Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 23 (1950)
Heft: I-II

Artikel: Vacuumpolarisation und e4-Ladungsrenormalisation für Elektronen
Autor: Jost, Res / Luttinger, J.M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112105

Vacuumpolarisation und e^4-Ladungsrenormalisation für Elektronen

von **Res Jost** und **J. M. Luttinger***) (Phys. Inst. ETH. Zürich).

(18. X. 1949.)

§ 1. Einleitung.

Bei der Behandlung der Vacuumpolarisation treten 2 Arten von Unendlichkeiten auf, nämlich die nicht eichinvarianten Terme (wovon die Photonselbstenergie ein Spezialfall ist) und die Selbstladung.

Währenddem sich die nicht eichinvarianten Terme durch Ankopplung weiterer Felder von geladenen Teilchen (wenigstens in der e^2-Näherung) kompensieren lassen[1][2][3], ist dies für die e^2-Selbstladung nicht der Fall, da diese für alle Teilchensorten dasselbe Vorzeichen hat. Dagegen lässt sich die Selbstladung renormalisieren, d. h. man kann in konsequenter Weise an Stelle der ursprünglichen Ladung die totale Ladung (einschliesslich der Selbstladung) in die Theorie einführen und so die entsprechenden Unendlichkeiten eliminieren[4].

Falls man diese Renormalisation ernst nimmt, falls man also die Renormalisation nicht nur als formale Elimination der Unendlichkeiten betrachtet, hat man zu verlangen, dass für alle Feldquellen, unbekümmert darum, welcher Art sie sind, die Ladungsrenormalisation dieselbe ist. Die Aussage bedeutet, dass die ganze Selbstladung von der Vacuumpolarisation herrührt. Sie wurde von uns und anderen in der e^2-Approximation verifiziert, gilt aber allgemein**).

Die Eigenschaft der Renormalisierbarkeit hat die Selbstladung gemein mit der Selbstmasse der Elektronen[4]. Nur dass sich die Unendlichkeiten der Selbstmasse, ähnlich wie die Photonselbstenergie, durch geeignete Ankoppelung von Hilfsfeldern endlich machen lässt (dies wenigstens in der Ordnung e^2) [10].

---

*) National Research Fellow (U.S.A.).

**) J. Schwinger, mündliche Mitteilung anlässlich eines Seminars in Zürich.

Die einzige Möglichkeit einer Kompensation der Unendlichkeiten der Selbstladung, die sich noch bieten könnte, wäre eine Kompensation zwischen *verschiedenen* Ordnungen in e^2 (die dann nur für spezielle Werte von e stattfinden könnte).

Wir werden zeigen, dass für Elektronen (Spin $\cdot \frac{1}{2}$) eine solche Kompensation zwischen e^2- und e^4-Selbstladung *nicht bestehen kann*.

§ 2. Allgemeines über Vacuumpolarisation und Ladungsrenormalisation.

Um die Vacuumpolarisation von den übrigen strahlungstheoretischen Begriffen trennen zu können, betrachten wir neben dem Elektronenwellenfeld (Ladung e_0) ein Feld anderer Teilchen mit der Ladung ε_0. Die Streuung zweier solcher Fremdteilchen aneinander

