

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 23 (1950)  
**Heft:** I-II

**Artikel:** Causalité et structure de la Matrice S  
**Autor:** Stueckelberg, E.C.G. / Rivier, D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112106>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Causalité et structure de la Matrice $S$

par **E. C. G. Stueckelberg et D. Rivier** (Genève).

(19. X. 1949.)

La causalité en théorie des champs quantifiés définit la structure des noyaux intégraux dans les coefficients du développement de la matrice  $S$  en fonction des opérateurs de translation dans l'espace des quanta. Cette structure, qui fait apparaître la fonction  $Dc(x)$ , est celle que l'on obtient en intégrant de manière invariante l'équation d'évolution fonctionnelle, à une certaine indétermination près dans le cas de la méthode proposée. Cette indétermination remplace le problème de l'élimination des divergences par celui de la détermination des termes non définis de la matrice  $S$ .

### 1. La causalité en physique classique et en physique quantique.

Pour fixer les idées, considérons le système *classique* constitué par  $n$  particules chargées, soumises aux lois de l'électrodynamique de MAXWELL. Une loi physique exprime, par l'intermédiaire d'équations :

$$\begin{aligned}\xi''_{(k)} &= F_{(k)}[\tau'', \tau'; \dots \pi'_{(i)}, \xi'_{(i)} \dots] \\ \pi''_{(k)} &= G_{(k)}[\tau'', \tau'; \dots \pi'_{(i)}, \xi'_{(i)} \dots] \quad \xi''_{(k)} = \frac{1}{m_{(k)}} \int_{\tau'}^{\tau''} d\lambda \pi_{(k)}(\lambda)\end{aligned}\quad (1.1)$$

les relations fonctionnelles existant entre les quantités de mouvement  $\pi''_{(k)}$  et les lieux  $\xi''_{(k)}$  de chaque particule  $(k)$  au temps  $\tau''$  et ce temps  $\tau''$  d'une part, et les mêmes grandeurs  $\pi'_{(i)}, \xi'_{(i)}, \tau'$  à un instant initial  $\tau'$  d'autre part.

Ces équations s'obtiennent par intégration d'équations différentielles décrivant les processus élémentaires. Dans le cas envisagé celles-ci s'écrivent\*) :

$$d^{(i)} p_{\alpha}^{(k)} = e^{(k)} e^{(i)} ds_{\beta}^{(k)} ds_{[\alpha}^{(i)} \partial^{\beta]} D^{(\text{ret})} (s_{(k)} / s_{(i)}) \quad (1.2)$$

La fonction  $D^{(\text{ret})}(x_{(k)} / x_{(i)})$  décrit ce que nous appelons «l'action causale» de  $(i)$  sur  $(k)$ . Remarquons que la fonction  $D^{(\text{ret})}(x/y)$  est, comme il est nécessaire, invariante par rapport au groupe de LORENTZ. Notons aussi que les effets  $d^{(i)} p_{\alpha}^{(k)}$  sur la particule  $(k)$  dus aux diverses particules  $\dots (i), \dots$  s'additionnent les uns aux autres.

\*) Pour les notations, voyez le numéro 3) des références.

Considérons maintenant le système *quantique* correspondant: il s'agit de  $n$  quanta, en nombre variable. Les lois physiques décrivant l'évolution du système sont déterminées par un opérateur unitaire  $\mathbf{S}$ , représenté par des matrices de transition:

$$S[\tau''; \dots \xi''_{(k)} \dots \xi''_{(n'')} / \tau'; \dots \xi'_{(i)} \dots \xi'_{(n')}] \quad (1.3)$$

fonctionnelles seulement des variables lieux initiales  $\xi''_{(k)}$  et finales  $\xi'_{(i)}$  et des deux époques  $\tau''$  et  $\tau'$  entre lesquelles le système évolue.

