Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 23 (1950)
Heft: V

Artikel: Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel
Autor: Schafroth, M.R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112120

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel (II)

von **M. R. Schafroth** (ETH. Zürich).

(22. V. 1950,)

Die in einer früheren Arbeit[1]) (im folgenden zitiert als I) gegebenen Formeln (I 44) und (I 52) für die e^6-Korrekturen $d\sigma_6$ zum differentiellen Querschnitt des Comptoneffekts stellen einer expliziten Auswertung keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr entgegen. Insbesondere kann man zeigen, dass sich sämtliche auftretenden Parameterintegrale neben elementaren Funktionen durch die einzige Transzendente

$$F(x) \equiv \int_0^x \frac{d\xi}{\xi} \log(1+\xi) \tag{1}$$

ausdrücken lassen, welche ausführlich tabelliert ist[2]). Indessen ist die erforderliche Rechenarbeit sehr gross, besonders da sich im allgemeinen Fall diese Reduktion auf die einzige Transzendente (1) in Praxi ziemlich umständlich gestaltet. Nachdem in I die Auswertung für den nichtrelativistischen Grenzfall bereits durchgeführt wurde, haben wir uns deshalb hier auf eine Behandlung des entgegengesetzten, extrem-relativistischen Grenzfalls beschränkt.

Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dass im Schwerpunktsystem sämtliche auftretenden Viererskalarprodukte von Impulsvektoren gross sind gegen m^2 (m = Ruhmasse des Elektrons; wir setzen stets $\hbar = c = 1$), so dass man m in den Zählern der Integranden immer vernachlässigen kann und in den Nennern nur insofern mitzunehmen braucht, als es zu logarithmischen Termen Anlass gibt.

Mit den Bezeichnungen von Fig. 1 und $|\vec{\varkappa}_0| = |\vec{\varkappa}_1| = |\vec{q}_0| = |\vec{q}_1| \equiv \nu$ lauten die Bedingungen, unter denen diese Vernachlässigung gilt:

$$\frac{m^2}{4\,\nu^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \ll 1\,; \qquad \frac{m^2}{4\,\nu^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \ll 1 \tag{2}$$

---

[1]) M. R. Schafroth, H. P. A. **22**, 501 (1949).

[2]) Powell, Phil. Mag. **34**, 600 (1943). K. Mitchell, Phil. Mag. **40**, 351 (1949).

Es ist ersichtlich, dass wir so einen Ausdruck für $d\sigma_6$ erhalten werden, der nur für $\pi - \vartheta_0 > \vartheta > \vartheta_0$ gültig sein wird, wo $\vartheta_0^2 \gg m^2/\nu^2$; insbesondere werden wir so auf eine Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes verzichten müssen.

Man übersieht die Verhältnisse am besten durch Transformation ins Laboratoriumssystem (Ruhsystem des Anfangselektrons). Mit den aus Fig. 2 ablesbaren Bezeichnungen gilt hier, in unserer Näherung:

$$\left.\begin{aligned} |\vec{\varkappa}_0'| &= \frac{2\nu^2}{m} \\ |\vec{\varkappa}_1'| &= |\vec{\varkappa}_0'| \cdot \cos^2\frac{\vartheta}{2} \\ \sin^2\frac{\Theta}{2} &= \mathrm{tg}^2\frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{m^2}{4\nu^2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und

$$\frac{m^2}{4\nu^2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}} > \sin^2\frac{\Theta}{2} > \frac{m^2}{4\nu^2}\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} \tag{4}$$

bestimmt den Gültigkeitsbereich.

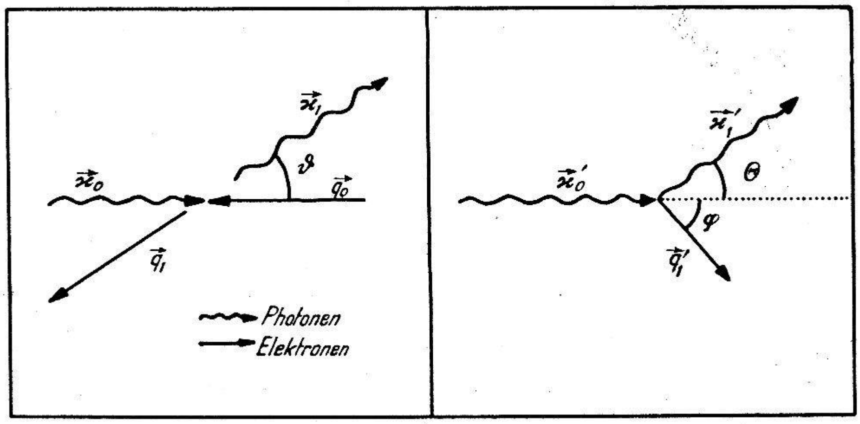

Fig. 1.
Schwerpunktsystem.

Fig. 2.
Laboratoriumsystem.