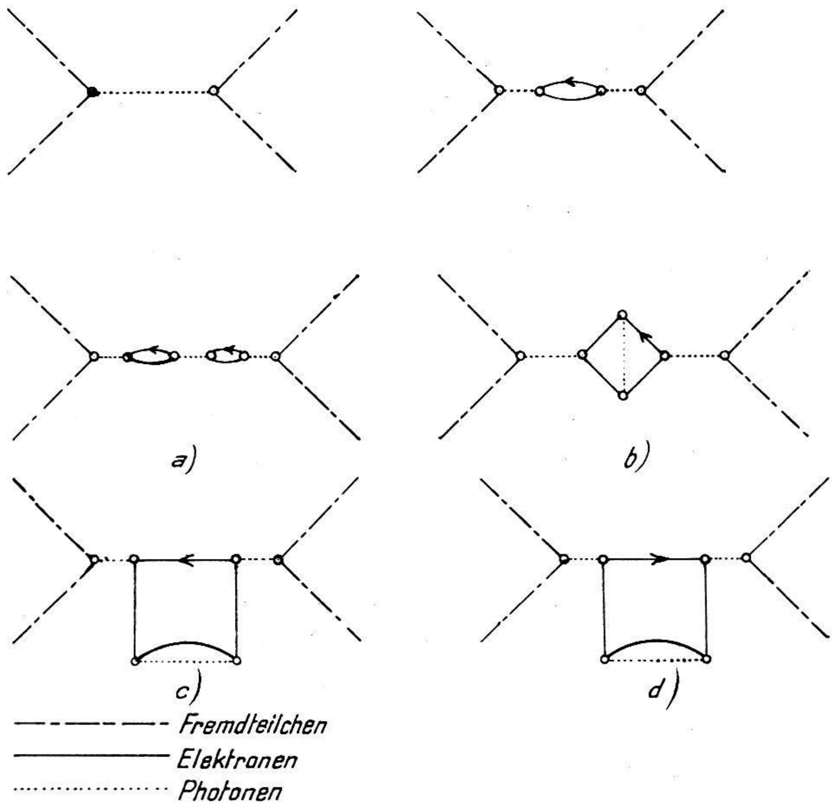

Fig. 1.

wird durch die Ankopplung des Elektronenwellenfeldes verändert und diese Veränderung bezeichnet man als Einfluss der Vacuumpolarisation.

Insbesondere wird die Streumatrix proportional ε_0^2 für die Streuung zweier Fremdteilchen aneinander von der Form sein

$$S = -\frac{i}{2}\int d^4 x' \int d^4 x''\, P\big(J_\mu(x')\, P_{\mu\nu}(x'-x'')\, J_\nu(x'')\big) \qquad (1)^*$$

*) Bezüglich des Operators P vgl. [4]).

wo $J_\mu(x)$ der Strom der Fremdteilchen ist. $P_{\mu\nu}(x'-x'')$ beschreibt die Polarisationseffekte.

Die Wechselwirkungsenergiedichte lautet

$$h(x) = -\Phi_\nu(x)[j_\nu(x) + J_\nu(x)] - h_s(x) \tag{2}$$

wobei $j_\nu(x) = i\, e_0\, \bar{\psi}\, \gamma_\nu\, \psi$ der Elektronenstrom, $\Phi_\nu(x)$ das Photonenfeld bedeutet. $h_s(x)$ ist die Selbstenergiedichte.

Eine Übersicht über die Form von $P_{\mu\nu}(x'-x'')$ verschafft man sich am besten an Hand der Feynman-Dyson'schen Graphen[4])[5]). Die einfachsten Graphen sind offenbar die folgenden (Fig. 1).

Allgemein ist der Graph zu einem Term proportional $\varepsilon_0^2\, e_0^{2n}$ $n = 1, 2, \ldots$ von der Form Fig. 2.

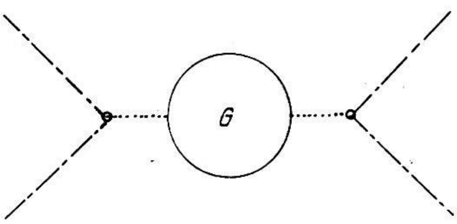

Fig. 2.

Wir können die Graphen G in 2 Klassen einteilen, je nachdem sie aus 2 Subgraphen bestehen, die nur durch eine Photonlinie verbunden sind (Fig. 1a) oder nicht. Falls eine solche Zerlegung möglich ist, nennen wir den Graphen zerlegbar, sonst unzerlegbar.

Die Zerlegung eines Graphen G in zwei Subgraphen G_1 und G_2 vom eben beschriebenen Typus bezeichnen wir symbolisch durch eine Gleichung $G = G_1 \cdot G_2$. Dann ist die Menge aller Graphen offenbar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum G')^n \tag{3}$$

wobei G' nur über die unzerlegbaren Graphen läuft. Nun entspricht jedem Graphen eindeutig ein Summand in $P_{\mu\nu}(x'-x'')$. Wir fassen dabei passend $P_{\mu\nu}(x'-x'')$ als eine Matrix $(\mu x'|\boldsymbol{P}|\mu x'')$ auf und schreiben

$$\boldsymbol{P} = -(1 + \sum_G \boldsymbol{Q}(G))\, \boldsymbol{D}_c \tag{4}$$

Dabei ist

$$(\mu x' | \boldsymbol{D}_c | \nu x'') = \delta_{\mu\nu} D_c(x' - x'') = i \langle P[\Phi \mu(x')\, \Phi_\nu(x'')] \rangle_{\text{Vac}} \tag{5}^*$$

*) Wegen dieser Funktion siehe D. Rivier[6]). D_c ist im wesentlichen D_F von Feynman-Dyson. Dasselbe gilt von S_c und S_F in § 3.

