein Vorschlag in dieser Richtung wurde kürzlich von GUPTA[6]) für den Fall ohne Wechselwirkung gemacht, und es soll im folgenden gezeigt werden, dass dieser Vorschlag in eine allgemeine und widerspruchsfreie Theorie ausgebaut werden kann. Das wesentliche der Guptaschen Idee ist folgendes: Zunächst kommt der imaginäre Charakter von A_4 im entsprechenden Operator in anderer Weise zum Ausdruck: an Stelle des Faktors i (imaginäre Einheit)

*) Vgl. dazu auch Abschnitt 2.

tritt der von DIRAC und PAULI[7]) in der sog. indefiniten Metrik eingeführte Operator η; dadurch wird erreicht, dass auch A_4 durch einen Absorptionsoperator dargestellt wird, d. h. (1.2) wird erfüllbar und bestimmt einen Zustand in welchem gar keine Photonen vorhanden sind. Anderseits wird die neue Lorentzbedingung so formuliert, dass sie mit der Vakuumdefinition (1.2) verträglich wird. Dadurch werden zugleich die Normierungsschwierigkeiten von ψ behoben. Da nun der Operator η in der Normierung und allgemein im skalaren Produkt zweier Zustandsvektoren auftritt, wird ein bestimmter physikalischer Sachverhalt nicht mehr durch eine eindeutige Funktion ψ dargestellt: es sind vielmehr immer gewisse Zusätze möglich, welche im skalaren Produkt keinen Beitrag liefern. Dies hat zur Folge, dass z. B. die Erwartungswerte des Vektorpotentials bis zu einem gewissen Grade unbestimmt sind, und zwar gerade innerhalb des Rahmens einer Eichtransformation. Eichinvariante Grössen wie z. B. die Feldstärken sind eindeutig. Interpretationsschwierigkeiten bestehen nicht, da das Auftreten von negativen Wahrscheinlichkeiten durch die neue Lorentzbedingung verhindert wird.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, dass man in dieser Weise eine einheitliche Theorie des Maxwellschen Feldes in Wechselwirkung mit Elektronen formulieren kann: In Abschnitt 2 wird zunächst die Guptasche Theorie des elektromagnetischen Feldes allein in etwas anderer Form dargestellt; die Lorentzinvarianz kann dadurch leicht eingesehen werden. Abschnitt 3 bringt die Formulierung der Wechselwirkung mit der dazugehörigen Erweiterung der neuen Lorentzbedingung. Der Anschluss an die klassische Theorie wird durch das entsprechende Verhalten der Erwartungswerte sichergestellt. In Ziffer 4 wird mit Hilfe der Elimination des longitudinalen und skalaren Teils gezeigt, dass man die bekannte reduzierte Theorie erhält; d. h. in physikalischer Hinsicht ist die neue Methode mit der üblichen Theorie völlig äquivalent. Im letzten Abschnitt wird das Vakuum zunächst in der alten Form definiert (keine transversalen Photonen): Es zeigt sich dann, dass man damit bei geeigneter Eichung automatisch auf eine Bedingung der Form (1.2) geführt wird. Im Falle des Vorhandenseins von Ladungen erhält man allerdings einen Zusatzterm, der im Rahmen der üblichen Theorie bereits von JAUCH und COESTER[8]) angegeben worden ist. Man erhält damit das elektrostatische Feld, welches in diesem Falle auch im Photonenvakuum vorhanden sein muss. Ebenso ergibt sich für Prozesse, die sich in einem endlichen Zeitintervall abspielen, ein Beitrag, der in ein-

fachen Fällen die momentane Wirkung des Coulombpotentials darstellt. Er ergibt sich auch aus dem Vergleich mit der „reduzierten" Theorie. Für unendliche Zeitintervalle dagegen verschwindet dieser Beitrag, so dass die Vakuumbedingung die Form (1.2) erhält.

II. Die Quantisierung des Maxwellschen Feldes.

A. *Die Definition der Operatoren und der Erwartungswerte.*

Die Feldoperatoren A_μ sollen die bekannten Relationen erfüllen (mit $\hbar = c = 1$):

$$\Box A_\mu(x) = 0\,, \tag{2.1}$$

$$i\,[A_\mu(x),\ A_\nu(y)] = \delta_{\mu\nu} D(x-y)\,;\ ^{*)} \tag{2.2}$$

dagegen sollen alle vier Komponenten hermitisch sein:

$$A_\mu = A_\mu^*\,, \quad \mu = 1\,,..4\,;\ ^{**)} \tag{2.3}$$

d. h. in der gewohnten expliziten Darstellung:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{1}{2\,v\,|\vec{k}|}}\,(a_{\mu,\vec{k}}\,e^{ikx} + a^*_{\mu,\vec{k}}\,e^{-ikx}) \\ &\equiv A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x)\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit

$$[a_{\mu,\vec{k}},\ a^*_{\nu,\vec{e}}] = \delta_{\mu\nu}\,\delta_{\vec{k}\vec{e}}$$

und

$$a^*_{\mu,\vec{k}}\,a_{\mu,\vec{k}} = N_{\mu,\vec{k}} \quad \text{für} \quad \mu = 1\,,..4\,.$$

($\vec{k}$ bedeutet den räumlichen Teil des Vierervektors k; $k_\mu k_\mu = 0$. A_μ^+ (resp. A_μ^-) stellt den Anteil positiver (negativer) Frequenz dar, d. h. die Terme $\sim e^{ikx}$ ($\sim e^{-ikx}$).) Damit wird auch A_4^+ ein Absorptionsoperator, d. h. (1.2) ist erfüllbar. In der üblichen Theorie wird aber A_4 durch Multiplikation mit i antihermitisch gemacht; um (2.2) zu erfüllen müssen dann noch a_4 und a_4^* vertauscht werden. Aus diesem Grunde wird dort A_4^+ ein Emissionsoperator. An Stelle dieser Methode verwendet man nun das folgende Verfahren: Der Operator η sei durch die folgenden Beziehungen definiert:

$$\begin{aligned} \eta\,A_r(x) &= A_r(x)\,\eta\,, \quad r = 1, 2, 3\,, \\ \eta\,A_4(x) &= -\,A_4(x)\,\eta\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

---

*) Im Gegensatz zu der Arbeit von SCHWINGER (l. c.) verwenden wir hier das übliche Vorzeichen der invarianten D-Funktion.