Une matrice de transition s'obtient aussi par intégration d'un élément différentiel:

$$\begin{aligned} dS[\dots \xi''_{(k)} \dots / \dots x_{(l)} \dots x_{(m)} \dots / \dots \xi'_{(i)} \dots] \sim \\ \dots D^+(\xi''_{(k)} / x_{(k)}) \Gamma_{(k)} dx_{(k)} D^c(x_{(k)} / x_{(l)}) \Gamma_{(l)} dx_{(l)} \dots \times \\ \times \dots \Gamma_{(m)} dx_{(m)} D^c(x_{(m)} / x_{(i)}) \Gamma_{(i)} dx_{(i)} D^+(x_{(i)} / \xi'_{(i)}) \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

par convention, dans  $D^+(x/y)$  on a  $x^4 > y^4$ . L'élément différentiel  $dS$  est un produit d'amplitudes de probabilité:

$D^+(x/x_{(k)}) = u(x)$  représente l'amplitude de probabilité relative au quantum  $k$  observée au temps  $x^4 = \tau$  ( $x^1, x^2, x^3$ ), émergeant de  $x_{(k)}$  si  $x^4 > x_{(k)}^4$  ou convergeant en  $x_{(k)}$  si  $x^4 < x_{(k)}^4$ ; en  $x_{(k)}$  elle a été localisée avec autant de précision qu'il est possible;

$\Gamma_{(i)}$  est une fonction du lieu  $x_{(i)}$  caractérisant l'amplitude de probabilité du processus élémentaire en ce point;

enfin la fonction  $D^c(x_{(k)}/x_{(l)})$  décrit l'amplitude de probabilité de «l'action causale de  $(l)$  sur  $(k)$ »: c'est le correspondant quantique de  $D^{\text{ret}}(x_{(k)}/x_{(l)})$ , qu'il faut déterminer maintenant.

Qu'il soit impossible de maintenir la fonction  $D^{\text{ret}}(x_{(k)}/x_{(l)})$  résulte du fait que celle-ci ne représente pas une amplitude de probabilité. Mais nous savons que:

$$D^c(x/y) \sim D^+(x/y) = D^1(x/y) - i D^0(x/y) \text{ pour } x^4 > y^4.$$

Or, du fait que la fonction  $D^1(x/y)$ , à l'inverse de  $D^0(x/y)$ , ne s'évanouit pas à l'extérieur du cône de lumière, la seule façon de prolonger de manière invariante  $D^c(x/y)$  pour  $x^4 < y^4$  est de l'écrire:

$$D^c(x/y) \sim (D^1 + a D^0)(x/y) = \left( \frac{1+ai}{2} D^+ + \frac{1-ia}{2} D^- \right)(x/y)$$

mais il est clair que le coefficient de  $D^+(x/y)$  doit ici être nul, sans quoi des acausalités manifestes\*) contribueraient à l'élément différentiel  $dS$ . On doit poser  $a = i$  et:

$$D^c(x/y) \sim D^-(x/y) \text{ pour } x^4 < y^4.$$

\*) En particulier, une partie de l'action de  $(l)$  sur  $(k)$  ne dépendrait pas de la succession temporelle des événements  $x_{(l)}$  et  $x_{(k)}$ .

et la fonction causale seule possible est donc, en introduisant un facteur de normalisation égal à  $i/2$ :

$$D^c \sim D^s + \frac{i}{2} D^1 \quad x^4 \neq y^4 \quad (1.5)$$

Dans (1.4), l'interprétation de la contribution:

$$\dots D^+ (\xi''_{(k)} / x_{(k)}) \Gamma_{(k)} dx_{(k)} D^c (x_{(k)} / x_{(l)}) \Gamma_{(l)} dx_{(l)} \dots \text{ pour } x_{(k)}^4 < x_{(l)}^4 \quad (1.6)$$

s'obtient en inversant en  $x_{(k)}$  et en  $x_{(l)}$  les phénomènes de cause et d'effet dans les processus décrits par la contribution:

$$\dots D^+ (\xi''_{(k)} / x_{(k)}) \Gamma_{(k)} d x_{(k)} D^c (x_{(k)} / x_{(l)}) \Gamma_{(l)} d x_{(l)} \dots \text{ pour } x_{(k)}^4 > x_{(l)}^4$$

Plus précisément, le processus décrit par (1.6) est l'émission simultanée en  $x_{(k)}$  d'un paquet observé en  $\tau''$  et d'un paquet participant en  $x_{(l)}$  à un nouveau processus. Cela est immédiat si l'on remarque que:

$$D^c(y/x) = \pm D^c(x/y)$$

le signe étant positif ou négatif suivant la statistique qui régit les ensembles de quanta.