Den ausgeschlossenen Streuprozessen ($\vartheta < \vartheta_0$, $\vartheta > \pi - \vartheta_0$) entsprechen Rückstosselektronen $\vec{q}_1'$, für die

a) bei $\vartheta < \vartheta_0$: $0 < |\vec{q}_1'| < 2\,m$, φ beliebig

b) bei $\vartheta > \pi - \vartheta_0$: $|\vec{q}_1'| \sim \frac{m}{2\cos^2\vartheta/2} \gg m$, $\varphi \sim \cos^2\frac{\vartheta}{2} \ll 1$

(„knock-on-Elektronen“)

Daraus ist ersichtlich, dass die von unserer Formel nicht wiedergegebenen Prozesse gerade die experimentell bezüglich Winkelverteilung uninteressantesten, wenn auch häufigsten (b) sein werden.

Es ist hier noch zu beachten, dass die entsprechende Vernachlässigung in der Klein-Nishina-Formel selber ($d\sigma_4$) erst bei viel höheren Energien gemacht werden darf, da die Terme $\sim m^2/\nu^2$ in $d\sigma_4$ für nicht allzu hohe Energien von derselben Grössenordnung sein werden wie unsere Korrekturen $d\sigma_6$. Dennoch werden wir im folgenden $d\sigma_4$ stets nur in dieser Näherung anschreiben, da es für uns nur zur Festlegung der Grössenordnung dient.

Die sehr langwierige und an und für sich uninteressante Rechnung liefert nun folgendes Resultat: Mit den Bezeichnungen

$$\alpha = e^2 = \frac{1}{137}\,; \quad \tau = \frac{4\,\nu^2}{m^2}\,; \quad \lambda = \sin^2\frac{\vartheta}{2}\,, \quad \mu = \cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

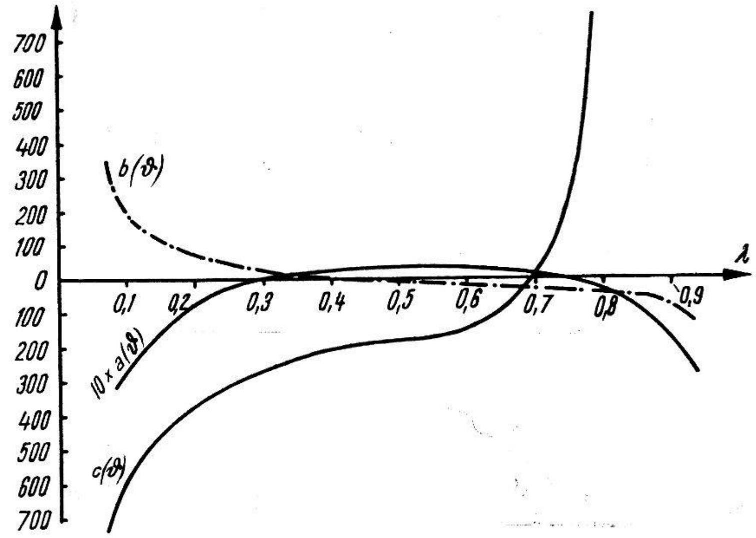

Fig. 3.

ist der differentielle Wirkungsquerschnitt (in der oben diskutierten Näherung) im Schwerpunktssystem für einen Comptoneffekt, bei bei welchem das Lichtquant in den Raumwinkel $d\,\Omega$ gestreut wird und kein anderes Quant von einer Energie $> \omega$ ($\omega \ll m$) emittiert wird:

$$d\sigma = d\sigma_4 + d\sigma_6'(\omega) + d\sigma_6'' \tag{6}$$

wo

$$d\sigma_4 = \frac{d\,\Omega}{\nu^2} \cdot \frac{\alpha^2}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) \tag{7}$$

die Klein-Nishina-Formel und

$$d\sigma_6'(\omega) = -\frac{2\,\alpha}{\pi}\log\omega\big(1 - \log(\lambda\,\tau)\big)\cdot d\sigma_4 \tag{8}$$

$$d\sigma_6'' = \frac{d\,\Omega}{\nu^2}\,\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{\alpha}{2\,\pi}\left[(\log\tau)^2\cdot a(\vartheta) + \log\tau\cdot b(\vartheta) + c(\vartheta)\right] \tag{9}$$

Dabei sind a(ϑ), b(ϑ), c(ϑ) komplizierte Winkelfunktionen, die sich rational in $F(\lambda/\mu)$, $\log \lambda$, $\log \mu$, λ, μ ausdrücken und deren detaillierte formelmässige Wiedergabe sich hier nicht lohnt. Wir begnügen uns mit einer graphischen Darstellung (Fig. 3).

Fig. 4 gibt den Verlauf von

$$g(\vartheta) = \frac{\alpha}{2\pi}\left[(\log \tau)^2 a(\vartheta) + \log \tau \cdot b(\vartheta) + c(\vartheta)\right]$$

für drei Werte der Energie: $\tau = 40$, $\tau = 400$, $\tau = 4000$ (entsprechend Energien des einfallenden Photons im Ruhsystem von 10, 100, 1000 MeV) zusammen mit $f(\vartheta) = \mu + 1/\mu$ zum Vergleich.