Weiter gilt für zerlegbare Graphen

$$\boldsymbol{Q}(G_1 \cdot G_2) = \boldsymbol{Q}(G_1)\,\boldsymbol{Q}(G_2)$$

so dass wir nach (3) für $\boldsymbol{P}$ auch schreiben können

$$\boldsymbol{P} = -\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{G'} \boldsymbol{Q}(G')\right)^n\right] \boldsymbol{D}_c = -\sum_{n=o}^{\infty} \boldsymbol{Q}^n \boldsymbol{D}_c \tag{6}$$

wo

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{G'} \boldsymbol{Q}(G') \tag{6'}$$

Schliesslich ergibt sich daher für

$$\boldsymbol{P} = -\frac{1}{1-\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{D}_c \tag{7}$$

Um den Zusammenhang mit den gewohnten Bezeichnungen herzustellen, spalten wir $\boldsymbol{P}$ auf:

$$\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{D}_c - \boldsymbol{D}_c \boldsymbol{K} \boldsymbol{D}_c \tag{8}$$

und ebenso

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}_c \boldsymbol{R} \tag{9}$$

so dass

$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{R}}{1 - \boldsymbol{D}_c \boldsymbol{R}} \tag{10}$$

Statt von der Streuung zweier „Fremdteilchen" aneinander auszugehen, hätte man ebensogut ausgehen können von der Streuung eines Fremdteilchens an einem äusseren elektromagnetischen Feld $A_\mu(x)$. Für den in $A_\mu(x)$ und $J_\nu(x)$ linearen Teil der S-Matrix findet man leicht

$$i \int d^4 x'\, J_\mu(x')\, A_\mu(x') +$$
$$i \int J_\mu(x')\, D_c(x' - x'')\, K_{\mu\nu}(x'' - x''')\, A_\nu(x''')\, d^4 x'\, d^4 x''\, d^4 x'''$$

Ebenso kann man den Vacuumerwartungswert für den Strom bei gegebenem äusserem Feld $A_\mu(x)$ ausrechnen und findet für den in $A_\mu(x)$ linearen Teil*)

$$\langle j_\mu(x') \rangle_{\text{Vac}} = \int K_{\mu\nu}(x' - x'')\, A_\nu(x'')\, d^4 x'' \tag{11**}$$

Damit ist der Anschluss an die übliche Bezeichnungsweise erreicht.

*) Höhere Potenzen in $A_\mu(x)$ siehe [7]).

**) Gegenüber [1]) ist das Vorzeichen von $K_{\mu\nu}$ umgedreht.

Gleichzeitig erhalten wir die Bedingung der Eichinvarianz

$$\frac{\partial K_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = 0 \tag{12}$$

Fourier-Transformation. Allgemein schreiben wir

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q\, e^{iqx} F(q) \tag{13}$$

Insbesondere seien so definiert: $P_{\mu\nu}(q)$, $K_{\mu\nu}(q)$ usw.

Weiter ist $D_c(q) = \frac{1}{q^2}$ *). Damit wird

$$(\mu\,|\,K(q)\,|\,\nu) = q^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^2}\right)^n (\mu\,|\,R^n(q)\,|\,\nu) \tag{14}$$

Aus Invarianzgründen

$$(\mu\,|\,R(q)\,|\,\nu) = A(q^2)\, q_\mu q_\nu + B(q^2)\, q^2 \delta_{\mu\nu} \tag{15}$$

In (14) eingesetzt unter Verwendung von

$$\left(\frac{1}{q^2}\right)^n (\mu\,|\,R^n(q)\,|\,\nu) = \frac{1}{q^2} \left[\left\{(A+B)^n - B^n\right\} q_\mu q_\nu + B^n q^2 \delta_{\mu\nu}\right] \tag{16}$$

$$(\mu\,|\,K(q)\,|\,\nu) = \left(\frac{A+B}{1-A-B} - \frac{B}{1-B}\right) q_\mu q_\nu + \frac{B}{1-B} q^2 \delta_{\mu\nu} \tag{17}$$

was nur eichinvariant ist, falls $A + B = 0$.