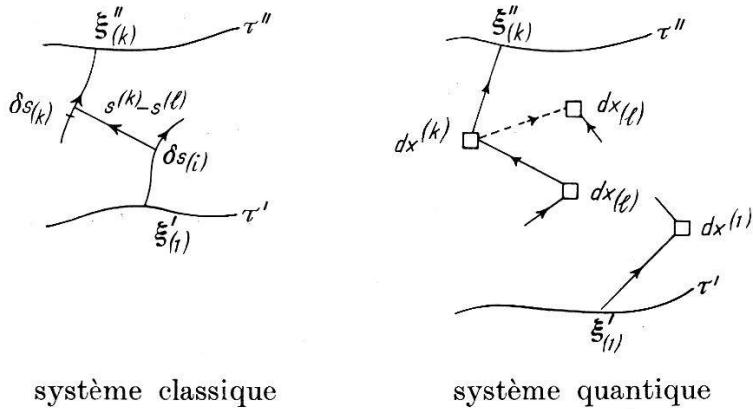


Fig. 1.

Une différence essentielle entre la fonction classique  $D^{\text{ret}}(x)$  et la fonction quantique  $D^c(x)$  réside dans leur comportement à l'extérieur du cône de lumière; par exemple dans le cas scalaire:

$$D^{\text{ret}}(x) = 0$$

$$D^c(x) = \frac{1}{8\pi i} \frac{\varkappa}{R} H_1^{(1)}(i\varkappa R) \quad \left\{ \begin{array}{l} R^2 = x^\alpha x_\alpha > 0 \\ \varkappa \text{ masse du quantum} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

## 2. Généralisation à des variables quelconques.

Le passage à des variables quelconques  $u''_{(1)}, u''_{(2)}, \dots, u''_{(n'')}$  définissant l'état des  $n$  quanta s'opère comme on le sait par l'intermédiaire d'un opérateur  $\mathbf{U}$  représenté par une matrice de transformation:

$$U(\xi'_{(1)} \dots \xi'_{(n')} / u'_{(1)} \dots u'_{(n')}) \quad (2.1)$$

et possédant un opérateur hermitien conjugué  $\mathbf{U}^+$  représenté par la matrice  $U^+(u''_{(1)} \dots u''_{(n'')} / \xi''_{(1)} \dots \xi''_{(n'')})$ .

La transformée de  $S$  s'écrit:

$$S[\tau'', u''_{(1)} \dots u''_{(n'')} / \tau', u'_{(1)} \dots u'_{(n')}] = U^+(u''_{(1)} \dots u''_{(n'')} / \xi''_{(1)} \dots \xi''_{(n'')}) \times \\ \times S[\tau'' \dots \xi''_{(k)} \dots / \tau' \dots \xi'_{(i)} \dots] U(\xi'_{(1)} \dots \xi'_{(n')} / u'_{(1)} \dots u'_{(n')}) \quad (2.2)$$

il est important de remarquer que la multiplication matricielle représente ici une intégration sur tous les points d'une surface temporelle d'élément  $d\sigma^\alpha(\xi)$ . Ainsi, nous avons explicitement:

