

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 23 (1950)
Heft: IV

Artikel: Theorie der Photospaltung und Bildung von H³ und He³
Autor: Verde, Mario
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112119>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Theorie der Photospaltung und Bildung von H^3 und He^3

von Mario Verde, Physikalisches Institut der ETH. Zürich.

(2. V. 1950.)

Summary: The photodisintegration and the formation by radiative capture of the two nuclei H^3 and He^3 are well suited to give information on the configuration of these nuclei and on the nature of nuclear forces. Therefore experiments on these reactions are highly desirable. In this paper we have treated the problem theoretically. We have systematically taken into account the symmetry properties in ordinary space and in the spin and isotopic spin spaces. In the first section we give the formalism which we have used. In the second we discuss the spacial configuration of the ground states of H^3 and He^3 , which appears to be predominantly totally symmetric in the space coordinates. In the third section we discuss the magnetic transition into a final state which consists of a 3S deuteron and a free nucleon. This transition is forbidden for configurations totally symmetrical in space. This accounts for the observed low capture cross section for thermal neutrons on deuterons. In the fourth section we calculate the electric transition into a final state consisting of a 3S deuteron and a nucleon. Fig. 1 gives the numerical results for the total cross section. In section five we have considered the case of the direct transition into three free nucleons. In the last section we present the formulae for the cross section of the capture of a nucleon by a 3S deuteron. Possible comparison with experiment is discussed in the concluding remarks.

Einleitung.

Die Kenntnis der Konfigurationen, die drei Nukleonen unter den gegenseitigen Wechselwirkungen annehmen können, kann uns für das Verständnis der Kernkräfte einen bedeutenden Beitrag liefern. Selbst wenn wir imstande wären, auf Grund von Daten, die sich auf Zweikörperprobleme beziehen, das Kernpotential in endgültiger Weise zu ermitteln, so wäre es dennoch sehr wichtig, die Gültigkeit eines solchen Potentials für Dreikörperprobleme zu prüfen. Letztere sind im allgemeinen, was die Abhängigkeit von Spin und Isotopenspin betrifft, bei niedrigen Energien empfindlicher als die Zweikörperprobleme. Ferner wäre es von Bedeutung, festzustellen, ob das Gesamtkernfeld einfach aus der Summe der einzelnen Wechselwirkungen besteht oder die sogenannten Mehrkörperkräfte eine Rolle spielen. Die theoretische Behandlung von kernphysikalischen Dreikörperproblemen bietet also ein grosses Interesse. In der Tat schaffen die Existenz zweier gebundener Zustände von drei Nukleonen, nämlich der Kerne H^3 und He^3 , wie auch die Neutron-

Deuteron- und Proton-Deuteron-Streuversuche eine günstige Grundlage für eine theoretische Bearbeitung.

In der vorliegenden Arbeit soll eine Theorie der Spaltung von H^3 und He^3 durch ein elektromagnetisches Feld entwickelt werden. Diese Erscheinungen sind vielleicht am meisten dazu angetan, im Sinne der obigen Betrachtungen Aufschlüsse zu liefern. Da bei der Bildung der betreffenden Kerne die zugehörigen umgekehrten Prozesse auftreten, können die der Bildung entsprechenden Wirkungsquerschnitte leicht abgeleitet werden. Es wäre nützlich, auch solche Reaktionen experimentell eingehend zu untersuchen.

Die einzigen Versuche in dieser Richtung sind, so weit uns bekannt, erst kürzlich von LAURITSEN¹⁾ und Mitarbeitern durchgeführt worden und betreffen die Bildung von He^3 . Diese Autoren haben insbesondere die Winkelverteilung der ausgesandten γ -Quanten untersucht und erhalten praktisch eine reine $\sin^2 \Theta$ -Verteilung. Es wäre von Interesse, auch beim analogen Einfang von Neutronen durch das Experiment festzustellen, ob diese Winkelverteilung die gleiche ist.

Um das theoretische Problem nicht unnötigerweise zu komplizieren, muss man von vornherein alle Konstanten der Bewegung berücksichtigen. Man hat nämlich im Koordinatenraum und Raum des Spins und Isotopenspins die Bezugssysteme so zu wählen, dass diejenigen Gruppen, die vom Hamiltonoperator des Systems gestattet sind, ausreduziert auftreten. Wir haben den hierfür verwendeten Formalismus in § 1 dieser Arbeit zusammengestellt.

Besteht die Wellenfunktion des Grundzustandes der beiden Kerne H^3 und He^3 , was den Raumanteil anbetrifft, überwiegend aus einer vollkommenen symmetrischen Komponente — und die Plausibilität dieser Annahme soll in § 2 nachgewiesen werden — so muss der photomagnetische Übergang verboten (§ 3) sein. Als einzige Möglichkeit bleibt nur der elektrische Übergang, der zu einer Winkelverteilung von der Form $\sin^2 \Theta$ führt. (Vgl. § 4.) Dieser Umstand liefert auch eine Erklärung der bekannten Tatsache, dass der Einfangquerschnitt von Deuteronen für thermische Neutronen sehr klein ist. Bei den in den §§ 3 und 4 behandelten Übergängen wird jeweils ein Nukleon ausgesandt, und es bleibt ein Deuteron im Grundzustand zurück. Der Übergang in ein Kontinuum von drei freien Nukleonen bildet den Gegenstand des § 5. Die Wirkungsquerschnitte für die den Photospaltungen entgegengesetzten Einfangsreaktionen werden im letzten Paragraphen abgeleitet.

Für eine Diskussion der Möglichkeit eines Vergleiches der hier gefundenen Ergebnisse mit dem Experiment sei auf die Schlussbemerkung verwiesen.

1. Der Formalismus.

Wir wollen kurz einen Formalismus beschreiben, von dem wir zum Teil schon für die Theorie²⁾ der elastischen Neutron-Deuteron-Streuung Gebrauch gemacht haben.

Es seien die folgenden drei Symmetrieeoperatoren

$$\left. \begin{aligned} T^s &= \{(23) + (12) + (13)\} \\ T' &= \frac{\sqrt{3}}{2} \{(13) - (12)\} \\ T'' &= -(23) + \frac{1}{2} \{(13) + (12)\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

definiert. Hierbei stellen (12), (13), (23) die Permutationen der Variablen der Nukleonen 1, 2, 3 dar. Die soeben angegebenen Operatoren erzeugen z. B. bei Anwendung auf \vec{r}_1 die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} 3 \vec{q}^s &= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \\ \vec{r} &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \\ \vec{q} &= -\vec{r}_1 + \frac{1}{2} (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Im Bezugssystem dieser Vektoren, das wir in der Folge benutzen werden, lautet der Operator der kinetischen Energie

$$\mathfrak{E} = -\frac{\hbar^2}{6M} \Delta_{q^s} - \frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_r + \Delta_q)$$

wobei mit $m = 2/3 M$ die reduzierte Masse eines Nukleons in bezug auf die beiden anderen bezeichnet ist. Ferner ergibt sich für den Operator des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{M} = \frac{\hbar}{i} [\vec{r}_\kappa \cdot \vec{p}_\kappa] = \frac{\hbar}{i} \{[\vec{q}^s \cdot \vec{p}_{q^s}] + [\vec{r} \cdot \vec{p}_r] + [\vec{q} \cdot \vec{p}_q]\}$$

