Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 23 (1950)
Heft: V

Artikel: Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112121

Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld

(2. Mitteilung.)

von **W. Scherrer**, Bern.

(31. V. 1950.)

§ 1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]), die ich im folgenden unter A zitieren werde, habe ich den Versuch unternommen, die Materie im Rahmen der Einsteinschen Gravitationstheorie durch eine skalare Wirkungsdichte

$$\chi = \psi^2 \tag{1.1}$$

zu charakterisieren. Für die grundsätzlichen Überlegungen, die mich dazu veranlasst haben, verweise ich auf § 1 der genannten Arbeit.

Methodisch habe ich dabei das Wirkungsprinzip

$$\delta \int \left[(R-2\Lambda)\,\psi^2 + 4\,\omega\, G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\varrho}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma}\right] \sqrt{-G}\, d x = 0 \tag{1.2}$$

zugrunde gelegt, wobei $G_{\varrho\sigma}$ den metrischen Fundamentaltensor, R den zugehörigen Krümmungsskalar, Λ die kosmologische Konstante und ω eine weitere universelle Konstante — aus dimensionellen Gründen eine reine Zahl — bedeuten.

Für die Feldgleichungen der Gravitation ergibt sich so das System

$$\boxed{\begin{aligned} & R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} R + \Lambda G_{\varrho\sigma} \\ & + \frac{1}{\chi}\left(D_\varrho D_\sigma \chi - G_{\varrho\sigma} \Box \chi\right) \\ & + \frac{\omega}{\chi^2}\left(D_\varrho \chi\, D_\sigma \chi - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \nabla \chi\right) = 0 \end{aligned}} \tag{1.3}$$

[1]) „Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld." Helv. Phys. Acta, XXII, S. 537—551 (1949).

und als Feldgleichung der Materie erhält man

$$\boxed{(3+2\,\omega)\,\square\,\chi - 2\,\Lambda\,\chi = 0} \tag{1.4}$$

Dabei bedeutet D_ϱ das Symbol der kovarianten Differentiation nach der Koordinate x_ϱ und $\nabla\,\psi$, $\square\,\psi$ sind die durch

$$\nabla\,\psi \equiv G^{\varrho\sigma}\,D_\varrho\,\psi\,D_\sigma\,\psi \equiv G^{\varrho\sigma}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x_\varrho}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x_\sigma} \tag{1.5}$$

$$\square\,\psi \equiv D_\sigma\,\psi^\sigma \equiv G^{\varrho\sigma}\,D_\varrho\,D_\sigma\,\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-G}}\,\frac{\partial}{\partial\,x_\varrho}\left(\sqrt{-G}\,G^{\varrho\sigma}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x_\sigma}\right) \tag{1.6}$$

definierten Beltramischen Operatoren.

Der Vergleich mit den klassischen Einsteinschen Gravitationsgleichungen

$$R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2}\,G_{\varrho\sigma}\,R + \Lambda\,G_{\varrho\sigma} = -\,\varkappa\,T_{\varrho\sigma} \tag{1.7}$$

zeigt nun unmittelbar, dass man als Energietensor anzusetzen hat

$$\boxed{T_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\varkappa}\left\{\frac{D_\varrho\,D_\sigma\,\chi - G_{\varrho\sigma}\,\square\,\chi}{\chi} + \omega\,\frac{D_\varrho\,\chi\cdot D_\sigma\,\chi - {}^1\!/\!_2\,G_{\varrho\sigma}\,\nabla\,\chi}{\chi^2}\right\}} \tag{1.8}$$

Für die Einzelheiten der Herleitung von (1.3) und (1.4) verweise ich auf A, § 2.

Im speziellen habe ich dann für den Sonderfall $\Lambda = 0$, $\omega = 0$ die statisch-zentralsymmetrische Lösung ermittelt und die zugehörige Energiedichte $\sqrt{-G}\;T_0^0$ diskutiert. Es ist klar, dass dieser Sonderfall keinen Aufschluss gibt über Kräfte, die wesentlich anders geartet sind als Gravitationskräfte.

In der vorliegenden Arbeit soll nun dasselbe Problem für den umfassenderen Fall $\Lambda = 0$, $\omega \neq 0$ behandelt werden, auf dessen Lösbarkeit ich in der früheren Arbeit schon hingewiesen habe (A § 5).