$$S[\tau'', u''_{(1)} \dots u''_{(n'')} / \tau', u'_{(1)} \dots u'_{(n')}] \sim \dots \int^{(k)} \int^{(l)} \int^{(m)} \int^{(i)} \dots \int d\sigma^{\alpha''}(\xi''_{(k)}) \dots \times \\ \times \dots \int d\sigma^{\alpha'}(\xi'_{(i)}) \dots U^+_{{\alpha''}}(u''_{(1)} \dots u''_{(n'')} / \dots \xi''_{(k)} \dots) D^+(\xi''_{(k)} / x_{(k)}) \times \\ \times \Gamma_{(k)} dx_{(k)} D^c(x_{(k)} / x_{(l)}) \Gamma_{(l)} dx_{(l)} \dots \Gamma_{(m)} dx_{(m)} D^c(x_{(m)} / x_{(i)}) \times \\ \times \Gamma_{(i)} dx_{(i)} D^+(x_{(i)} / \xi'_{(i)}) \dots U_{{\alpha'}}(\dots \xi'_{(i)} \dots / u'_{(1)} \dots u'_{(n')}); \quad (2.3)$$

là comme dans ce qui suit  $\int^{(k)} \dots$  est mis pour  $\int_{\tau'}^{\tau''} (dx^{(k)})^4$ .

En utilisant alors comme il est d'usage un système de paquets orthogonale et complet  $u'_{(i)}, u''_{(k)}, \dots$ , satisfaisant donc aux relations:

$$\left. \begin{array}{l} \int d\sigma^\alpha(x) u^{+\alpha}(x) \mathbf{Q}_\alpha u'(x) = \delta(u''/u') \\ \int dV(u) u(x'') u^+(x') = D^+(x''/x') \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{Q}_\alpha$  est un opérateur d'orthogonalisation dépendant de la variance des paquets  $u$ , on obtient pour  $S$  en posant:

$$U_\alpha(\xi''/u') = \mathbf{Q}_\alpha u'(\xi''); \quad (2.5)$$

$$S[\tau'', u''_{(1)} \dots u''_{(n'')} / \tau', u'_{(1)} \dots u'_{(n')}] \sim \dots \int^{(k)} \int^{(l)} \int^{(m)} \int^{(i)} \dots u''_{(k)}^+(x_{(k)}) \Gamma_{(k)} dx_{(k)} \times \\ \times D^c(x_{(k)} / x_{(l)}) \Gamma_{(l)} dx_{(l)} \dots \Gamma_{(m)} dx_{(m)} D^c(x_{(m)} / x_{(i)}) \Gamma_{(i)} dx_{(i)} u'_{(i)}(x_{(i)}) \dots \quad (2.6)$$

Une nouvelle généralisation permet de considérer des transitions où le système de paquets initial  $u'_{(1)} \dots u'_{(n')}$  et le système final  $v''_{(1)} \dots v''_{(n'')}$  diffèrent entre eux. On a alors :

$$S[\tau'' v''_{(1)} \dots v''_{(n'')} / \tau' u'_{(1)} \dots u'_{(n')}] = V^+(v''_{(1)} \dots v''_{(n'')} / \dots \xi''_{(k'')} \dots)$$

$$S[\dots \xi''_{(k)} \dots / \dots \xi'_{(i)} \dots] U(\dots \xi'_{(i)} \dots / u'_{(1)} \dots u'_{(n')}) \quad (2.7)$$

où la matrice  $V^+(v''_{(1)} \dots v''_{(n'')} / \dots \xi''_{(k'')} \dots)$  représente l'hermitien conjugué de l'opérateur  $\mathbf{V}$  de transformation des variables  $\xi''_{(k)}$  aux variables  $u''_{(l)}$ . On obtient donc une représentation *mixte* :

$$S[\tau'', v''_{(1)} \dots v''_{(n'')} / \tau', u'_{(1)} \dots u'_{(n')}] \sim \dots \int \int \dots \int \int \dots v''_{(k)}^+(x_{(k)}) \times$$

$$\times \Gamma_{(k)} dx_{(k)} D^c(x_{(k)} / x_{(l)}) \Gamma_{(l)} dx_{(l)} \dots \Gamma_{(m)} dx_{(m)} D^c(x_{(m)} / x_{(i)}) \times$$

$$\times \Gamma_{(i)} dx_{(i)} u'_{(i)}(x_{(i)}) \dots \quad (2.8)$$

On peut voir que la forme générale de  $S$  s'obtient (après intégration multiple sur  $\dots dx^{(k)} \dots dx^{(i)} \dots$ ) en substituant dans (1.4) les paquets particuliers  $D^+(\xi''_{(k)} / x_{(k)})$  (émergents) et  $D^+(x_{(i)} / \xi'_{(i)})$  (incidents) par les paquets généraux  $u''^+(x_{(k)})$  et  $u'(x_{(i)})$ .