Im Schwerpunktsystem, auf das wir uns beschränken wollen, werden die kinetische Energie und der Drehimpuls

$$\mathfrak{E} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_r + \Delta_q) \quad M = \frac{\hbar}{i} \{[r \cdot p_r] + [q \cdot p_q]\}$$

Die Operatoren (1) erzeugen in Anwendung auf symmetrische Funktionen zweier Variablen die Basis für die zwei unitären Darstellungen 1 und D. Diese sind Darstellungen der symmetrischen

Gruppe von drei Elementen, nämlich die identische eindimensionale und die zweidimensionale Darstellung D .

$$D \equiv (12) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} & -1/2 \end{pmatrix} \quad (13) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3/2} \\ -\sqrt{3/2} & -1/2 \end{pmatrix} \quad (23) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Im von D bestimmten Unterraum wirken die Operatoren T^s , T' , T'' folgendermassen:

$$T^s = 0 \quad T' = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T'' = +\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Der Produktoperator $T' T''$ antikommutiert

$$T' T'' + T'' T' = 0$$

Ferner gilt

$$T'^2 = T''^2 = 9/4$$

Es ist leicht zu beweisen, dass für drei beliebige Funktionen φ^s , φ' , φ'' der Koordinaten, die sich gegenüber Permutationen nach der Darstellung I bzw. D transformieren, die folgenden Beziehungen

$$\int \varphi^s \varphi' dv = \int \varphi^s \varphi'' dv = \int \varphi' \varphi'' dv = 0 \quad \int \varphi'^2 dv = \int \varphi''^2 dv \quad (4)$$

gelten. Von diesen Formeln werden wir oft Gebrauch machen. Die Integrale sind über den ganzen Raum von \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 zu erstrecken; dessen Volumelement ist $dv = d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3$ und wird im Schwerpunktsystem $d^3 r d^3 q$.

Die Symmetriepoperatoren, die durch (1) definiert wurden, dienen auch zur Festlegung des Bezugssystems im Spin- und Isotopenspinraum. Bei drei Nukleonen kann der Gesamtspin S $3/2$ oder $1/2$ betragen. Auch der Gesamtisotopenspin kann nur diese Werte annehmen.

Betrachtungen, die sich auf den Spin beziehen, lassen sich stets unverändert auf den Isotopenspin übertragen. Deshalb dürfen wir uns in der Folge auf die eine dieser Variablen, nämlich auf den Isotopenspin, beschränken.

Wir bezeichnen mit a_1 und b_1 die beiden Eigenfunktionen der z -Komponente des Isotopenspin des Nukleons 1. Man hat

$$\tau_z^{(1)} a_1 = + a_1 \quad \tau_z^{(1)} b_1 = - b_1$$

Mit Hilfe von (I) werden die folgenden Operatoren im Raum des Isotopenspin eingeführt

$$\left. \begin{aligned} \tau_z^s &= \tau_z^{(1)} + \tau_z^{(2)} + \tau_z^{(3)} \\ \tau_z' &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \{\tau_z^{(3)} - \tau_z^{(2)}\} \\ \tau_z'' &= -\tau_z^{(1)} + \frac{1}{2} \{\tau_z^{(3)} + \tau_z^{(2)}\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Gesamtladung kann durch den symmetrischen Operator τ_z^s allein ausgedrückt werden

$$a = \frac{3 + \tau_z^s}{2} e$$

wobei e die Elektronenladung bedeutet. Es ist

$$\begin{aligned} \text{für } H^3 & \quad \tau_z^s = -1 \\ \text{für } He^3 & \quad \tau_z^s = +1 \end{aligned}$$

Man kann die drei Isotopenspin-Eigenfunktionen von H^3 erzeugen, indem man mit den üblichen Symmetrieeoperatoren auf die Eigenfunktion $a_1 b_2 b_3 \sqrt{2/3}$ wirkt. Man bekommt

$$\begin{aligned} \zeta_-^s &= \frac{1}{\sqrt{2}} T^s (a_1 b_2 b_3) \sqrt{\frac{2}{3}} & \zeta_-' &= T' (a_1 b_2 b_3) \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \zeta_-'' &= T'' (a_1 b_2 b_3) \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Diese Eigenfunktionen sind orthogonal und normiert. Um die entsprechenden Eigenfunktionen des He^3 zu erhalten, muss man in der gleichen Weise auf die Eigenfunktion $b_1 a_2 a_3 \sqrt{2/3}$ wirken. Wir bezeichnen diese drei Funktionen mit $\zeta_+^s, \zeta_+', \zeta_+''$.

Im Raum von ζ^s, ζ', ζ'' werden die Operatoren, die durch (5) definiert sind, durch die folgenden Matrizen dargestellt:

$$\tau_z^s = \pm 1 \quad \tau_z' = \pm \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_z'' = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Wie aus der ersten Gleichung hervorgeht, gilt das Pluszeichen für He^3 und das Minuszeichen für H^3 .

Da der symmetrische Operator $\tau_z^{(1)} \cdot \tau_z^{(2)} \cdot \tau_z^{(3)}$ unsere Basis invariant lässt, können wir auch schreiben

$$\tau_z^{(1)} \tau_z^{(2)} + \tau_z^{(1)} \tau_z^{(3)} + \tau_z^{(2)} \tau_z^{(3)} = \tau_z^s \quad (7)$$

Diese Betrachtungen genügen nur für Spinzustände, die symmetrisch sind gegenüber Permutationen der drei Teilchen, d. h. für Spin $3/2$. Da wir wissen, dass die Grundzustände von H^3 und He^3 zum Gesamtspin $1/2$ gehören, ist es nötig, die Spineigenfunktionen χ' und χ'' , die sich nach der Darstellung D transformieren, einzuführen. Infolgedessen muss man die Produktdarstellung $D_\sigma \cdot D_\tau$ ausreduzieren. Die Basis im Produktraum lautet bekanntlich³⁾⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \xi^s &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta' + \chi'' \zeta'') \\ \xi^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta'' - \chi'' \zeta') \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta'' + \chi'' \zeta') \\ \xi'' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi' \zeta' - \chi'' \zeta'') \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Diese Eigenfunktionen sind orthogonal und normiert. ξ^s ist vollkommen symmetrisch, ξ^a ist vollkommen antisymmetrisch und ξ' , ξ'' transformieren sich nach der Darstellung D , unter gleichzeitigen Permutationen der Spin- und Isotopenspinvariablen. Es ist klar, wie sich die neue Basis aus denjenigen der einzelnen Räume zusammensetzt. Es ist zu beachten, dass eine solche Zusammensetzung mit irgendwelchen Variablenpaaren, die sich nach D transformieren, vorgenommen werden kann, und zwar unter Erzeugung derselben Symmetrieklassen. So kann man z. B. aus den zwei Vektoren \vec{r} und \vec{q} , deren Komponenten sich nach D transformieren, das invariante Polynom $r^2 + q^2$ bilden; ferner transformieren sich die beiden Ausdrücke $2(\vec{r} \cdot \vec{q})$, $(r^2 - q^2)$ nach D .

Natürlich hat man zwei Sätze von ξ -Funktionen, die den zwei Werten der z -Spinkomponente entsprechen. Dieses wird durch ein tiefgestelltes Plus- bzw. Minuszeichen gekennzeichnet.