**) Der Stern soll hier stets hermitisch konjugiert bedeuten.

d. h. A_4 wird erst durch den Vorzeichenwechsel in diesen Relationen ausgezeichnet. Es folgt zunächst, dass η^2 mit allen Komponenten kommutiert; man kann deshalb mit zweckmässiger Normierung schreiben

$$\eta^2 = I\,, \qquad \text{ebenso} \qquad \eta = \eta^*, \tag{2.6}$$

d. h. η wird hermitisch gewählt. Die explizite Darstellung lautet in vereinfachter Bezeichnungsweise:

$$\eta_{N_\mu M_\mu} = (-1)^{N_4} \prod_\mu \delta_{N_\mu M_\mu}. \tag{2.7}$$

Damit wird ηA_r hermitisch, während ηA_4 antihermitisch wird; man schreibt nun die Erwartungswerte $\bar{A}$ in der neuen Form:

$$\bar{A}_\mu = (\psi^*, \eta A_\mu \psi) \equiv (\psi^\dagger, A_\mu \psi)\,, \tag{2.8}$$

wobei der adjungierte Zustand $\psi^\dagger$ durch

$$\psi^\dagger = \psi^* \eta \tag{2.9}$$

definiert wurde. $\bar{A}_\mu$ erhält dadurch die richtigen Realitätseigenschaften, insbesondere wird $i\bar{A}_4$ reell. Dementsprechend heisst jetzt die Norm N des Zustandes ψ:

$$N = (\psi^\dagger, \psi)\,. \tag{2.10}$$

Diese Grösse ist zunächst nicht positiv definit; es zeigt sich aber, dass alle Zustände, welche die Lorentzbedingung erfüllen $N \geqq O$ ergeben.

B. *Die Lorentzbedingung und die Normierung.*

Nach dem Vorschlage von Gupta schreibe man für die Lorentzbedingung an Stelle von (1.1):

$$\Omega^+ \psi \equiv \frac{\partial A_\mu^+}{\partial x_\mu} \psi = 0.\ ^{*)} \tag{2.11}$$

Diese Bedingung ist bei der angegebenen Wahl der Operatoren A_μ schwächer als (1.1); dennoch folgt daraus, dass der Erwartungs-

*) In der üblichen Form der Quantisierung ist diese Bedingung mit (1.1) äquivalent; mit einer Darstellung analog (2.13) verifiziert man z. B. leicht, dass in diesem Falle (1.2) und (2.11) dieselben (nicht normierbaren) Zustandsfunktionen bestimmen. Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Dr. R. Jost in Princeton.

wert der Viererdivergenz verschwindet: Die hermitisch konjugierte Gleichung lautet wegen $A_\mu^{+*} = A_\mu^-$ (vgl. 2.4)

$$\psi^* \left(\sum_r \frac{\partial A_r^-}{\partial x_r} - \frac{\partial A_4^-}{\partial x_4} \right) = 0;$$

bei Multiplikation mit η von rechts

$$\psi^\dagger \left(\frac{\partial A_\mu^-}{\partial x_\mu} \right) \equiv \psi^\dagger \, \Omega^- = 0;$$

d. h. zusammen mit (2.11) ($\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$)

$$\left(\psi^\dagger, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \psi \right) = 0. \tag{2.12}$$

Damit wird zusammen mit (2.1) der Anschluss an die klassische Theorie hergestellt.

Um nun einzusehen, dass (2.11) erfüllbar und mit der Vakuumbedingung (1.2) verträglich ist, verwenden wir für den räumlichen Teil $\vec{A}$ des Feldes die bekannte Darstellung:

$$\vec{A}(x) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{\vec{k}} \vec{e}_m(\vec{k}) \sqrt{\frac{1}{2v|\vec{k}|}} \left(a_{m,\vec{k}} \, e^{ikx} + a^*_{m,\vec{k}} \, e^{-ikx} \right) \tag{2.13}$$

mit

$$(\vec{e}_m, \vec{e}_n) = \delta_{mn},$$

$$(\vec{e}_1, \vec{k}) = (e_2, \vec{k}) = 0, \quad (\vec{e}_3, \vec{k}) = |\vec{k}|,$$

wobei die a_m wie bei (2.4) definiert sind und A_4 unverändert bleibt. N_3 und N_4 stellen dann die Anzahlen der longitudinalen und der skalaren Photonen dar. (2.11) ergibt nun für jeden Vektor $\vec{k}$:

$$(a_{3,\vec{k}} + i \, a_{4,\vec{k}}) \, \psi = 0. \; ^{*)} \tag{2.14}$$

Schreiben wir zur Abkürzung (unter Weglassung des Indexes $\vec{k}$) für eine Zustandsfunktion $\psi(N_3, N_4)$, die genau $\overline{N}_3$ longitudinale und $\overline{N}_4$ skalare Photonen enthält $\varphi(\overline{N}_3, \overline{N}_4)$, d. h.

$$\varphi(\overline{N}_3 \, \overline{N}_4) = \delta_{\overline{N}_3 N_3} \, \delta_{\overline{N}_4 N_4}, \tag{2.15}$$

*) An dieser Stelle ist leicht einzusehen, dass (1.1) und (2.11) nun nicht mehr äquivalent sind: Aus (1.1) würde neben (2.14) noch eine zweite Bedingung mit Emissionsoperatoren folgen, die unerfüllbar ist.