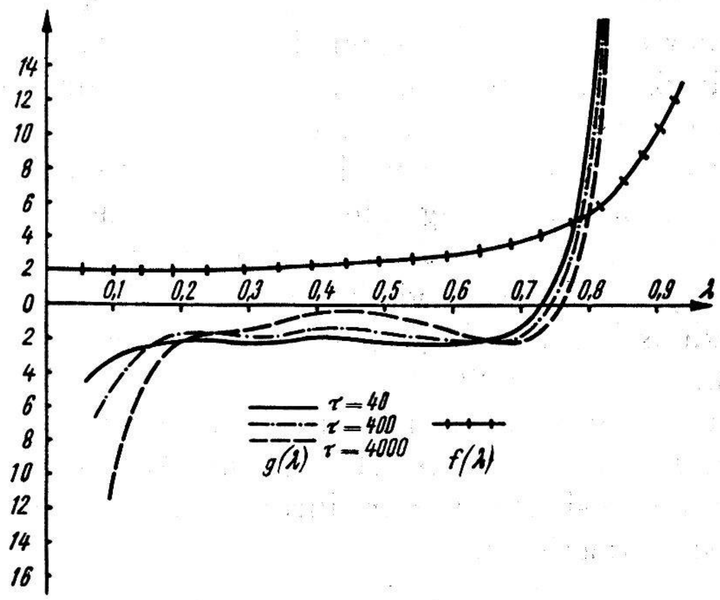

Fig. 4.

Man erkennt, dass $d\sigma''_6$ im Mittel in der Grössenordnung von 10% von $d\sigma_4$ liegt und im grossen und ganzen denselben Verlauf mit ϑ hat, abgesehen von den Rändern des Gültigkeitsbereiches und von einem kleinen, mit der Energie zunehmenden Buckel bei $\vartheta \sim 80^0$.

Zur experimentellen Prüfung dieser Ergebnisse bieten sich zwei Möglichkeiten:

a) Messung des absoluten differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\sigma_6$. Die von $d\sigma''_6$ gelieferten Korrekturen sind hier zwar beträchtlich, doch dürfte der Einfluss von $d\sigma_6'(\omega)$ experimentell schwer zu erfassen sein. Er erfordert nämlich neben der Streuwinkelmessung entweder eine Energiemessung oder eine Messung der Störung der Winkelkorrelation zwischen gestreutem Elektron und gestreutem Photon. Damit hierbei diese Störung feststellbar wird, darf ω (je nach Apparatur) nicht zu klein gewählt werden, so dass im allgemeinen die Bedingung $\omega \ll m$ nicht erfüllt sein wird. Dann hätte man aber ausser $d\sigma_6'(\omega)$ und $d\sigma_6''$ noch den Doppelcomptoneffekt (d. h. Comptoneffekt unter Emission eines zweiten nicht „kleinen" Photons) mitzuberücksichtigen, was die direkte Prüfung von $d\sigma_6$ erschwert.

b) Messung des relativen differentiellen Wirkungsquerschnittes, etwa $d\sigma_6(\vartheta)/d\sigma_6(\pi/2)$. Hierbei kommt in erster Linie eine Feststellung der Abweichung der Winkelverteilung vom monotonen Verlauf in Frage, bewirkt durch den Buckel von $d\sigma_6''$ bei $\vartheta \sim 80^0$. ($d\sigma_6'(\omega)$ ist monoton.) Dieser Effekt ist jedoch bei 10 MeV nur ca. 1%, bei 100 MeV ca. 4% von $d\sigma_4$, also nur durch sehr genaue Messungen feststellbar. Eine Messung des starken Ansteigens bei $\vartheta \to \pi$ ist einerseits kritisch wegen der Annäherung an die theoretische Gültigkeitsgrenze und sollte deshalb nur bei möglichst hohen Energien durchgeführt werden, anderseits gerät man so (bei Messung der Streuelektronen) in den direkten Strahl der „knock-on"-Elektronen, was bei steigender Energie immer unangenehmer wird. Die Messung des Abfalls bei $\vartheta \to 0^0$ unterliegt demselben Einwand bezüglich der Gültigkeitsgrenze der Formel, andrerseits ist die Emissionsrichtung des Rückstosselektrons beliebig und das gestreute Quant liegt im Strahl.

Es scheint uns demnach, dass die hier gegebenen strahlungstheoretischen Korrekturen zur Klein-Nishina-Formel, obschon auf den ersten Blick bedeutend, nur durch sehr feine experimentelle Methoden feststellbar sind.

Den Herren H. Iklé und C. Enz sei an dieser Stelle für die Auswertung eines grossen Teils der Integrale, Herrn U. Thoma für Kontrolle einiger Zwischenrechnungen mein herzlichster Dank ausgesprochen.