Es ist wichtig, zu wissen, wie die Operatoren τ_z' und τ_z'' im Raum der ξ wirken. Mit Hilfe von (6) können die folgenden Beziehungen

$$\tau_z' \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^a \\ \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\xi' - \chi' \zeta^s \\ -\xi'' + \chi'' \zeta^s \\ -\xi^s - \chi' \zeta^s \\ -\xi^a - \chi' \zeta^s \end{pmatrix} \quad \tau_z'' \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^a \\ \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\xi'' - \chi'' \zeta^s \\ +\xi' - \chi' \zeta^s \\ +\xi^a - \chi' \zeta^s \\ -\xi^s + \chi'' \zeta^s \end{pmatrix} \quad (9)$$

leicht abgeleitet werden. Das Plus- bzw. Minusvorzeichen entspricht, wie üblich, der Ladung, d. h. He^3 bzw. H^3 . Das Auftreten von ζ^s in (9) bedeutet, dass die Operatoren τ_z' und τ_z'' den Isotopenspin nicht invariant lassen. Wir werden mit S den folgenden ganz symmetrischen Operator

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_z' \tau_z' + \sigma_z'' \tau_z'') \quad (10)$$

bezeichnen. σ_z' und σ_z'' sind für die Spinvariablen analog definiert

wie τ'_z und τ''_z für den Isotopenspin. Da σ'_z und σ''_z in gleicher Weise wie τ'_z , τ''_z operieren, kann man leicht zeigen, dass

$$S \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^a \\ \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \xi^s + \sqrt{2} \chi^s \zeta^s \\ -\xi^a \\ \chi' \zeta^s + \zeta' \chi^s \\ \chi'' \zeta^s + \zeta'' \chi^s \end{pmatrix} \quad (11)$$

Das positive Vorzeichen bezieht sich auf den Fall, in dem die z -Komponenten des Spins und Isotopenspins gleichzeitig positiv oder negativ sind. Das negative Vorzeichen hingegen gilt für den Fall, dass diese beiden Komponenten ein entgegengesetztes Vorzeichen haben. S lässt also weder den Gesamtspin noch den Isotopenspin unverändert. Es sei hervorgehoben, dass S im Zustand ξ^a dennoch diagonal ist. Hiervon werden wir später Gebrauch machen. Aus (11) geht hervor, dass mit $\sigma_z^s = +1$

$$\xi^{s*} S \xi^s = \pm 1 \quad \xi^{a*} S \xi^a = \mp 1 \quad \xi'^* S \xi' = \xi'' S \xi'' = 0$$

gilt. Das obere Vorzeichen entspricht He^3 , das untere H^3 . Nach diesen formalen Betrachtungen gehen wir zur Erörterung der Grundzustände dieser beiden Kerne über.

§ 2. Die Grundzustände.

Die experimentellen Daten, die sich auf die Grundzustände von H_3 und He_3 beziehen, sind die Bindungsenergie, der Gesamtspin und das magnetische Moment. Die besten Werte der Bindungsenergien leiten sich aus den Kernreaktionen⁵⁾

$$\begin{aligned} D + D &\rightarrow H^3 + p + Q_1 & Q_1 &= 4,036 \pm 0,022 \text{ MeV} \\ D + D &\rightarrow He^3 + n + Q_2 & Q_2 &= 3,265 \pm 0,018 \text{ MeV} \end{aligned}$$

ab und betragen:

$$\begin{aligned} B_H &= 2 B_\alpha - Q_1 = -8,510 \pm 0,091 \text{ MeV} \\ B_{He} &= 2 B_\alpha - Q_2 = -7,739 \pm 0,1 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Hierbei wurde für die Bindungsenergie des Deuterons der Wert $B_\alpha = -2237 \pm 5 \text{ KeV}$ aus der Bestimmung von BELL und ELLIOT⁶⁾ eingesetzt. Für die Differenz der Bindungsenergien erhält man⁵⁾

$$B_H - B_{He} = Q_1 - Q_2 = 771 \pm 6 \text{ keV}$$

*) Eine andere Quelle zur Bestimmung dieser zwei Bindungsenergien ist die Maximalenergie des β -Zerfalls des Tritons (vgl. HANNA und PONTECORVO, Phys. Rev. **75**, 983 (1949)). Mit der massenspektroskopischen Differenz $2 H^1 - H^2 = 1,432 \pm 0,002 \text{ MeV}$ bekommt man $B_D = -2,221 \pm 0,006 \text{ MeV}$ und infolgedessen $B_H = -8,478 \pm 0,07 \text{ MeV}$, $B_{He} = -7,707 \pm 0,06 \text{ MeV}$.

Die Messung der magnetischen Momente ergab für das Triton⁷⁾⁹⁾

$$\mu_r = + 2,9786 \text{ KM}$$

und für He^{3 2)10)}

$$\mu_{\text{He}} = (-) 2,1274 \text{ KM}$$

Ferner ist experimentell auch sichergestellt⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾, dass die Grundzustände von H³ und He³ einen Gesamtspin $S = 1/2$ haben.

Schon aus diesen Daten lassen sich einige Schlüsse ziehen. So kann man u. a. aussagen, dass auch der Isotopenspin der beiden Grundzustände $1/2$ beträgt. In der Tat kann eine Konfiguration, die im Koordinatenraum vollkommen symmetrisch ist, nur im Fall von $S = 1/2$ und $T = 1/2$ auftreten. Eine solche Konfiguration wäre dagegen im Fall von $S = 1/2$ und $T = 3/2$ ausgeschlossen. Überdies müssen die Grundzustände zu den ersteren Quantenzahlen gehören, denn bei gleicher potentieller Energie besitzen bekanntlich die symmetrischen Konfigurationen eine kleinere kinetische Energie. Auf Grund der gleichen Tatsache ist ohne weiteres einzusehen, dass ein Niveau mit $S = 3/2$ und $T = 1/2$ sicher höher liegt. Dessen ungeachtet sprechen die gemessenen magnetischen Momente dafür, dass die in Frage stehenden Grundzustände zum Isotopenspin $T = 1/2$ gehören.

Das gesamte magnetische Moment unseres Systems lautet

$$\begin{aligned} \mu = \sum_k^3 \sigma_z^{(k)} \left(\frac{1 + \tau_z^{(k)}}{2} \mu_P + \frac{1 - \tau_z^{(k)}}{2} \mu_N \right) &= \frac{\mu_P + \mu_N}{2} \sigma_z^s \\ &+ \frac{\mu_P - \mu_N}{3} \left(\frac{\sigma_z^s \tau_z^s}{2} + 2S \right) \end{aligned} \quad (13)$$

wo wie üblich $\sigma_z^s = T^s \sigma_z^{(1)}$; S ist durch (10) definiert. z ist die Richtung bei der $\sigma_z^s = +1$, wie es nach der Definition des magnetischen Moments sein muss.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass S in einem Zustand mit $S = 1/2$ und $T = 3/2$ verschwindet. In diesem Fall gilt nämlich*)

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2}{3} \mu_P + \frac{1}{3} \mu_N && \text{für He}^3 \\ \mu &= \frac{2}{3} \mu_N + \frac{1}{3} \mu_P && \text{für H}^3 \end{aligned} \quad (14)$$

Diese Werte stehen in Widerspruch zu den experimentellen Ergeb-

*) Um die magnetischen Momente der Zustände von H³ aus denen von He³ zu bekommen, braucht man nur μ_N mit μ_P zu vertauschen. In der Tat wechseln τ_z^s und S das Vorzeichen, wenn man von einem zum andern dieser Kerne übergeht.