so wird (2.14) durch die folgenden Zustände ψ^n erfüllt:

$$\begin{aligned}
\psi^0 &= f^0(N_1 N_2)\,\varphi(0\,0) \\
\psi^1 &= f^1\{\varphi(1\,0) + i\,\varphi(0\,1)\} \\
\psi^2 &= f^2\{\varphi(2\,0) + i\sqrt{2}\,\varphi(1\,1) - \varphi(0\,2)\} \\
&\cdots\cdots \\
\psi^n &= f^n\left\{\varphi(n\,0)\cdots + (i)^r\sqrt{\binom{n}{r}}\,\varphi(n-r, r)\cdots + (i)^n\,\varphi(0\,n)\right\} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dabei bedeuten alle f^n willkürliche Funktionen von N_1 und N_2. Den allgemeinen Zustand ψ, welcher (2.14) befriedigt, erhält man durch die lineare Verbindung:

$$\psi = \sum_n c_n\,\psi^n\,. \tag{2.17}$$

Für die Normierung ist nun zu beachten (vgl. (2.7 und (2.10)), dass ψ^0 eine positive Norm besitzt:

$$(\psi^{0\dagger}, \psi^0) = \sum_{N_1 N_2} f^{0*} f^0 > 0\,, \tag{2.18}$$

während alle anderen Normen und skalaren Produkte verschwinden:

$$(\psi^{n\dagger}, \psi^m) = 0 \qquad \text{für } n \neq 0 \text{ oder } m \neq 0 \tag{2.19}$$

(Man beachte eine einfache Eigenschaft der Binomialkoëffizienten $\binom{n}{r}$). Daraus folgt zunächst, dass auch der allgemeine Zustand (2.17) eine nicht negative Norm besitzt; sie verschwindet für $c_0 = 0$. Man verlangt nun:

$$(\psi^\dagger, \psi) = 1\,. \tag{2.20}$$

Dies liefert $c_0 \neq 0$ und wird erfüllt durch

$$\sum_{N_1 N_2} g^{0*} g^0 = 1\,, \quad \text{mit } g^0 = c_0 f^0. \tag{2.21}$$

Die c_n für $n > 0$ bleiben dabei willkürlich.

Die Funktionen $g^0(N_1 N_2)$ werden deshalb im üblichen Sinne als Wahrscheinlichkeitsamplituden von N_1 resp. N_2 transversalen Photonen interpretiert, während für die physikalisch nicht beobachtbaren longitudinalen und skalaren Photonen keine Vorschrift besteht. Die allgemeine Wahrscheinlichkeitsaussage ist durch

$$w = \sum_{N_1 N_2} g_1^{0*}\, g_2^0$$

gegeben, wenn g_1^0 und g_2^0 die entsprechenden Anteile zweier Zu-

stände ψ_1 und ψ_2 bedeuten. Diese Grösse kann nun wegen (2.18,19) in der einfachen Form

$$w = (\psi_1^\dagger, \psi_2) \tag{2.22}$$

geschrieben werden.

Es ist für diese Theorie charakteristisch, dass nur Zustandsfunktionen ψ, welche die Lorentzbedingung (2.11) erfüllen, in der angegebenen Weise physikalisch interpretiert werden. Weiter folgt aus dieser Definition, dass eine vorgelegte Zustandsfunktion (sie muss die Form (2.17) besitzen) ihre physikalische Bedeutung nicht ändert, wenn die Funktionen $c_n f^n (n > 0)$ verschieden gewählt werden. Andèrseits kann man diese „Beimischungen" nicht weglassen, da sie im Falle der Wechselwirkung mit Elektronen von selbst in der Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung auftreten werden, wenn der Anfangszustand mit $c_n = 0$ (für $n > 0$) gewählt wurde. Die Bedeutung dieser willkürlichen Zusätze liegt in der Möglichkeit, die Potentiale in beliebiger Weise zu eichen. Dies soll an zwei einfachen Beispielen illustriert werden:

Man berechne die Erwartungswerte $\overline{A}_\mu$ im Zustande

$$\psi = \psi^0 + c_1 \psi^1$$

als Funktion von c^1. (ψ^1 soll sich auf einen einzigen Wellenzahlvektor $\vec{k}$ beziehen.) Mit Hilfe von (2.13) ergibt sich dann

$$\overline{A}_\mu = (\psi^{0\dagger}, A_\mu \psi^0) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Lambda$$

mit

$$\Lambda = c_1 g_{01} e^{ikx} + c_1^* g_{01}^* e^{-ikx},$$

wobei die Konstante g_{01} von $\vec{k}$, $c_0 f^0$ und f^1 abhängt. Auf diese Weise lässt sich jede beliebige Umeichung erreichen, welche

$$\Box \Lambda = 0$$

erfüllt. Man sieht daraus, dass die Feldstärken eindeutig bleiben. Im allgemeinen werden nur eichinvariante Grössen R (Energie, Impuls usw.) eindeutige Erwartungswerte haben:

$$\overline{R} \equiv (\psi^\dagger, R\psi) = (\psi^{0\dagger}, R\psi^0).$$

Ein typisches Beispiel einer nicht eichinvarianten und deshalb nicht eindeutigen Grösse ist auch der Operator $P\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}$. (P bedeutet die zeitliche Ordnung des Produktes.) Der Vakuum-

erwartungswert kommt z. B. bei der Berechnung von Stössen zwischen zwei Elektronen vor:

$$U = -\frac{1}{2} \int\int_{-\infty}^{+\infty} P\{j_\mu(x)\, j_\nu(y)\} \langle P\{A_\mu(x)\, A_\nu(y)\}\rangle_0 \, d^4x\, d^4y\,. \quad (2.23)$$

Verwendet man dabei für den Vakuumzustand $\psi = \psi_0 + c_1\, \psi^1$ (vgl. 2.24), so werden die von c_1 abhängigen Zusätze durch die Bedingung für den Viererstrom

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

gerade fortgehoben; d. h. das Resultat bleibt eindeutig.