Es handelt sich jetzt also um das Wirkungsprinzip

$$\delta\int\left(R\,\psi^2 + 4\,\omega\,G^{\varrho\sigma}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x_\varrho}\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x_\sigma}\right)\sqrt{-G}\,d\,x = 0 \tag{1.9}$$

Die Tatsache, dass durch den Übergang von $\omega = 0$ zu $\omega \neq 0$ die formale Struktur der Lösung nicht, die Verteilung des Feldes aber beliebig intensiv geändert werden kann, scheint mir Interesse zu verdienen, zeigt sie doch, dass der zusätzliche Gradient dem metrischen Feld vollkommen angepasst ist.

§ 2. Das statische Zentralfeld.

Wir wählen wieder das Schwarzschildsche Linienelement

$$d s^2 = f^2 d x_0^2 - g^2 d r^2 - r^2 (d \vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2), \tag{2.1}$$

wo also f und g Funktionen des Radius r sind und erhalten

$$\sqrt{-G} = f g r^2 \sin \vartheta \tag{2.2}$$

und

$$R \sqrt{-G} = \left\{ - \left[\frac{2 r}{g} (r f' + 2 f) \right]' + 2 \left(\frac{2 r f' + f}{g} + f g \right) \right\} \sin \vartheta, \tag{2.3}$$

wobei der Strich die Ableitung nach r anzeigt.

Das Wirkungsprinzip (1.9) nimmt mit (1.1) die Gestalt

$$\delta \int \left(R \chi + \omega \frac{\nabla \chi}{\chi} \right) \sqrt{-G} \, d x = 0 \tag{2.4}$$

an. Lassen wir wieder die Zeit und die Winkelvariablen weg, so folgt nach einer durch (2.3) nahegelegten partiellen Integration und mit Rücksicht auf

$$\nabla \chi = - \frac{\chi'^2}{g^2} \tag{2.5}$$

das Prinzip

$$\delta \int \left\{ 2 \left[\frac{r}{g} (r f' + 2 f) \chi' + \left(\frac{2 r f' + f}{g} + f g \right) \chi \right] - \omega \frac{r^2 f}{g} \frac{\chi'^2}{\chi} \right\} d r = 0 \tag{2.6}$$

Wiederum erhält man durch sukzessive Variation von f, χ und g, gefolgt von respektiver Division durch χ, f und χf nach leichter Umformung drei Gleichungen

$$2 \left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{\chi'}{\chi} + \frac{2}{r} \right) \right]' + (2 + \omega) \frac{r^2}{g} \left(\frac{\chi'}{\chi} \right)^2 - 2 \left(g + \frac{1}{g} \right) = 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{f'}{f} - \omega \frac{\chi'}{\chi} + \frac{2}{r} \right) \right]' + \frac{2 r^2}{g} \left[\left(\frac{f'}{f} \right)^2 - \omega \frac{\chi' f'}{\chi f} \right] - \frac{\omega r^2}{g} \left(\frac{\chi'}{\chi} \right)^2 \\ - 2 \left(g + \frac{1}{g} \right) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$2 \frac{r^2}{g^2} \left(\frac{\chi'}{\chi} + \frac{2}{r} \right) \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) - \omega \frac{r^2}{g^2} \left(\frac{\chi'}{\chi} \right)^2 - 2 \left(1 + \frac{3}{g^2} \right) = 0 \tag{2.9}$$

Ersetzt man diese Gleichungen durch die Kombinationen (2.7) — (2.8), $(1 + \omega)$ (2.7) + (2.8), $(2 + \omega)^2$ (2.9) und führt man überdies an Stelle von χ und f die neuen Funktionen

$$P \equiv \chi f, \qquad Q \equiv \frac{\chi^{1 + \omega}}{f} \tag{2.10}$$

ein, so erhält man nach einer an der ersten Kombination unmittelbar ersichtlichen Integration sowie nach einigen Umformungen der zweiten und dritten Kombination das System

$$\frac{r^2 Q'}{g Q} = \frac{A}{P} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}&\frac{r^2}{g}\left[2\,r\left(\frac{r P'}{P}\right)' + \left(\frac{r P'}{P}\right)^2 + \frac{2\,r P'}{P} + 2\,(2+\omega)\right]\\ &+ \left(\frac{1}{g^2}\right)' r^3 \left[\frac{r P'}{P} + 2\,(2+\omega)\right] - 2\,(2+\omega)\, r^2 + \frac{A^2}{P^2} = 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g^2}\left\{\left[\frac{r P'}{P} + 2\,(2+\omega)\right]^2 - 2\,(2+\omega)\,(3+2\,\omega)\right\}\\ &\qquad - \left[2\,(2+\omega) + \frac{A^2}{r^2 P^2}\right] = 0\end{aligned} \tag{2.13}$$