nissen. Im Zustand $S = 1/2$, $T = 1/2$ gilt dagegen, und zwar für den vollkommen symmetrischen Raumanteil, der mit der Spineigenfunktion ξ^a gekoppelt ist

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_N && \text{für } He^3 \\ \mu &= \mu_P && \text{für } H^3\end{aligned}\quad (15)$$

Die Tatsache, dass im Zustand ξ^s für die magnetischen Momente die folgenden Werte erhält

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{4}{3} \mu_P - \frac{1}{3} \mu_N && \text{für } He^3 \\ \mu &= \frac{4}{3} \mu_N - \frac{1}{3} \mu_P && \text{für } H^3\end{aligned}$$

beweist, dass der vollkommen antisymmetrische Raumanteil der Eigenfunktion des Grundzustandes praktisch kaum vorhanden sein kann. Der Umstand, dass die kinetische Energie bei den antisymmetrischen Konfigurationen immer sehr gross ist, kann als eine weitere Bekräftigung dieser Behauptung angesehen werden. Da sich für den Zustand ξ' , ξ'' die gleichen magnetischen Momente ergeben wie für $S = 1/2$, $T = 3/2$ (vgl. (14)), kann man eine starke Beimischung eines solchen Zustandes ausschliessen. Der Zustand (ξ', ξ'') liefert in der Tat einen Beitrag zu den magnetischen Momenten, der gerade im entgegengesetzten Sinn zu den Zusätzen geht, die man braucht, um ausgehend von (15) die experimentell gefundenen Werte zu erklären. Andererseits legt man sich von dieser Tatsache auch dann Rechenschaft ab, wenn man durch ein Variationsverfahren die Beimischung numerisch ermittelt. Für Einzelheiten sei auf eine andere Arbeit¹¹⁾ verwiesen.

Für den Grundzustand machen wir folgenden vollkommen symmetrischen Ansatz

$$\varphi^s = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\kappa}{\mu}\right)^3 \cdot e^{-\frac{\kappa^2}{2\mu^2}(r^2 + q^2)} \quad (16)$$

Diese Funktion ist im Raum von \vec{r} und \vec{q} normiert:

$$\int |\varphi^s|^2 dv = 1$$

Mit einem Potential U_{23} zwischen den Nukleonen 2 und 3 vom Typus der symmetrischen Mesontheorie

$$\frac{2m}{\hbar^2} U_{23} = \frac{1}{3} (\tau^{(2)} \cdot \tau^{(3)}) \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} g\right) + \frac{1}{2} g (\sigma^{(2)} \cdot \sigma^{(3)}) \right\} \frac{e^{-\kappa r}}{\kappa r} \cdot s \kappa^2$$

bekommt man für den Variationsparameter den Wert $\mu = 1,40$.

Wir haben die Werte, $2/(\kappa \sqrt{3}) = 1,18 \cdot 10^{-13}$ cm für die Reichweite und $s = 2,285$ angenommen. Diese numerischen Werte sind den Zweikörperproblemen entnommen. Für die Bindungsenergie des Tritons ergibt sich $B_H = -2,45$ MeV.

Wenn für die Reichweite ein grösserer Wert angenommen oder die Tensorkraft berücksichtigt wird, so erhält man für die Bindungsenergie grössere Werte. Dass die Bindungsenergie immer zu klein herauskommt, dürfte zum Teil dem für den Grundzustand gemachten Ansatz zuzuschreiben und zum Teil eine Folge der benützten Wechselwirkung sein. Wir wollen den Parameter μ aus der Coulomb'schen Abstossung der zwei Protonen in He^3 wieder bestimmen. Dabei wird die Annahme gemacht, dass die Differenz der Bindungsenergien von H^3 und He^3 als reine Coulombsche Energie angesehen werden kann. Der dieser Energie entsprechende Operator ist:

$$E_c = e^2 \sum_{i < k}^{1,2,3} \frac{1 + \tau_z^{(i)}}{2} \frac{1 + \tau_z^{(k)}}{2} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

Aus (7) folgt:

$$E_c = \frac{e^2}{4} (1 + \tau_z^s) \cdot T^s \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

Für He^3 gilt also

$$E_c = \frac{e^2}{2} T^s \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} \right)$$

und für den in (16) angegebenen Zustand wird

$$E_c = \frac{3 e^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\kappa \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\mu}$$

Daraus folgt mit $E_c = 771$ keV und mit dem schon benützten Wert von κ ; $\mu = 2,68$. Für die numerische Berechnung der Wirkungsquerschnitte werden wir von diesem zweiten Werte Gebrauch machen. Will man andererseits auch die Beimischung (φ' , φ'') mit einbeziehen, so hat man für den Grundzustand eine Eigenfunktion folgender Art

$$\varphi = \varphi^s \xi^a + \varphi' \xi'' - \varphi'' \xi'$$

zu wählen. Um dem PAULIprinzip Genüge zu leisten, müssen sich φ' und φ'' nach der Darstellung D transformieren (vgl. die zweite

Gleichung von (11)). Man kann für die drei Funktionen φ^s , φ' , φ'' z. B. den folgenden Ansatz¹²⁾ machen

$$\varphi^s = \sqrt{N^s} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{\kappa}{\mu} \right)^3 e^{-\frac{\kappa^2}{2\mu^2} (r^2 + q^2)} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \sqrt{\frac{N'}{3}} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{\kappa}{\nu} \right)^5 \cdot 2(\vec{r} \cdot \vec{q}) e^{-\frac{\kappa^2}{2\nu^2} (r^2 + q^2)} \\ \varphi'' &= \sqrt{\frac{N'}{3}} \left(\frac{1}{\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{\kappa}{\nu} \right)^5 (r^2 - q^2) e^{-\frac{\kappa^2}{2\nu^2} (r^2 + q^2)} \end{aligned} \right\} \quad (17)'$$

Diese Funktionen gehören den richtigen Symmetrieklassen an, wie aus den Bemerkungen, die wir hinsichtlich der Beziehung (11) gemacht haben, hervorgeht. Für die Normierung muss $N^s + 2 N' = 1$ gelten. Das Variationsverfahren liefert für N' , mit den gleichen Konstanten wie oben, einen ausserordentlich kleinen Wert¹¹⁾. Die Bindungsenergie nimmt den grösseren Wert $B_H = -3,1$ Mev an. Für ν erhält man $\nu = 1,0$. Obzwar man diesen Wert von ν nicht allzuviel Vertrauen schenken darf, bleibt jedoch die Tatsache erwiesen, dass die Beimischung der Raumanteile (φ' , φ'') im Grundzustand nur sehr klein sein kann. Wir gehen nun zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte für die Photospaltung über.

§ 3. Magnetische Übergänge.

Wir wollen, wie üblich, unterscheiden zwischen Übergängen, die vom magnetischen Feld und Übergängen, die vom elektrischen Feld der einfallenden Strahlung herrühren. Wir beginnen mit den ersteren.

Wir beschränken uns auf den Fall, dass das magnetische Feld innerhalb des Kernes als konstant angesehen werden darf, d. h. wir betrachten nur die Dipolübergänge.