### 3. Passage à l'espace des quanta.

Il est maintenant indiqué de passer à l'espace des quanta, à l'aide des opérateurs de translation dans cet espace,  $\mathbf{a}^+(u'')$  et  $\mathbf{a}(u'')$ , ... qui permettent l'introduction des opérateurs de champs :

$$\mathbf{u}_{(i)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dV(u'_{(i)}) \mathbf{a}(u'_{(i)}) u'_{(i)}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int dV(u'_{(i)}) \mathbf{a}^+(u'_{(i)}) u^+_{(i)}(x) \quad (3.1)$$

Dans cet espace l'opérateur  $\mathbf{S}[\tau'', \tau']$ , satisfaisant à la condition d'unitarité :

$$\mathbf{S}^+[\tau'', \tau] \mathbf{S}[\tau'', \tau] = \mathbf{1} \quad (3.2)$$

peut naturellement se développer en termes des opérateurs  $\mathbf{a}^+(u')$  et  $\mathbf{a}(u')$ , en posant\*) :

$$\mathbf{S}[\tau'', \tau'] = \mathbf{1} + \sum_{(n'', n')} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{S}^{(j)}_{\dots n'' \dots n'}[\tau'', \tau'] \quad (3.3)$$

\*) Le paramètre numérique  $\varepsilon$  que nous introduisons ici apparaît lors de la construction explicite de  $S$ , basée sur une méthode de perturbation (voyez § 4).

avec:

$$\begin{aligned} \varepsilon^j \mathbf{S}^j \dots_{n''} \dots_{n'} [\tau'', \tau'] &= \varepsilon^j \int dV(u''_{(1)}) \dots \int dV(u''_{(n'')}) \int dV(u'_{(1)}) \dots \times \\ &\times \dots \int dV(u'_{(n')}) \mathbf{a}^+(u''_1) \dots \mathbf{a}^+(u''_{(n'')}) S^{(j)} [\tau'', u''_{(1)} \dots u''_{(n'')}/\tau', u'_{(1)} \dots u'_{(n')}] \times \\ &\times \cdot \mathbf{a}(u'_{(1)}) \dots \mathbf{a}(u'_{(n')}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

où nous avons ordonné les opérateurs  $\mathbf{a}^+(u''_{(i)})$  et  $\mathbf{a}(u'_{(k)})$  dans chacun des termes  $S^{(j)}_{\dots n'' \dots n'}$  de manière que les opérateurs  $\mathbf{a}^+(u''_k)$  soient tous à gauche des opérateurs  $\mathbf{a}(u'_{(i)})$ , et en fixant une fois pour toutes l'ordre de succession de ces opérateurs. Cela est toujours possible à l'aide des relations de commutations:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(u''_{(k)}), \mathbf{a}^+(u'_{(i)})]_{\pm} &= \mathbf{1} \delta(u''_{(k)}/u'_{(i)}) \\ [\mathbf{a}^+(u''_{(k)}), \mathbf{a}^+(u'_{(i)})]_{\pm} &= [\mathbf{a}(u''_{(k)}), \mathbf{a}(u'_{(i)})]_{\pm} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Cela fait, il est clair que, de par la signification même des opérateurs  $\mathbf{a}^+(u''_{(k)})$  et  $\mathbf{a}(u'_{(i)})$  lorsqu'ils opèrent sur la fonctionnelle de l'espace des quanta, les coefficients  $S^{(j)}[\tau'', u''_{(k)} / \tau', u'_{(i)} \dots]$  qui figurent dans le développement (3.4) ne peuvent être que les matrices de transition dont la structure a été définie en (2.6): alors seulement l'opérateur  $\mathbf{S}$  est causal.