Aus (2.16) sieht man ohne weiteres die Verträglichkeit der Lorentzbedingung (2.11) und der Normierung (2.20) mit der Vakuumdefinition (1.1). Man erhält jetzt den Zustand, in welchem gar keine Photonen vorhanden sind:

$$\psi_0 = \prod_\mu \delta_{N_\mu, 0}\,, \quad (2.24)$$

d. h. $c_n = 0$ für $n > 0$, $g_0^0 = \delta_{N_1 0}\delta_{N_2 0}$. Verwendet man aber die übliche Vakuumbedingung

$$\vec{\mathfrak{A}}^+(x)\, \psi_0 = 0\,, \quad (2.25)$$

wobei $\vec{\mathfrak{A}}$ den transversalen Teil von $\vec{A}$ darstellt (d. h. die beiden Terme $m = 1$ und $m = 2$ in (2.13)), so erhält man einen Zustand, der sich von (2.24) nur um bestimmte „Beimischungen" der Form (2.17) unterscheidet; d. h. die beiden Vakuumdefinitionen sind physikalisch äquivalent.

C. *Die Lorentzinvarianz.*

Die Lorentzinvarianz des angegebenen Quantisierungsverfahrens kann mit den üblichen Methoden eingesehen werden; es ergeben sich lediglich einige Unterschiede in den Realitätseigenschaften. Die vorgelegte Transformation sei

$$x'_\mu(x) = a_{\mu\nu}\, x_\nu\,. \quad (2.26)$$

Bildet man aus den Operatoren A_μ die neuen Grössen

$$A'_\mu(x') = a_{\mu\nu}\, A_\nu\big(x\,(x')\big) \quad (2.27)$$

($x(x')$ bedeutet die zu (2.26) inverse Transformation), so erfüllen

diese wieder dieselben Relationen (2.1, 2.2); sie können durch eine Ähnlichkeitstransformation aus den alten Grössen gewonnen werden:

$$A'_\mu(x) = S^{-1} A_\mu(x) S\,. \tag{2.28}$$

Für infinitesimale Transformationen

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\,, \qquad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu} \tag{2.29}$$

lässt sich S explizit angeben:

$$S = I + \varepsilon_{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu}\,.\ ^{*)} \tag{2.30}$$

Dabei bedeutet $i(\Theta_{\mu\nu} - \Theta_{\nu\mu})$ den Drehimpulsoperator;

$$\Theta_{\mu\nu}(x_4) = -\int\limits_{x_4 = \text{const}} \left\{ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} A_\nu + x_\mu \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_4} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \delta_{4\nu} \right) \right\} d^3 x. \tag{2.31}$$

Die Integration erstreckt sich über die Fläche $x_4 = \text{const.}$; wegen der Drehimpulserhaltung wird aber $\Theta_{\mu\nu} - \Theta_{\nu\mu}$ von x_4 unabhängig. Aus (2.2) erhält man die V.-R.:

$$\left[\frac{\partial A_\mu(\vec{x}, x_4)}{\partial x_4}\,,\ A_\nu(\vec{y}, x_4) \right] = \delta(\vec{x} - \vec{y})\, \delta_{\mu\nu}\,. \tag{2.32}$$

Damit verifiziert man leicht, dass nun aus (2.28) mit (2.30) und (2.31) folgt

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu(x) + \varepsilon_{\sigma\lambda} x_\sigma \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\lambda}\,.$$

Dies stimmt mit (2.27) für infinitesimale Transformationen überein. Es ist jetzt aber zu beachten, dass S wegen (2.3) und dem imaginären Charakter von $\varepsilon_{k4} = -\varepsilon_{4k}$ nicht mehr unitär ist. Dafür folgt nun aus (2.30, 31) wegen (2.5) und (2.3):

$$S^* \eta = \eta S^{-1}; \tag{2.33}$$

d. h. bei der Transformation

$$\psi' = S\psi \tag{2.34}$$

bleibt die Norm, oder allgemein das skalare Produkt invariant:

$$(\psi^\dagger, \psi) = (\psi'^\dagger, \psi')\,. \tag{2.35}$$

Dies ist im Rahmen dieser Theorie notwendig und gilt für alle Transformationen, welche in Betracht kommen. (Vgl. 2.20, 22.)

*) Summation über alle Indices.

Durch die Transformation (2.34) des Zustandes werden nun die Erwartungswerte $\overline{A}_\mu$ in der richtigen Weise transformiert: Mit (2.27, 28) und (2.33) folgt nämlich

$$\overline{A}'_\mu(x') \equiv (\psi'^\dagger, A_\mu \psi') = a_{\mu\nu} \overline{A}_\nu\big(x(x')\big). \tag{2.36}$$

Die Umkehr der Zeitachse $x'_r = x_r$, $x'_4 = -x_4$ kann hier durch die Transformation

$$\psi'(N_{\mu,\vec{k}}) = \psi^*(N_{\mu,-\vec{k}}) \tag{2.37}$$

dargestellt werden.*)

Zum Schlusse dieses Abschnittes sei erwähnt, dass man den von Gupta[6]) eingeführten Operator für A_0 aus den hier angegebenen Grössen durch die Beziehung

$$A_0 = \eta A_4 \tag{2.38}$$

erhält. Es gilt dann wegen (2.5) und (2.6)

$$A_0^2 = -A_4^2.$$

Mit (2.38) ergeben sich für A_0 auch die richtigen V.-R. und der Erwartungswert wird reell:

$$\overline{A}_0 \equiv (\psi^\dagger, A_0 \psi) = (\psi^*, A_4 \psi).$$

III. Die Wechselwirkung mit Elektronen.

Um die Wechselwirkung zu beschreiben, verwenden wir die „Interaction Representation" mit ebener Fläche $t = \text{const}$. Die zeitliche Änderung des Zustandes $\psi(t)$ ist dann gegeben durch

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \equiv \Big\{ -\int\limits_{x_4 = it} A_\mu(x)\, j_\mu(x)\, d^3x \Big\} \psi(t). \tag{3.1}$$