Die Wechselwirkung ist

$$H'_m = -\mu_z H_z$$

μ_z ist die Komponente des magnetischen Momentes des Kernes in der Feldrichtung, die zum Wellen- und zum Polarisationsvektor der einfallenden Strahlung senkrecht steht. Wir verwenden für μ_z den Ausdruck (13)

$$\mu_z = \left\{ \frac{\mu_P + \mu_N}{2} \sigma_z^s + \frac{\mu_P \cdot \mu_N}{3} \left(\frac{\sigma_z^s \cdot \tau_z^s}{2} + 2S \right) \right\} \frac{e\hbar}{2Mc}$$

Wird mit $\hbar \omega$ die Energie der γ -Quanten bezeichnet, so muss man bekanntlich für die normierte Feldstärke

$$H_z = \sqrt{2\pi\hbar\omega}$$

einsetzen.

Die Tatsache, dass ξ^a , wie schon bemerkt, eine Eigenfunktion von S ist, bringt mit sich, dass ein magnetischer Dipolübergang von einem im Raumanteil symmetrischen Zustand φ^s aus verboten ist. In der Tat ist der symmetrische Zustand des Kontinuums, der zu den gleichen Quantenzahlen $S = 1/2$ und $T = 1/2$ gehört, auf dem Grundzustand orthogonal. Dieser Umstand kann als Erklärung für die bekannte experimentelle Tatsache herangezogen werden, dass der Einfangquerschnitt des Deuterons für thermische Neutronen sehr klein ist.

Will man den Übergang vom Raumanteil φ', φ'' des Grundzustandes ins Kontinuum berechnen, so wirkt man mit dem Operator (13) auf die Funktion

$$\varphi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \{(\varphi' \xi''_+ - \varphi'' \xi'_+) + (\varphi' \xi''_- - \varphi'' \xi'_-)\}$$

Der diagonale Teil des genannten Operators liefert natürlich keinen Beitrag zum Übergang und man darf sich auf den Operator

$$\frac{e\hbar}{Mc} \cdot \frac{\mu_P - \mu_N}{3} S$$

beschränken. Aus (11) folgt für He^3

$$S\varphi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varphi'(\chi''_+ \zeta^s + \zeta'' \chi^s_+) - \varphi''(\chi'_+ \zeta^s + \zeta' \chi^s_+) - \varphi'(\chi''_- \zeta^s + \zeta'' \chi^s_-) + \varphi''(\chi'_- \zeta^s + \zeta' \chi^s_-) \}$$

Für H^3 genügt es, das Vorzeichen zu wechseln. Die Quantenzahlen des Endzustandes müssen entweder $S = 1/2$ und $T = 3/2$ oder $S = 3/2$ und $T = 1/2$ sein. Von diesen Möglichkeiten ist die zweite weitaus wichtiger, denn in diesem Fall kann der Endzustand aus einem Deuteron im Grundzustand 3S und einem freien Nukleon bestehen. Der andere Fall würde einem Deuteron im 1S -Zustand, der symmetrisch in den Ladungskordinaten ist, und einem freien Nukleon entsprechen. Die Berechnung der diesem letzten Fall entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeit soll weiter unten in Zusammenhang mit dem direkten Übergang in drei freie Nukleonen

durchgeführt werden (vgl. § 5). Das Matrixelement, das wir berechnen wollen, lautet also

$$\int \varphi_e^* H'_m \varphi_a dv = \frac{e\hbar}{Mc} \cdot \sqrt{\pi\hbar\omega} \frac{\mu_P - \mu_N}{3} \int (\varphi'_e \varphi' + \varphi''_e \varphi'') dv = M_{ea} \quad (19)$$

wobei über den Spin bereits aufsummiert wurde.

Für die Berechnung des Wirkungsquerschnitts benutzt man die übliche Formel der Störungstheorie

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} |M_{ea}|^2 \cdot \varrho_e$$

Für den Endzustand machen wir den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_e &= T' \varphi_e \\ \varphi''_e &= T'' \varphi_e \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Wir verweisen auf die Arbeit²⁾ für weitere Erklärungen. Der asymptotische Ausdruck für φ_e ist für grosse Werte von q

$$\varphi_e \simeq \frac{1}{3} g(r) \cdot \frac{\sin(kq + \delta_4)}{kq}$$

Für He^3 ist die S -Welle im Coulombfeld des Deuterons einzusetzen. Mit $g(r)$ bezeichnen wir die im \vec{r} -Raum normierte Eigenfunktion des Deuterons im 3S -Zustand. δ_4 ist die Phase im Quartettzustand der S -Streuung eines Neutrons am Deuteron. Wie üblich

$$\varrho_e = \frac{k_q^2 dk_q d\omega}{dE} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \quad E = \hbar\omega - |B| = \frac{\hbar^2 k_q^2}{2m}$$

$\frac{\hbar^2 k_q^2}{2m}$ ist die kinetische Energie der Relativbewegung des auslaufenden Nukleons in bezug auf das Deuteron. Die Schwellenwerte der betreffenden Reaktion betragen:

$$B_H = -8,50 + 2,23 = -6,27 \text{ MeV für } H^3$$

$$B_{He} = -7,73 + 2,23 = -5,50 \text{ MeV für } He^3$$

Mit Hilfe von (20) und (3), (4) wird das Matrixelement

$$M_{ea} = \frac{e\hbar}{Mc} \sqrt{\pi\hbar\omega} (\mu_N - \mu_P) \int \varphi'_e \varphi'' dv$$

Wir wollen uns mit einer Abschätzung der Grössenordnung begnügen, indem wir für φ_e das Produkt einer GAUSS'schen Funktion mit einer freien S -Welle ansetzen:

$$\varphi_e = \left(\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{3/2} e^{-\alpha^2 r^2} \frac{\sin k_q q}{k_q q}$$

Für den Wirkungsquerschnitt bekommt man

$$\sigma = N' \frac{4}{3} (2\pi)^{3/2} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 (\mu_N - \mu_P)^2 \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon_b) \left(\frac{\varepsilon v^2}{3} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right)^2 \left(\frac{\alpha \kappa}{\beta^2} \right)^3 e^{-v^2 \varepsilon} \quad (21)$$

Wir haben (17)' benutzt und folgende Abkürzung eingeführt

$$\kappa^2 \varepsilon = k_q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\hbar\omega - |B|) \quad \kappa^2 \varepsilon_b = \frac{2m}{\hbar^2} |B| \quad \left(\frac{\beta}{\kappa} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right)^2 + \frac{1}{2v^2}$$

§ 4. Elektrische Übergänge.

Die Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld der einfallenden Strahlung, die durch ein Vektorpotential \vec{A} beschrieben wird, lautet bekanntlich

$$H'_{el.} = \frac{1}{c} \sum_k e_k (\vec{A}(\vec{r}_k) \cdot \vec{v}_k)$$

Dabei bedeutet e_k die Ladung des k -ten Nukleons und \vec{v}_k seine Geschwindigkeit. Für elektrische Dipolübergänge, auf die wir uns beschränken dürfen, ist \vec{A} im Kerninnern konstant. Es gilt mit der üblichen Normierung

$$\vec{A} = \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \vec{n}$$

\vec{n} bezeichnet einen Einheitsvektor in der Polarisationsrichtung, die wir als z -Achse wählen wollen. Es ist also

$$H'_{el} = \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \sum_k \frac{1 + \tau_z^{(k)}}{2} \cdot v_z^{(k)} \quad (22)$$

Es ist vorteilhaft diese Formel in folgender Weise umzuschreiben:

$$H'_a = \frac{1}{3} \frac{e}{\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \{v_z^s + \tau_z^s v_z^s + \tau_z' v_z' + \tau_z'' v_z''\}$$