Nous voyons donc apparaître, à côté de l'*invariance*, deux propriétés nécessaires de l'opérateur  $\mathbf{S}$ : l'*unitarité*, exprimée par (3.2) et la *causalité* exprimée par la structure des coefficients  $S[\tau'' \dots / \tau' \dots]$  donnée par (2.6).

#### 4. Construction de la matrice $\mathbf{S}$ à partir d'un processus élémentaire donné.

Nous avons trouvé la structure générale de l'opérateur  $\mathbf{S}$ . Mais la tâche essentielle est de le construire à partir d'un processus élémentaire donné.

Une première méthode part de l'équation d'évolution fonctionnelle:

$$-\frac{1}{i} \frac{\delta \psi}{\delta \tau(x)} = \varepsilon \mathbf{h}(x) \quad (4.1)$$

dont l'intégration invariante donne un opérateur  $\mathbf{S}$  qui a bien la structure causale (3.4), mais où la fonction  $D^c(x/y)$  est donnée par (1.5) pour toute valeur de  $x - y$ , y compris  $x - y = 0$ . L'intégration «invariante et causale» de (4.1) montre qu'en général  $\varepsilon \mathbf{h}(x)$  est donné par:

$$\varepsilon \mathbf{h}(x) = \varepsilon \mathbf{h}^{(1)}(x) + \varepsilon^2 \mathbf{h}^{(2)}[x, \tau] \quad (4.2)$$

résultat auquel mène aussi l'application des conditions d'intégrabilité de (4.1)<sup>1)</sup>.

Cette méthode a été utilisée, sous des formes variées, par divers auteurs dans le cas particulier de l'électrodynamique<sup>1)</sup> d'un champ scalaire<sup>2)</sup> ou de couplages plus généraux<sup>3)</sup>. Elle a le désavantage d'introduire dès l'ordre  $j=2$  des termes divergents pour les coefficients  $S_{...n''...n'}^{(j)}[\tau'', \tau']$ . Divers procédés ont été proposés pour éliminer ces divergences. Les uns sont appuyés sur des considérations physiques<sup>4)</sup>, les autres sont d'allure plus mathématique<sup>3, 5)</sup>. Cependant, une forme satisfaisante de la théorie devrait éviter de semblables corrections a posteriori, qui n'assurent pas toujours de manière visible sa causalité, son unitarité, ou même sa cohérence.

Une seconde méthode a l'avantage, en posant d'emblée :

$$\mathbf{S} = \exp(-i\boldsymbol{\alpha}) \quad \boldsymbol{\alpha}^+ = \boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{\alpha} = \sum_1^\infty \varepsilon^i \boldsymbol{\alpha}_{(i)} \quad (4.3)$$

d'assurer initialement l'invariance et l'unitarité de  $\mathbf{S}$ . Elle procède ensuite de la manière suivante :

1. On choisit l'opérateur  $\boldsymbol{\alpha}_{(1)}$  qui correspond au processus élémentaire envisagé. Celui qui correspond à  $\mathbf{h}^{(1)}$  de (4.2) s'écrit :\*)

$$\varepsilon \boldsymbol{\alpha}_{(1)} = \varepsilon \int (dx)^4 \mathbf{h}_{(1)}(x) \quad \boldsymbol{\alpha}_{(1)}^+ = \boldsymbol{\alpha}_{(1)} \quad (4.4)$$

2. On développe alors  $\mathbf{S}$  selon (4.3) et l'on contrôle en comparant avec (3.4) que chacun des coefficients  $S^{(j)}[\tau''; u''/\tau'; u']$  ait bien la structure causale (2.6) ;

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{1} + (-i\varepsilon) \int (dx)^4 \mathbf{h}_{(1)}(x) + \frac{(-i\varepsilon)^2}{2!} \cdot \int (dx')^4 \mathbf{h}_{(1)}(x') \times \\ \times \int (dx)^4 \mathbf{h}_{(1)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