Setzt man nun

$$S \equiv r P\,; \qquad K \equiv \frac{r P'}{P} \tag{2.14}$$

so gilt

$$r S' = S\,(K+1) \tag{2.15}$$

Aus (2.12) und (2.13) ergibt sich hierauf nach einiger Rechnung als Differentialgleichung zwischen S^2 und K allein

$$\frac{2\,(K+1)\,d K}{K\,[K^2 + 4\,(2+\omega)\,K + 2\,(2+\omega)]} + \frac{d\,(S^2)}{A^2 + 2\,(2+\omega)\,S^2} = 0 \tag{2.16}$$

Ihr Integral lautet

$$\frac{K^2\,[2\,(2+\omega)\,S^2 + A^2]}{K^2 + 4\,(2+\omega)\,K + 2\,(2+\omega)} = B^2 \tag{2.17}$$

Weiter finden wir aus (2.11), (2.14) und (2.15)

$$\frac{d Q}{Q} = g\,\frac{A\,d S}{(K+1)\,S^2} \tag{2.18}$$

Aus (2.13), (2.14) und (2.17) aber folgt

$$g = \frac{K S}{B}\,, \tag{2.19}$$

womit (2.18) übergeht in

$$\frac{d Q}{Q} = \frac{A K}{B\,(K+1)}\,\frac{d S}{S} \tag{2.20}$$

Um nun die endgültige Integration einzuleiten, müssen wir die nach (2.14) und (2.15) in (2.17) enthaltene Differentialgleichung auflösen. Setzt man

$$S \equiv L g r \tag{2.21}$$

und bezeichnet man die Ableitung nach s mit einem Punkt, so erhält man

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{S^2 + a^2 - a\beta\sqrt{S^2 + a^2}}{S^2 + a^2 - a^2\beta^2} \tag{2.22}$$

Dabei wurden die Abkürzungen

$$a = \sqrt{\frac{A^2 + (3 + 2\,\omega)\,B^2}{2\,(2 + \omega)}} \tag{2.23}$$

$$\beta = \frac{B}{a} \tag{2.24}$$

eingeführt. Setzt man schliesslich noch

$$S = a\sqrt{x^2 - 1}\,, \tag{2.25}$$

so ergibt die Integration von (2.22) mit Rücksicht auf (2.21)

$$r = b\sqrt{x^2 - 1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{\beta}{2}} \tag{2.26}$$

Aus (2.15), (2.21), 2.22), (2.23), (2.24) und (2.25) folgt weiter

$$K = -\frac{\beta}{x + \beta} \tag{2.27}$$

Führt man nun (2.25) und (2.27) in (2.20) ein und integriert, so folgt

$$Q = C\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\frac{\alpha}{2}}, \tag{2.28}$$

wobei die Abkürzung

$$\alpha = \frac{A}{a} \tag{2.29}$$

eingeführt wurde.

Aus (2.14), (2.25) und (2.26) ergibt sich nun

$$P = \frac{a}{b}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\frac{\beta}{2}} \tag{2.30}$$

Wegen (2.10) erhalten wir also

$$\chi^{2+\omega} = \frac{C\,a}{b}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} \tag{2.31}$$

und

$$f^{2+\omega} = \frac{1}{C}\left(\frac{a}{b}\right)^{1+\omega}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{\alpha-(1+\omega)\,\beta}{2}} \tag{2.32}$$

Aus (2.19), (2.25) und (2.26) folgt schliesslich

$$g^2 = \frac{x^2-1}{(x+\beta)^2} \tag{2.33}$$

Nun nehmen wir noch die Normierung im Unendlichen vor. Für $x \to \infty$, das heisst $r \to \infty$ muss das pseudoeuklidische Linienelement herauskommen, also $f = 1$ sein. Dies ergibt nach (2.32)

$$\frac{1}{C}\left(\frac{a}{b}\right)^{1+\omega} = 1 \tag{2.34}$$

Schliesslich normieren wir noch die im Unendlichen konstante relative Intensität χ auf 1, was auf

$$\frac{C\,a}{b} = 1 \tag{2.35}$$

führt. Es ergibt sich somit $b = a$ und $C = 1$.