Dabei

$$v_z^s = T^s v_s^{(1)} \quad v_z' = T' v_z^{(1)} \quad v_z'' = T'' v_z^{(1)}$$

Im Schwerpunktsystem erhält man mit der Definition (2)

$$H'_{el} = \frac{e}{3\omega} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \{ \tau_z' \dot{r}_z + \tau_z'' \dot{q}_z \}$$

Die Operatoren \dot{r}_z und \dot{q}_z können auch folgendermassen geschrieben werden

$$\dot{r}_z = -i\omega r_z \quad \dot{q}_z = -i\omega q_z$$

Man hat also

$$H'_{el} = -i \frac{e}{3} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \{ \tau_z' r_z + \tau_z'' q_z \}$$

Der Wirkungsquerschnitt lautet wie üblich

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} \cdot |M_{ea}|^2 \cdot \varrho_e$$

Wir wollen zunächst für die Berechnung des Matrixelementes M_{ea} mit der überwiegenden Komponente anfangen, d. h. also annehmen, dass der Grundzustand in den Raumkoordinaten vollkommen symmetrisch ist. Mit Hilfe von (3) und (4) wird

$$H' \cdot \varphi^s \xi^a = \mp i \frac{e}{3} \sqrt{2\pi \hbar \omega} \{ (\xi' q_z - \xi'' r_z) + \zeta^s (\chi'' r_z - \chi' q_z) \} \varphi^s$$

Das Minus- und Pluszeichen gelten für H^3 bzw. He^3 .

Der Spin wird natürlich erhalten, was dagegen für den Isotopenspin nicht der Fall ist. Der Übergang in den Endzustand mit $T = 3/2$ soll bei der Spaltung in drei freie Nukleonen (vgl. § 5) berücksichtigt werden. Wenn für den Endzustand $T = 1/2$ ist, so kann ein 3S -Deuteron und ein freies Nukleon entstehen, welches wegen der Erhaltung des Drehimpulses als P -Welle ausläuft. Wir können den Ansatz

$$\psi_e = -\varphi_e^s \xi^a + \varphi_e' \xi'' - \varphi_e'' \xi'$$

verwenden, bei dem wir, wie schon bemerkt (vgl. (20)),

$$\varphi_e^s = T^s \varphi_e$$

$$\varphi_e' = T' \varphi_e$$

$$\varphi_e'' = T'' \varphi_e$$

wählen. Dabei setzen wir für φ_e an

$$\varphi_e = \frac{1}{3\sqrt{2}} g(r) \cdot e^{i(\vec{k}q \cdot \vec{q})}$$

Mit Hilfe von (3) und (4) bekommt man für das Matrixelement

$$\int \psi_e^* H'_{el} \varphi_a dv = \pm i \frac{e}{3} \sqrt{\pi \hbar \omega} \int g^*(r) e^{-i(\vec{k}q \cdot \vec{q})} q_z \varphi^s dv$$

Hierbei ist über die Spins schon aufsummiert. Wir erinnern, dass die Spineigenfunktion des 3S -Deuteron $\chi'' \zeta' = (1/\sqrt{2}) (\xi' - \xi^a)$ lautet.

Wir verweisen auf den Anhang für die Berechnung des Integrals. Man erhält, mit einer φ^s gemäss (17)

$$\kappa^2 d\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{9} \frac{e^2}{\hbar c} \mu^4 \left(\frac{\alpha \kappa}{\beta_\mu^2} \right)^3 \varepsilon^{3/2} (\varepsilon + \varepsilon_b) e^{-\mu^2 \varepsilon} \sin^2 \Theta d\omega \quad (23)$$

Θ ist der Winkel zwischen dem Impuls des ausgesandten Nukleon und dem Wellenvektor der einfallenden Strahlung. Der totale Wirkungsquerschnitt wird

$$\kappa^2 \sigma = \frac{4}{27} (2\pi)^{3/2} \frac{e^2}{\hbar c} \mu^4 \left(\frac{\alpha \kappa}{\beta_\mu^2} \right)^3 \varepsilon^{3/2} (\varepsilon + \varepsilon_b) e^{-\mu^2 \varepsilon} \quad (24)$$

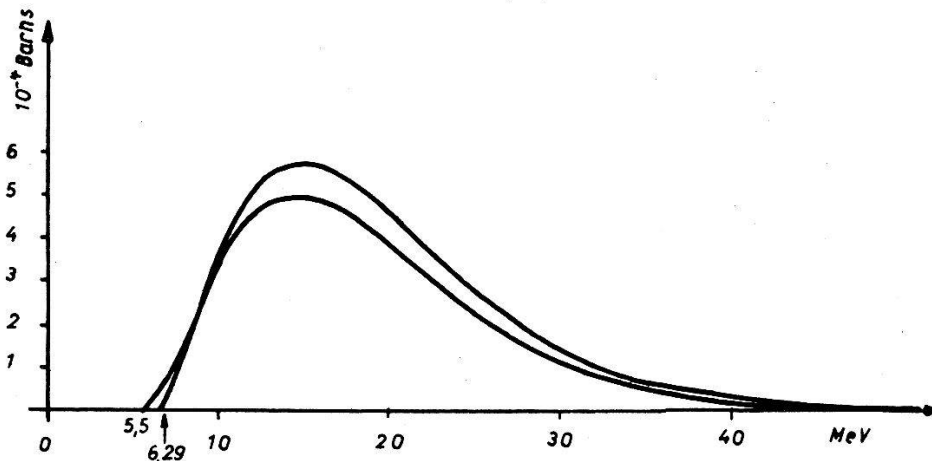


Fig. 1.

Totaler Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung von H^3 und He^3 in ein ^3S -Deuteron und ein freies Nukleon als Funktion der Energie der einfallenden γ -Quanten. Die obere Kurve bezieht sich auf H^3 , die untere auf He^3 .

Die exponentielle Energieabhängigkeit bei grossen Energien ist als Folge des für die Wellenfunktion des Grundzustandes gemachten GAUSS'schen Ansatzes anzusehen. Bei asymptotisch exponentiellem Verlauf dieser Wellenfunktion würde man eine hyperbolische Energieabhängigkeit bekommen. Im Fall von He^3 ist zur Berücksichtigung des Coulomb-Feldes der bekannte Faktor

$$\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}$$

anzubringen. Hierbei bedeutet

$$\eta = \frac{e^2}{\hbar v} = \frac{me^2}{\kappa \hbar^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Für die numerische Auswertung der Formel (24) für H^3 und He^3 verweisen wir auf die Figur.

Man kann auch hier den Anteil φ' , φ'' der Eigenfunktion des Grundzustandes berücksichtigen. Mit den üblichen Bezeichnungen erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\kappa^2 d\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{9} \frac{e^2}{\hbar c} (\alpha \kappa)^3 \varepsilon^{3/2} (\varepsilon + \varepsilon_b) \left\{ \sqrt{N^s} \frac{\mu^2}{\beta_\mu^2} e^{-\frac{\mu^2}{2}\varepsilon} + \sqrt{\frac{N'}{3}} \frac{\nu''}{\beta_\nu^3} \left(\varepsilon - \frac{5\alpha^2}{\beta_\nu^2 \mu^2} \right) e^{-\frac{\nu^2 \varepsilon}{2}} \right\}^2$$

wobei

$$\beta_\mu^2 = \alpha^2 + \frac{\kappa^2}{2\mu^2} \quad \beta_\nu^2 = \alpha^2 + \frac{\kappa^2}{2\nu^2}$$

Für die Berechnung der betreffenden Integrale verweisen wir auf den Anhang.