Dabei sind die im vorigen Abschnitt definierten Operatoren A_μ zu verwenden, während j_μ den Viererstrom des Diracschen Feldes ohne Wechselwirkung darstellt:

$$j_4 = i\varrho, \qquad \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \qquad [j_\mu, \eta] = 0. \tag{3.2}$$

Die Normierung des Zustandes sei wieder durch

$$N = (\psi^\dagger, \psi) = 1 \tag{3.3}$$

*) Für reelle Darstellung der Operatoren a, a^* in (2.4).

gegeben. Wegen (2.3) und dem antihermitischen Charakter von j_4 ist H nicht hermitisch, dafür gilt jetzt:

$$H^* \eta = \eta H. \tag{3.4}$$

Dies ist aber für die zeitliche Erhaltung der Normierung (3.3) gerade notwendig. Dementsprechend sind die Erwartungswerte durch

$$\bar{A}_\mu(\vec{x}, t) = \left(\psi^\dagger(t), A_\mu(\vec{x}, t)\, \psi(t)\right) \tag{3.5}$$

gegeben.

Für die Lorentzbedingung hat man jetzt in Verallgemeinerung von (2.11) im Sinne einer Anfangsbedingung für $\psi(t_0)$ zu schreiben:

$$\left\{\frac{\partial A_\mu^+(x')}{\partial x'_\mu} + \int\limits_{(x_4 = i t_0)} D^+(x' - x)\, \varrho(x)\, d^3 x\right\} \psi(t_0) = 0\,, \tag{3.6}$$

abgekürzt:

$$\Omega^+(x'; t_0)\, \psi(t_0) = 0\,.$$

Dabei ist

$$D^+ = \frac{1}{2}(D + i D^1)\,, \quad D^- = \frac{1}{2}(D - i D^1) = D^{+*}.\ ^{*)} \tag{3.7}$$

Man hat also in der üblichen Nebenbedingung wieder A durch A^+ und zugleich D durch D^+ ersetzt. (3.6) ist für alle Raum-Zeitpunkte x' zu erfüllen; wegen

$$\Box\, \Omega^+(x'; t_0) = 0$$

genügt es auch

$$(\Omega^+)_{x_4' = i t_0}\, \psi(t_0) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_4'}\, \Omega^+\right)_{x_4' = i t_0} \psi(t_0) = 0$$

zu verlangen. Mit Hilfe der Bewegungsgleichung (3.1) folgt wie üblich, dass die Anfangsbedingung (3.6) für alle Zeiten t gilt:

$$\Omega^+(x'; t)\, \psi(t) = 0\,. \tag{3.8}$$

Dies ergibt sich aus der Identität

$$\frac{\partial\, \Omega^+(x'; t)}{\partial t} + i\left[H(t), \Omega^+(x'; t)\right] = 0\,,$$

wofür die V.-R.

$$i\left[A_\mu^+(x), A_\nu(y)\right] = \delta_{\mu\nu} D^+(x - y) \tag{3.9}$$

zu beachten ist.

---

*) Das Vorzeichen von D^+ entspricht demjenigen von D; es ist also gegenüber der Arbeit von SCHWINGER l. c. geändert. Für D^1 vgl. W. PAULI, Rev. Mod. Phys. **13**, 203 (1941).

Für die durch (3.5) definierten Erwartungswerte gelten nun wieder die klassischen Gleichungen:

Definiert man die Operatoren Ω resp. Ω^- entsprechend (3.6) indem man A_μ und D resp. A_μ^- und D^- einsetzt, so folgt aus (3.8) mit (3.7) und (2.5) zunächst:

$$\psi^\dagger(t)\,\Omega^-(x';t) = 0\,. \tag{3.10}$$

Damit ergibt sich wegen $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$

$$\big(\psi^\dagger(t)\,,\,\Omega(x';t)\,\psi(t)\big) = 0\,.$$

Setzt man hierin $x_4' = it$, so erhält man wegen dem Verschwinden der D-Funktion ausserhalb des Lichtkegels

$$\overline{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}} \equiv \psi^\dagger(t)\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)_{x_4 = it}\psi(t) = 0\,. \tag{3.11}$$

Aus (3.1) und (3.4) in Verbindung mit den V.-R. (2.32) ergibt sich weiter für $x_4 = it$

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\overline{A_\mu(x)} = \overline{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\overline{A}_\mu = \overline{\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_4^2}} - \dot{j}_\mu\,;$$

zusammen mit den entsprechenden evidenten Beziehungen für die räumlichen Ableitungen folgt dann mit (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\overline{A}_\mu = 0 \quad \text{und} \quad \Box\,\overline{A}_\mu = -\overline{j}_\mu\,. \tag{3.12}$$

Um den richtigen Energietensor zu erhalten, ist es wesentlich, dass auch

$$(\psi^\dagger, \Omega^2\,\psi) = 0$$

erfüllt ist*). Diese Gleichung folgt sogleich aus (3.8), (3.10) und der V.-R.

$$[\Omega^+(x';t)\,,\,\Omega^-(x'';t)] = 0\,.$$

(Man beachte hierzu

$$\Box\,D^+ = 0 \quad \text{und} \quad [\varrho(\vec{x},t), \varrho(\vec{y},t)] = 0\,.)$$

Damit ist der Anschluss an die klassische Theorie sichergestellt. Die Lorentzinvarianz ergibt sich in der herkömmlichen Weise (man beachte das in Abschnitt 2, C Gesagte); überdies ist die Verallgemeinerung von (3.1) und (3.6) auf sog. „gekrümmte Flächen" evident.

*) Wir verdanken diese Bemerkung Herrn Prof. Belinfante in Princeton.