Die Ergebnisse stellen wir in folgender Tabelle zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= a\sqrt{x^2-1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{\beta}{2}} \\ f^2 &= \left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{\alpha-(1+\omega)\beta}{2+\omega}} \\ g^2 &= \frac{(x^2-1)}{(x+\beta)^2} \\ \chi^2 &= \left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\frac{\alpha+\beta}{2+\omega}} \end{aligned}} \tag{2.36}$$

Wegen (2.23), (2.24) und (2.29) gilt ausserdem zwischen α und β die Relation

$$\boxed{\alpha^2 + (3+2\,\omega)\,\beta^2 = 2\,(2+\omega)} \tag{2.37}$$

Beim Vergleich mit der früheren Tabelle (A § 3 (37)) ist zu beachten, dass die jetzigen α, β das Doppelte der früheren sind. Wie man sieht, konnte die Rechnung vollständig parallel zum Fall $\omega = 0$ geführt werden. Der Einfluss von ω zeigt sich nur in den Exponenten von f^2 und χ^2. Im Intervall

$$-\frac{3}{2} < \omega < \infty$$

liefert die Exponentenrelation (2.37) in der (α, β)-Ebene eine Ellipse, die für $\omega = -\,{}^3/_2$ in das Geradenpaar $\alpha = \pm 1$ und für $\omega = +\infty$ in das Geradenpaar $\beta = \pm 1$ ausartet.

§ 3. Der Energietensor.

Wie in der früheren Arbeit (A § 4) führen wir jetzt an Stelle von r den Parameter x ein:

$$r = a\,(x-1)^{\frac{1+\beta}{2}}\,(x+1)^{\frac{1-\beta}{2}} \tag{3.1}$$

und erhalten als Linienelement

$$ds^2 = f^2\,dx_0^2 - h^2\,dx^2 - r^2\,(d\vartheta^2 + \sin\vartheta\,d\varphi^2)\,, \tag{3.2}$$

mit

$$h = a\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{\beta}{2}} \tag{3.3}$$

Die Tafel der $\Gamma^{\lambda}_{\varrho\sigma}$ ist also dieselbe wie in A und für die nicht verschwindenden Komponenten des Energietensors erhält man

$$\begin{aligned}
\varkappa\,T_0^0 &= -\frac{1}{h^2}\left(\frac{f'}{f} - \frac{\omega\,\chi'}{2\,\chi}\right)\frac{\chi'}{\chi}\\
\varkappa\,T_1^1 &= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{\chi''}{\chi} - \frac{h'\chi'}{h\chi} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\chi'}{\chi}\right)^2\right]\\
\varkappa\,T_2^2 &= -\frac{1}{h^2}\left(\frac{r'}{r} - \frac{\omega\,\chi'}{2\,\chi}\right)\frac{\chi'}{\chi}\\
T_3^3 &= T_2^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei der Strich die Ableitung nach x anzeigt.

Nach (2.36) und (3.3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{f'}{f} &= \frac{\alpha-(1+\omega)\,\beta}{2+\omega}\cdot\frac{1}{x^2-1}\\
\frac{\chi'}{\chi} &= -\frac{\alpha+\beta}{2+\omega}\cdot\frac{1}{x^2-1}\\
\frac{h'}{h} &= \frac{\beta}{x^2-1}\\
\frac{r'}{r} &= \frac{x+\beta}{x^2-1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Wir erhalten daher schliesslich

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\,(2+\omega)\,\varkappa\,a^2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\beta}\cdot\frac{1}{(x^2-1)^2}\\
T_1^1 &= -\frac{\alpha+\beta}{2\,(2+\omega)\,\varkappa\,a^2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\beta}\cdot\frac{4\,x+\alpha+3\,\beta}{(x^2-1)^2}\\
T_2^2 &= \frac{\alpha+\beta}{2\,(2+\omega)\,\varkappa\,a^2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\beta}\cdot\frac{2\,x+\omega\,\alpha+(2+\omega)\,\beta}{(x^2-1)^2}\\
T_3^3 &= T_2^2\,.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Mit

$$\sqrt{-G} = f h r^2 \sin \vartheta = a^3 \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{\frac{\alpha + (5+2\omega)\beta}{2(2+\omega)}} (x^2-1) \sin \vartheta \quad (3.7)$$

ergibt sich also die Energiedichte

$$T_0^0 \sqrt{-G} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2(2+\omega)\varkappa a^2} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{\frac{\alpha+\beta}{2(2+\omega)}} \frac{\sin \vartheta}{x^2-1} \quad (3.8)$$

Die Berechnung der Totalenergie verläuft nun genau gleich wie in A und liefert

$$\boxed{E = \frac{2\pi a(\alpha - \beta)}{\varkappa}} \quad (3.9)$$

wobei die Konvergenz der Integration an die Bedingung

$$\frac{\alpha+\beta}{2+\omega} > 0 \quad (3.10)$$

geknüpft ist.