§ 5. Photospaltung in drei freie Nukleonen.

Für die Ermittlung des Wirkungsquerschnittes muss man in die störungstheoretische Formel

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar c} |H'|^2 \varrho_e$$

für die Dichte der Endzustände ϱ_e , in denen die Energie

$$E = \hbar \omega - |B| = \frac{1}{2m} (p_r^2 + p_q^2) \quad (26)$$

ist und die den Koordinaten entsprechenden Impulse \vec{p}_r und \vec{p}_q sind, den folgenden Ausdruck

$$\varrho_e = \frac{k_t^5 dk_t}{dE} \cdot \frac{d\omega_5}{(2\pi)^6}$$

einsetzen. Dabei ist $d\omega_5$ das Raumwinkelement im sechsdimensionalen Raum der Impulse $\vec{p}_r = \hbar \vec{k}_r$ und $\vec{p}_q = \hbar \vec{k}_q$. $\hbar \vec{k}_t$ ist der Gesamtimpuls.

$$\hbar \vec{k}_t = \hbar (\vec{k}_r + \vec{k}_q)$$

Aus (26) folgt

$$\varrho_e = \frac{m}{\hbar^2} k_t^4 \frac{d\omega_5}{(2\pi)^6}$$

Das Matrixelement für den magnetischen Übergang lautet, analog zu (19)

$$M_{ea} = \int \psi'_e H'_m \psi_a dv = \frac{e\hbar}{Mc} \frac{\mu_P - \mu_N}{3} \sqrt{\pi \hbar \omega} \int (\varphi'_e \varphi' + \varphi''_e \varphi'') dv$$

Hierbei ist über die Spins im Endzustand – die $S = 1/2$, $T = 3/2$ oder $S = 3/2$, $T = 1/2$ sein können – inkohärent aufzusummieren. In der üblichen Weise erhält man mit (3) und (4)

$$M_{ea} = \frac{e\hbar}{Mc} \frac{\mu_P - \mu_N}{3} \sqrt{2\pi\hbar\omega} \int \psi_e^* \varphi'' dv$$

Für φ_e muss man

$$\varphi_e = e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})}$$

ansetzen. Das Integral in (27) ist also die Transformierte von φ'' – für die, wie immer, der Ansatz (17) verwendet wird – im Impulsraum von \vec{p}_r und \vec{p}_q . Der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet sodann

$$d\sigma = \frac{16 N'}{27 \pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 (\mu_P - \mu_N)^2 v^{10} \varepsilon^2 (\varepsilon + \varepsilon_b) - \frac{(k_r^2 - k_q^2)^2}{\kappa^4} e^{-v^2 \varepsilon} d\omega_5$$

Durch Integration über alle Winkel folgt der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{31}{15} \cdot \frac{16}{27} N' \cdot \pi^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{Mc} \right)^2 (\mu_P - \mu_N)^2 v^{10} \varepsilon^4 (\varepsilon + \varepsilon_b) e^{-v^2 \varepsilon}$$

Das Matricelement für den elektrischen Übergang ist mit dem üblichen Ansatz leicht zu ermitteln. Es genügt mit dem Operator $(\tau'_z r_z + \tau''_z q_z)$ auf $\psi = \varphi^s \xi^a + \varphi' \xi'' - \varphi'' \xi'$ zu wirken. Man erhält:

$$\begin{aligned} (\tau'_z r_z + \tau''_z q_z) \psi &= \varphi^s (\chi' q_z - \chi'' r_z) \zeta^s + \\ &+ [(\chi' r_z - \chi'' q_z) \varphi' - (\chi' q_z + \chi'' r_z) \varphi''] \zeta' + \\ &+ (\varphi' q_z - \varphi'' r_z) \xi^s + (\varphi' r_z + \varphi'' q_z) \xi^a + (r_z \xi'' - q_z \xi') \varphi^s \end{aligned}$$

Weiter muss man die Fouriertransformierten der Dipolmomente

$$\begin{aligned} \int \varphi^s \cdot (r_z, q_z) \cdot e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})} dv, \quad \int \varphi' \cdot (r_z, q_z) \cdot e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})} dv, \\ \int \varphi'' \cdot (r_z, q_z) \cdot e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})} dv \end{aligned}$$

berechnen. Wir verweisen diesbezüglich auf den Anhang. Der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet, im Fall $N' = 0$

$$\kappa^2 d\sigma = \frac{4}{9\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \varepsilon^2 (\varepsilon + \varepsilon_b) \frac{(k_r)_z^2 + (k_q)_z^2}{\kappa^2} \mu^{10} e^{-\mu^2 \varepsilon}$$

Hier können wir uns nach der Winkelverteilung des Impulses \vec{p}_q

fragen. Dazu ist über die Winkel von \vec{k}_r zu integrieren. Man vgl. den Anhang. Das Ergebnis der Integration [mit $N' = 0$] ist:

$$\kappa^2 d\sigma = \frac{\pi^2}{18} \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon_b) \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2} \frac{k_q^2}{\kappa^2} \sin^2 \vartheta \right) \mu^{10} e^{-\mu^2 \varepsilon} \frac{d^3 k_q}{\kappa^3}$$

Unabhängig von der Energie des ausgesandten Nukleons erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\kappa^2 d\sigma = \frac{\pi^2}{18} \frac{e^2}{\hbar c} \varepsilon^3 (\varepsilon + \varepsilon_b) \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \sin^2 \vartheta \right) \mu^{10} e^{-\mu^2 \varepsilon} d\omega_\kappa$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\kappa^2 \sigma = \frac{16}{15} \left(\frac{\pi}{3} \right)^3 \frac{e^2}{\hbar c} \varepsilon^3 (\varepsilon + \varepsilon_b) \mu^{10} e^{-\mu^2 \varepsilon}$$

§ 6. Wirkungsquerschnitt für den Einfang eines Nukleons durch ein Deuteron.

Für das Verhältnis der zwei Wirkungsquerschnitte der Photospaltung und des entgegengesetzten Prozesses gilt offenbar

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_s} = \frac{c}{v_N} \cdot \frac{\varrho_b}{\varrho_s} \cdot \frac{g_b}{g_s}$$

v_N ist die Relativgeschwindigkeit des einfallenden Nukleons, ϱ_b und ϱ_s sind die Dichten der Endzustände für die Bildung bzw. die Spaltung, g_b und g_s sind statistische Gewichte, die durch den Spin bestimmt sind. Da

$$\frac{g_b}{g_s} = \frac{2}{3}$$

wird das Verhältnis der Winkelquerschnitte

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_s} \frac{2}{3} \left(\frac{\hbar \omega}{c p_q} \right)^2$$

Es ist

$$\hbar \omega = \frac{p_q^2}{2m} + |B| = E_N + |B|$$

wobei $E_N = p_q^2 / 2m$ die kinetische Energie der Relativbewegung des einfallenden Nukleons ist. Man erhält

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_s} = \frac{3}{8} \frac{(\varepsilon + \varepsilon_b)^2}{\varepsilon} \left(\frac{\hbar \kappa}{Mc} \right)^2$$

Wenn man den magnetischen Übergang vernachlässigt und folgerichtig beim elektrischen Übergang nur den vollkommen sym-

metrischen Raumanteil berücksichtigt, so erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\kappa^2 d\sigma = \frac{3}{8} \frac{\sqrt{2}\pi}{9} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar \kappa}{Mc} \right)^2 \mu^4 \left(\frac{\alpha \kappa}{\beta_\mu^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon_b)^3 e^{-\mu^2 \varepsilon} \sin^2 \vartheta d\omega$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\kappa^2 \sigma = \frac{1}{18} (2\pi)^{3/2} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar \kappa}{Mc} \right)^2 \mu^4 \left(\frac{\alpha \kappa}{\beta_\mu^2} \right)^2 \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon_b)^3 e^{-\mu^2 \varepsilon}$$

Schlussbemerkungen.