On voit tout de suite que dès les  $S^{(2)}[ / ]$  ce n'est pas le cas. Pour rendre causals ces coefficients, on modifie  $\boldsymbol{\alpha}$  en lui ajoutant selon (4.3) un terme  $\varepsilon^2 \boldsymbol{\alpha}_{(2)}$ , hermitien naturellement, ce qui a pour résultat d'ajouter aux coefficients  $S^{(2)}[ / ]$  une « correction causale », dans la mesure où elle leur donne la structure (2.6). Formellement le résultat est alors celui que donne la première méthode, à cela près cependant que les fonctions  $D^c(x/y)$  qui apparaissent dans les noyaux ne sont pas définies pour  $x = y$ .

Les coefficients  $S^{(2)}[ \dots / \dots ]$  rendus causals, on développe  $\mathbf{S}$  selon (4.3) avec  $\boldsymbol{\alpha} = \varepsilon \boldsymbol{\alpha}_{(1)} + \varepsilon^2 \boldsymbol{\alpha}_{(2)}$  et l'on contrôle alors la structure causale des termes  $S^{(3)}[ \dots / \dots ]$ . Cela conduit de nouveau à une correction causale donnant formellement les mêmes coefficients  $S^{(3)}[ / ]$  que la méthode différentielle, et obtenue en ajoutant à  $\boldsymbol{\alpha}$  un terme  $\varepsilon^3 \boldsymbol{\alpha}_{(3)}$ .

\*) Dans (4.4) et (4.5)  $\int$  est mis pour  $\int_{\tau'}^{\tau''}$ .

L'on procède ainsi de suite pour les  $S^{(4)}[\dots/\dots]$   $S^{(5)}[\dots/\dots]\dots$ , en sorte que la série (4.3) est bien déterminée aux arbitraires près signalés tout à l'heure, dus à l'indétermination de la fonction  $D^c(x/y)$  pour  $x = y$ .

Ainsi donc la première méthode, qui est différentielle et la seconde, qui est intégrale, conduisent *formellement* aux mêmes résultats (avant la suppression des expressions divergentes ou indéterminées); mais, tandis que dans le premier cas on se trouve en face d'expressions divergentes en général à partir du deuxième ordre, dans le second ces expressions sont indéterminées. On voit donc qu'au problème de l'élimination des divergences de la matrice  $S$  la seconde méthode substitue celui de la détermination de cette matrice à partir d'une expression partiellement non définie. Pour résoudre ce problème, il existe une méthode\*) générale qui conduit pour les termes du deuxième ordre à des résultats analogues à ceux de M. SCHWINGER, en particulier pour la polarisation du vide et pour l'énergie propre des particules élémentaires. Ces résultats, joints à ceux établis jusqu'ici pour le troisième ordre semblent satisfaisants. Un prochain travail exposera cette méthode et son application au problème de la polarisation du vide.

Ces recherches ont bénéficié de l'aide matérielle de la C. S. A.; nous l'en remercions.

### Références.

- <sup>1)</sup> Principalement TOMONAGA et ses collaborateurs; SCHWINGER, FEYNMANN et F. J. DYSON (Phys. Rev. **75**, 3, 486; **75**, 11, 1736 (1949)) qui donne une bibliographie très complète des mémoires des auteurs précédents, à laquelle nous renvoyons.
- <sup>2)</sup> A. HOURIET et A. KIND, H.P.A. **22**, 3, 319 (1949).
- <sup>3)</sup> E. C. G. STUECKELBERG et D. RIVIER, Phys. Rev. **74**, 2, 218 (1948); D. RIVIER, H.P.A. **22**, 3, 265 (1949).
- <sup>4)</sup> J. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 10, 1439 (1948); **75**, 4, 651 (1949).
- <sup>5)</sup> D. RIVIER, loc. cit.; PAULI et VILLARS, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949). Nous remercions MM. PAULI et VILLARS de nous avoir donné un manuscrit de leur travail avant sa publication.

---

\*) Cette méthode faisait l'objet d'une communication destinée à la Conférence de Physique de Bâle (Septembre 1949).