Für $\omega > -\,^3/_2$ sind also die zulässigen Exponenten α, β beschränkt auf diejenige Hälfte der Ellipse (2.37), welche im Gebiet $\alpha + \beta > 0$ liegt. Die Grenzpunkte dieses Bereichs sind

$$\alpha = 1\,; \qquad \beta = -1 \quad (3.11)$$

$$\alpha = -1\,; \qquad \beta = 1 \quad (3.12)$$

Für sie und nur für sie konzentriert sich die Energie auf einen Punkt — den Ursprung. Ihnen entsprechen genau die schon in (A, a), b)) aufgestellten Grenzlösungen, von denen die erste positive, die zweite negative Totalenergie aufweist.

Für genügend grosse positive ω erstreckt sich übrigens die genannte Ellipse beliebig weit in Richtung der positiven α-Achse. Das Modell enthält also die Möglichkeit beliebig stark abweichender Kraftfelder, ohne dass die den punktförmigen Energieverteilungen entsprechenden Felder abgeändert werden.

§ 4. Schlussbemerkungen.

Wir haben festgestellt, dass die Lösungen des Wirkungsprinzips

$$\delta \int \left(R\,\psi^2 + 4\,\omega\, R^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right) \sqrt{-G}\, dx = 0$$

qualitativ dieselbe Struktur besitzen wie die Lösungen des in der früheren Arbeit (A) behandelten Spezialfalles $\omega = 0$.

Der Energietensor ist in allen Fällen $\alpha + \beta > 0$ kontinuierlich verteilt und konzentriert sich nur in den Grenzfällen $\alpha + \beta = 0$ nach der Art einer Diracfunktion auf eine Weltlinie. In allen Fällen aber sorgt der metrische Tensor dafür, dass die Totalenergie endlich bleibt.

Eine exakte Formel für die ponderomotorische Kraft in Aussicht zu nehmen, hat nur für die Grenzfälle $\alpha + \beta = 0$ einen Sinn. Sachgemäss sollte sie sich aus einer kontinuierlichen dynamischen Lösung durch Grenzübergang ergeben. Einem solchen Verfahren steht aber folgende Schwierigkeit gegenüber: Die Stellen, in denen sich das Materiefeld singulär verdichtet, müssen schon in der Anfangslage als Singularitäten vorgegeben sein. Wird es möglich sein, dieselben von der Anfangslage aus gesetzmässig fortzusetzen?

Der tiefgehende Gegensatz, welcher in der Einsteinschen Gravitationstheorie zwischen der Materie als Feldquelle und der Materie als Probekörper besteht, ist also in diesem Modell wohl etwas gemildert, aber noch keineswegs überwunden. Bei der klassischen Lösung läuft ja der Probekörper vollkommen passiv durch ein reguläres metrisches Feld. Sobald man aber seinen Einfluss auf das Feld berücksichtigen will, tritt eine vollständige Entartung der Metrik im Quellpunkt ein.

Die Vermutung ist nicht von der Hand zu weisen, dass wir heute an der Grenze der Leistungsfähigkeit des Feldbegriffs angelangt sind. Wir ständen dann vor der grundsätzlichen Alternative: Kontinuum oder Diskontinuum? Im speziellen würde sich dann die Frage stellen, ob es möglich sei, die Metrik als statistisches Phänomen aufzufassen.

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass die Formeln (2.30) im Grenzfall $\omega \to \infty$ dasjenige metrische Feld liefern, welches dem inhomogenen Wirkungsprinzip

$$\delta \int \left(R + 2\lambda\, G^{\varrho\sigma} \frac{\partial S}{\partial x_\varrho} \frac{\partial S}{\partial x_\sigma} \right) \sqrt{-G}\, dx = 0$$

entspricht. Dieses Prinzip behandelt Herr K. Fink in seiner Dissertation: „Metrisches Feld und skalares Materiefeld“. Die Totalenergie wird logarithmisch unendlich.