IV. Die Elimination des longitudinalen Teiles.

Die hier gegebene Theorie unterscheidet sich von der üblichen Form durch die Behandlung der skalaren Photonen und in der Formulierung der Lorentzbedingung. Für viele praktische Probleme, wie auch zunächst zur Definition des Vakuums, ist es üblich eine Form zu verwenden, in welcher die longitudinalen und skalaren Photonen durch die Coulombwechselwirkung ersetzt sind („Reduzierte Theorie"). Es soll nun gezeigt werden, dass auch in der neuen Form diese Elimination möglich ist; dabei wird sich ergeben, dass man dadurch gerade zu der alten, reduzierten Theorie kommt; d. h. in physikalischer Hinsicht (Verhalten der transversalen Photonen) liefert die neue Methode dieselben Resultate. Zur Durchführung wird eine geeignete Transformation verwendet:

$$\psi(t) = S(t)\,\psi'(t) \tag{4.1}$$

mit

$$S(t) = e^{-iG(t)}, \tag{4.2}$$

wobei

$$G(t) = -\int\limits_{x_4 = it} \Lambda(x)\,\varrho(x)\,d^3x\,. \tag{4.3}$$

Das „longitudinale Potential" Λ ist gegeben durch

$$\Delta\Lambda(\vec{x}, t) = \operatorname{div}\vec{A}(\vec{x}, t)\,, \tag{4.4}$$

oder

$$\Lambda(\vec{x}, t) = -\int \frac{\operatorname{div}\vec{A}(\vec{x}', t)}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x'\,. \tag{4.5}$$

Die Bewegungsgleichung (3.1) ergibt nun für $\psi'(t)$:

$$i\,\frac{\partial\psi'}{\partial t} = S^{-1}HS\,\psi' - i\left(S^{-1}\frac{d}{dt}S\right)\psi'\,. \tag{4.6}$$

Zur Berechnung der einzelnen Terme entwickeln wir nach der Ladung:

$$S^{-1}HS = H + i\,[GH] + \cdots \tag{4.7}$$

$$S^{-1}\frac{d}{dt}S = -i\,\frac{dG}{dt} + \frac{1}{2}\left[G\,\frac{dG}{dt}\right] + \cdots \tag{4.8}$$

Hier ergibt der zweite Term die Coulombwechselwirkung: Zunächst erhält man aus den V.-R. (2.32) durch Ausüben der Operation (4.5) auf beiden Seiten:

$$i\left[\frac{\partial\Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t},\ \Lambda(\vec{x}', t)\right] = \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\,. \tag{4.9}$$

Ferner berücksichtige man

$$[j_\mu(\vec{x}'t),\ j_\nu(\vec{x},t)] = 0; \tag{4.10}$$

daraus folgt wegen (3.2) insbesondere auch

$$\left[\varrho(\vec{x}',t),\ \frac{\partial\varrho(\vec{x},t)}{\partial t}\right] = 0. \tag{4.12}$$

Damit erhält man mit (4.3):

$$-\frac{i}{2}\left[G\frac{dG}{dt}\right] = \frac{1}{2}\int\int\frac{\varrho(\vec{x}\,t)\,\varrho(\vec{x}'\,t)}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3x'\,d^3x \equiv H_{\text{Coul.}} \tag{4.13}$$

Weiter ergibt sich auch, dass die Reihe (4.8) bei diesem Term abbricht; der erste lässt sich mit (3.2) umformen:

$$-\frac{dG}{dt} = \int\left\{\frac{\partial\Lambda(\vec{x},t)}{\partial x_k}\,j_k + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\,\varrho\right\}d^3x. \tag{4.14}$$

In (4.7) verschwindet bereits der erste Kommutator (vgl. (4.10) und (2.2)). Nun lassen sich in (4.6) durch Einführung des transversalen Feldes $\vec{\mathfrak{A}}$ zwei Terme zusammenfassen:

$$\vec{\mathfrak{A}} = \vec{A} - \operatorname{grad}\Lambda \tag{4.15}$$

(div $\vec{\mathfrak{A}} = 0$ wegen (4.4)).

Damit lautet die Bewegungsgleichung ($A_4 = i\,V$)

$$\begin{aligned} i\,\frac{\partial\psi'}{\partial t} &= H'\,\psi' \\ &\equiv\left\{-\int(\vec{\mathfrak{A}}\,\vec{j})\,d^3x + H_{\text{coul.}} + \int\left(V + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\varrho\,d^3x\right\}\psi' \\ &\equiv (H_{\text{trans.}} + H_{\text{Coul.}} + H_{\text{long.}})\,\psi'. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Hierin stellen die beiden ersten Terme den bekannten Hamiltonoperator der „reduzierten" Theorie dar; der letzte Term wird jetzt mit Hilfe der Lorentzbedingung eliminiert (erst an dieser Stelle wird die Rechnung wesentlich anders als in der üblichen Theorie). Diese lautet nun:

$$\Omega^{+\prime}(x;t)\,\psi'(t) = 0 \tag{4.17}$$

mit

$$\Omega^{+\prime} = S^{-1}\Omega^+ S = \Omega^+ + i\,[G\Omega^+] + \cdots \tag{4.18}$$

Mit Hilfe der V.-R. (3.9) erhält man zunächst:

$$i\,[\Lambda(x),\ \operatorname{div}\ \vec{A}^+(x')] = D^+(x'-x); \tag{4.19}$$

damit ergibt der Kommutator

$$i\left[G(t), \Omega^{+}(x'; t)\right] = -\int\limits_{x_4 = it} D^{+}(x' - x)\, \varrho(x)\, d^3 x, \tag{4.20}$$

d. h. in (4.18) wird gerade der zweite Teil von Ω^{+} (vgl. (3.6)) weggehoben; die Reihe (4.18) bricht beim zweiten Term ab. Die Lorentzbedingung lautet also nach der Transformation:

$$\frac{\partial A_{\mu}^{+}(x)}{\partial x_{\mu}} \psi' = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial V^{+}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}^{+}\right) \psi' = 0. \tag{4.21}$$