Im Hinblick auf einen detaillierten Vergleich der hier gewonnenen Formeln für die Wirkungsquerschnitte mit zukünftigen experimentellen Ergebnissen wollen wir die Aufmerksamkeit auf zwei Tatsachen lenken. Erstens ist der allgemeine Verlauf der Wirkungsquerschnitte in Abhängigkeit von der Energie, wie schon bemerkt, auf das asymptotische Verhalten der Eigenfunktionen der gebundenen Zustände besonders empfindlich. Zweitens sind für die kleineren Energien Korrekturen anzubringen, um im Fall von He^3 die Coulombsche Abstossung genauer und auch sonst die Verzerrung der freien Wellen durch das Kernfeld zu berücksichtigen. Wir haben vorderhand von einer exakteren Berechnung der Matrixelemente in diesem Sinne abgesehen und ziehen es vor, sichere experimentelle Ergebnisse über die in Frage stehenden Reaktionen abzuwarten, die für eine solche Bemühung eine Rechtfertigung und eine wertvolle Hilfe bedeuten werden. Insbesondere sollen die Experimente entscheiden, ob die hier vertretene Ansicht, dass bei den Eigenfunktionen der Grundzustände der symmetrische Raumanteil überwiegt, gerechtfertigt ist.

Anhang.

Um die Integrale (25) zu ermitteln, genügt es, die Fouriertransformierten der Funktionen φ^s , φ' , φ''

$$\varphi^s = e^{-\frac{\kappa^2}{2\mu^2}(r^2+q^2)}$$

$$\varphi' = 2(\vec{r} \cdot \vec{q}) e^{-\frac{\kappa^2}{2\mu^2}(r^2+q^2)}$$

$$\varphi'' = (r^2 - q^2) e^{-\frac{\kappa^2}{2\mu^2}(r^2+q^2)}$$

die

$$A^s = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \varphi^s \cdot e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})} dv = \left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^6 \cdot e^{-(k_r^2 + k_q^2) \cdot \frac{\mu^2}{2\kappa^2}}$$

$$A' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \varphi' \cdot e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})} dv = -\left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{10} 2(\vec{k}_r \cdot \vec{k}_q) e^{-(k_r^2 + k_q^2) \frac{\nu^2}{2\kappa^2}}$$

$$A'' = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \varphi'' \cdot e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_q \cdot \vec{q})} dv = -\left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{10} (k_r^2 - k_q^2) e^{-(k_r^2 + k_q^2) \frac{\nu^2}{2\kappa^2}}$$

sind, nach $(k_r)_z$ und $(k_q)_z$ abzuleiten.

Man erhält so

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \int r_z \varphi^s e^{-i(\dots)} dv = \frac{1}{i} \left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^8 (k_r)_z e^{-(k_r^2 + k_q^2) \frac{\mu^2}{2\kappa^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \int r_z \varphi' e^{-i(\dots)} dv = -\frac{1}{i} \left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{12} (k_r)_z 2(\vec{k}_r \cdot \vec{k}_q) e^{-(k_r^2 + k_q^2) \frac{\nu^2}{2\kappa^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \int r_z \varphi'' e^{-i(\dots)} dv = -\frac{1}{i} \left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{12} (k_r)_z (k_r^2 - k_q^2) e^{-(k_r^2 + k_q^2) \frac{\nu^2}{2\kappa^2}}$$

usw.

Um die Formel (29) zu erhalten, muss man über die Winkel von \vec{k}_r integrieren. Es ist für diesen Zweck von Vorteil, die zonalen Kugelkoordinaten eines sechsdimensionalen Raumes, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{(k_q)_x}{\kappa} &= \sqrt{\varepsilon} t_1 & \frac{(k_q)_y}{\kappa} &= \sqrt{\varepsilon} t_2 & \frac{(k_q)_z}{\kappa} &= \sqrt{\varepsilon} t_3 \\ \frac{(k_r)_x}{\kappa} &= \sqrt{\varepsilon T_4} \cos \varphi & \frac{(k_r)_y}{\kappa} &= \sqrt{\varepsilon T_4} \sin \varphi & \frac{(k_r)_z}{\kappa} &= \sqrt{\varepsilon} t_4 \end{aligned}$$

einzuführen. Dabei bezeichnen wir mit

$$\varepsilon = \frac{k_r^2 + k_q^2}{\kappa^2} \quad T_4 = 1 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2$$

wo

$$-1 \leq t_i \leq +1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Für das Raumwinkelement $d\omega_5$ gilt

$$d\omega_5 = \frac{\pi^2}{2^5} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 d\varphi$$

Es sind jetzt die folgenden Mittelwerte zu bilden:

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{(k_r^2)_z + (k_q^2)_z}{\kappa^2} dt_4 d\varphi = \varepsilon \left(\frac{1}{3} + t_3^2\right) \quad \int \left(\frac{k_r^2 + k_q^2}{\kappa^2}\right)^2 d\omega_5 = \frac{31}{15} \pi^3 \varepsilon^2$$

Bezeichnet man mit ϑ den Winkel zwischen \vec{k}_q und der Einfallsrichtung der Quanten und mit α das zugehörige Azimut, so erhält man

$$t_3 = \frac{k_q}{\kappa \sqrt{\varepsilon}} \sin \vartheta \cos \alpha$$

Hieraus folgt bei Mitteilung in bezug auf die Polarisationsrichtung

$$\overline{t}_3^2 = \frac{1}{2} \frac{k_q^2}{\kappa^2 \varepsilon} \sin^2 \vartheta$$

Es ist uns eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit den herzlichsten Dank auszusprechen. Herrn V. L. TELEGDI bin ich für seine Mit-hilfe bei der Durchsicht des Manuskriptes verpflichtet.

Bibliographie.

- 1) W. FOWLER u. Mitarbeiter, Phys. Rev. **76**, 1767 (1949).
 - 2) M. VERDE, Helv. Phys. Acta XXII, 340 (1949).
 - 3) V. DER WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode der Quantenmechanik (S. 57).
 - 4) F. VILLARS, Helv. Phys. Acta **20**, 476 (1947).
 - 5) A. V. TOLLESTRUP u. Mitarbeiter, Phys. Rev. **75**, 1947 (1949).
 - 6) R. E. BELL, C. G. ELLIOTT, Phys. Rev. **74**, 1552 (1948).
 - 7) F. BLOCH u. Mitarbeiter, Phys. Rev. **71**, 551 (1947).
 - 8) H. L. ANDERSON, Phys. Rev. **76**, 1460 (1949).
 - 9) G. H. DIECKE, F. S. TOMKINS, Phys. Rev. **76**, 283 (1949).
 - 10) A. E. DOUGLAS, G. HERZBERG, Phys. Rev. **76**, 1529 (1949).
 - 11) M. VERDE, Habilitationsschrift an der ETH. Zürich.
 - 12) F. VILLARS, A. THELLUNG, Helv. Phys. Acta XXI, 355 (1948).
-