Man hat also jetzt die Nebenbedingung der Theorie ohne Wechselwirkung; damit ist auch die Erfüllbarkeit von (3.6) bewiesen. Man kann nun die in Abschnitt II gegebene Interpretation anwenden; dabei ist zu berücksichtigen, dass durch die Transformation (4.1) die Normierung erhalten bleibt:

$$(\psi'^{\dagger}, \psi') = 1. \tag{4.22}$$

Um nun einzusehen, dass der letzte Term in (4.16) weggelassen werden kann, beachten wir zunächst, dass die Relationen (2.1), (4.4), (4.15) auch für die entsprechenden Anteile positiver Frequenz allein gelten:

$$\operatorname{div} \vec{A}^{+} = \Delta \Lambda^{+}, \quad \Box \Lambda^{+} = 0; \tag{4.23}$$

d. h.

$$\operatorname{div} \vec{A}^{+} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda^{+}. \tag{4.24}$$

Damit lässt sich (4.21) schreiben:

$$\left(\frac{\partial V^{+}}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda^{+}\right) \psi' = 0. \tag{4.25}$$

Eine explizite Darstellung zeigt aber sogleich, dass dies äquivalent ist mit

$$\left(V^{+} + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda^{+}\right) \psi' = 0. \tag{4.26}$$

Hier tritt also gerade der Anteil positiver Frequenz des entsprechenden Ausdrucks in H_{long} auf. Man berechne nun den Beitrag von H_{long} in (4.16) zur zeitlichen Änderung der Amplitude $w(t)$:

$$w(t) = \left(\varphi'^{\dagger}, \psi'(t)\right) \tag{4.27}$$

(vgl. (2.22)), wobei φ' einen willkürlich vorgelegten Zustand bedeutet, der aber (4.26) zu erfüllen hat, d. h. auch

$$\varphi'^{\dagger}\left(V^{-}+\frac{\partial \Lambda^{-}}{\partial t}\right)=0. \tag{4.28}$$

Nun ist

$$i\,\frac{dw}{dt}=\left(\varphi'^{\dagger},\, H'\,\psi'(t)\right) \quad \left(\text{vgl. (4.16)}\right).$$

Hier gibt aber H_{long} keinen Beitrag, wie man sofort aus der Spaltung in die Anteile positiver und negativer Frequenz entnimmt:

$$\left(\varphi'^{\dagger},\left(V+\frac{d\Lambda}{dt}\right)\varrho\,\psi'\right)=0 \tag{4.29}$$

(vgl. (4.28) und (4.26)). Dasselbe gilt auch für alle höheren Ableitungen, wenn man noch beachtet, dass H_{long} mit allen anderen Termen von H' kommutiert. Es ist nach (2,1, 4.4 und 4.15)

$$[\vec{\mathfrak{A}},\Lambda]=0. \tag{4.30}$$

Man sieht daraus, dass H_{long} lediglich die „Beimischungen" des Zustandes ψ' ändert. (4.16) ist also äquivalent mit

$$i\,\frac{\partial\psi'}{\partial t}=(H_{\text{trans.}}+H_{\text{Coul.}})\,\psi'. \tag{4.31}$$

Man kann nun die Quantenzahlen N_3 und N_4 in ψ' weglassen (das System bleibt jetzt dauernd im Zustand der Form ψ^0 (vgl. (2.16)). Die Normierung (4.22) heisst dann

$$(\psi'^{*},\,\psi')=1. \tag{4.32}$$

Damit ist die „reduzierte" Theorie gewonnen. Diese lässt sich auch direkt durch die Quantisierung einer entsprechenden klassischen Theorie in widerspruchsfreier Weise gewinnen.

V. Die Definition des Vakuums.

Es soll nun von der üblichen Definition des Vakuums in der reduzierten Theorie (keine transversalen Photonen) ausgegangen werden. Mit Hilfe der inversen Transformation (4.1) wird dann untersucht, welche Bedingung sich daraus für die symmetrische Theorie ergibt.

Man hat also für ψ' die Vakuumbedingung

$$\vec{\mathfrak{A}}^{+}\,\psi_0'=0. \tag{5.1}$$

Werden die Quantenzahlen N_3 und N_4 beibehalten, so hat man

auch noch die Lorentzbedingung (4.25) zu verwenden. Nach dem im zweiten Abschnitt Gesagten, kann man aber dafür auch die verschärfte Form anwenden:

$$V^+ \psi_0' = 0 \,, \quad \Lambda^+ \psi_0' = 0 \,. \tag{5.2,3}$$

Da V^+ nur Absorptionsoperatoren für die skalaren Photonen enthält, während Λ^+ nur solche für longitudinale Photonen besitzt, bedeutet dies nur, dass man sich auf einen Zustand der Form $\varphi(00)$ (vgl. (2.16)) beschränkt. Jetzt geht man mit der Transformation (4.1) zu der symmetrischen Darstellung zurück:

$$\psi_0' = S^{-1} \psi_0 \,. \tag{5.4}$$

Aus (5.3) wird dann:

$$(S \Lambda^+ S^{-1}) \psi_0 = 0 \tag{5.5}$$

oder

$$\{\Lambda^+ - i [G \Lambda^+]\} \psi_0 = 0 \,.$$

Dies ergibt mit denselben Methoden wie in Abschnitt IV:

$$\left\{\Lambda^+(x') + \int\limits_{x_4 = i t_0} F^+(x' - x)\, \varrho(x)\, d^3 x\right\} \psi_0(t_0) = 0 \tag{5.6}$$

mit dem Kern:

$$F^+(x' - x) = - \int\limits_{x_4'' = x_4'} \frac{D^+(x'' - x)}{4 \pi |x' - \vec{x}''|}\, d^3 x'' \,. \tag{5.7}$$

Weiter bleiben die Bedingungen (5.1) und (5.2) ungeändert wegen

$$[\Lambda V^+] = [\Lambda \vec{\mathfrak{A}}^+] = 0 \,.$$

Man hat also zu (5.6) noch

$$\vec{\mathfrak{A}}^+ \psi_0 = 0 \tag{5.8}$$

und

$$A_4^+ \psi_0 = 0 \tag{5.9}$$

hinzuzufügen. Aus (4.15) erhält man auch

$$\vec{A}^+ = \vec{\mathfrak{A}}^+ + \operatorname{grad} \Lambda^+ .$$

Damit ergibt sich aus (5.6), (5.8) und (5.9)

$$\left\{A_k^+(x') + \frac{\partial}{\partial x'_k} \int\limits_{x_4 = i t_0} F^+(x' - x)\, \varrho(x)\, d^3 x\right\} \psi_0(t_0) = 0 \tag{5.10}$$

$$A_4^+(x')\, \psi_0(t_0) = 0 \tag{5.11}$$

für alle x' und $k = 1, 2, 3$, wobei F durch (5.7) definiert ist. Dadurch

ist die strenge Vakuumdefinition der symmetrischen Theorie gewonnen. Im Gegensatz zu (1.2) hat man einen ladungsabhängigen Zusatz; dieser ist in anderem Zusammenhang bereits von JAUCH und COESTER[8]) angegeben worden. Man sieht sogleich, dass er aus Gründen der Verträglichkeit mit der Lorentzbedingung (3.6) vorhanden sein muss: Differenziert man nämlich (5.10, 11) nach der entsprechenden Koordinate x'_μ und addiert die vier Gleichungen, so erhält man gerade (3.6). In dieser Theorie ist also die Vakuumdefinition nichts anderes als eine Verschärfung der Lorentzbedingung. Die physikalische Bedeutung des Zusatzes ist die folgende: Berechnet man in dem durch (5.10, 11) definierten Photonvakuum die Erwartungswerte der Feldstärken, so erhält man gerade das elektrostatische Feld der Ladungsverteilung $\langle\varrho\rangle$ (Erwartungswert der Ladung):

$$\langle \vec{E}(\vec{x}, t_0)\rangle_0 = \operatorname{grad} \int \frac{\langle \varrho(\vec{x}', t_0)\rangle}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x\,. \tag{5.12}$$

Anschaulich gesprochen bedeutet der Zusatzterm folgendes: Er stellt in der symmetrischen Theorie die instantane Wirkung des Coulombfeldes dar, welche in der verkürzten Theorie explicite auftritt. Für Prozesse, die sich in einem endlichen Zeitintervall abspielen, ist der Term tatsächlich wesentlich; dies sieht man z. B. leicht mit Hilfe der Rechenmethode von DYSON. Im Beispiel (2.23) hat man dann für die Zeit endliche Integrationsgrenzen $\pm T$ einzusetzen: Wird nun (5.10, 11) anstelle von (1.2) angewendet, so liefert bereits die erste Näherung

$$U^1 = i \int_{-T}^{+T} A_\mu(x)\, j_\mu(x)\, d^4x$$

den Beitrag zweiter Ordnung:

$$U_T = -i \int_{-T}^{+T} d^4x \int_{(y_4=-iT)} d^3y\, j_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} F^+(x-y)\, \varrho(y) \tag{5.13}$$

$$-i \int_{-T}^{+T} d^4x \int_{(y_4=+iT)} d^3y\, j_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} F^-(x-y)\, \varrho(y)$$

(F^- ist entsprechend (5.7) definiert).

Man verifiziert übrigens auch leicht, dass die reduzierte Theorie

dasselbe Resultat liefert: Verwendet man das Verfahren von Kroll und Karplus, so hat man den Ausdruck

$$U = -\frac{1}{2} \int\int_{-T}^{+T} j_k(x)\, j_l(y) \langle P\{\mathfrak{A}_k(x)\, \mathfrak{A}_l(y)\}\rangle_0 \, d^4x\, d^4y \qquad (5.14)$$

mit Hilfe von (5.1) auszuwerten; dies ergibt nach partieller Integration gerade den Zusatzterm (5.13).

Jauch und Coester haben nun gezeigt, dass U_T für $T = \infty$ verschwindet; tatsächlich sieht man auch anschaulich aus (5.10), dass der Zusatzterm, der ja nur das Coulombfeld beschreibt, für $t_0 = \pm\infty$ keinen Beitrag liefert: Er verschwindet dann für alle endlichen x'. In diesem Falle kann man also mit der Vakuumbedingung (1.2) für den ladungsfreien Fall rechnen. Man sieht nun den Vorteil unserer Methode: (1.2) ist erfüllbar. Als Anfangs- und Endzustände können nach den Methoden des zweiten Abschnittes die Zustände des Feldes ohne Wechselwirkung und ohne longitudinale und skalare Photonen benutzt werden. Da die Lorentzbedingung in der Vakuumbedingung enthalten ist, so folgt ferner, dass für virtuelle Zustände die Lorentzbedingung nicht explicit verwendet werden muss, wie das auch Gupta in Beispielen getan hat. Dass alles Gesagte in trivialer Weise verallgemeinert werden kann, wenn reelle transversale Photonen vorkommen, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

Herrn Professor W. Heitler möchte ich für die vielen Ratschläge und die wertvollen Diskussionen herzlich danken. Herrn Dr. S. N. Gupta und Herrn Prof. F. Coester danke ich bestens für die Überlassung ihrer Manuskripte vor der Publikation.

Zürich, Theoretisches Seminar der Universität.

Bibliographie.

[1]) Fermi, Rev. Mod. Phys. **4**, 131 (1932).
[2]) Ma, Phys. Rev. **75**, 535 (1949). Belinfante, Phys. Rev. **76**, 226 (1949).
[3]) Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948) und **75**, 651 (1949).
[4]) Karplus and Kroll, Phys. Rev. **77**, 536 (1950).
[5]) Dyson, Phys. Rev. **77**, 420 (1950).
[6]) Gupta, Proc. Phys. Soc. **63**, 681 (1950).
[7]) Dirac, Comm. Dublin Inst. Advanced Studies, A. No. 1, 1943. Pauli, Rev. Mod. Phys. **15**, 175 (1943).
[8]) Jauch und Coester, Phys. Rev. **78**, 149 (1950).