Es muss also

$$(\mu\,|\,R(q)\,|\,\nu) = (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu})\, A(q^2) \tag{15$'$**)}$$

damit wird

$$(\mu\,|\,K(q)\,|\,\nu) = \frac{A(q^2)}{1 + A(q^2)} (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) \tag{18}$$

und

$$(\mu\,|\,P(q)\,|\,\nu) = -\frac{1}{q^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{A(q^2)}{1 + A(q^2)} \frac{p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2}{q^2}\right)$$

wofür man wegen der Kontinuitätsgleichung für den Strom auch schreiben kann

$$(\mu\,|\,P(q)\,|\,\nu) = -\frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 + A(q^2)} \tag{19}$$

---

*) Bei der Fourier-Transformation hat man über q_0 zuerst zu integrieren und dabei in der komplexen Ebene den Pol $q_0 = -|\vec{q}\,|$ unten und den Pol$+|\vec{q}\,|$ oben zu umgehen.

**) Die nicht-eichinvarianten Terme interessieren uns hier nicht, vgl. dazu Einleitung und [8]).

Zur Abtrennung der Ladungsrenormalisation entwickelt man $[1 + A(q^2)]^{-1}$ nach Potenzen von q^2. Der konstante Term bedeutet die Ladungsrenormalisation $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2$ wo ε die wahre Ladung ist.

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{1 + A(0)} \tag{20}$$

§ 3. Die Vacuumpolarisation $\sim e_0^2$ und $\sim e_0^4$.

Unsere Aufgabe ist es nun, $\boldsymbol{R}$ resp. $R_{\mu\nu}(q)$ zu bestimmen, und zwar beschränken wir uns dabei auf die zwei ersten Terme in der Entwicklung nach e_0^2: $R^{(2)}$ und $R^{(4)}$). Man findet nach gewohnten Methoden[4])[5])

$$R^{(2)}_{\mu\nu}(x - x') = -e_0^2\, i\, Sp\{\gamma_\mu S_c(x - x')\, \gamma_\nu S_c(x' - x)\} \tag{21}$$

und*)

$$\begin{aligned} R^{(4)}_{\mu\nu}(03) = \\ & -e_0^4 \int d^4x'\, d^4x''\, D_c(12) \cdot Sp\{\gamma_\mu S_c(01)\, \gamma_\sigma S_c(13)\, \gamma_\nu S_c(32)\, \gamma_\sigma S_c(20) \\ & + \gamma_\mu S_c(01)\, \gamma_\sigma S_c(12)\, \gamma_\sigma S_c(23)\, \gamma_\nu S_c(30) \cdot \frac{1}{2}[\varepsilon(13) - \varepsilon(23)] \\ & + \gamma_\mu S_c(03)\, \gamma_\nu S_c(32)\, \gamma_\sigma S_c(21)\, \gamma_\sigma S_c(10)\, \frac{1}{2}[\varepsilon(20) - \varepsilon(10)] \end{aligned} \tag{22**}$$

Dabei ist $S_c\,(x-x')$ definiert durch ***)

$$\langle P[\psi_\alpha(0)\, \bar{\psi}_\beta(1)]\, \varepsilon(01) \rangle_{\text{Vac}} = i\, S_{c_{\alpha\beta}}(01) \tag{23}$$

$$S_c(q) = \frac{i\gamma q - m}{q^2 + m^2} \tag{23'}$$

Eine Bemerkung zur Massensubtraktion: diese wurde mit der Selbstenergiedichte

$$\begin{aligned} h_s(x) = \frac{e_0^2\, i}{2} \int d^4x'\, D_c(x - x') [\bar{\psi}(x)\, \gamma_\sigma S_c(x - x')\, \gamma_\mu\, \psi(x') \\ + \bar{\psi}(x')\, \gamma_\sigma S_c(x' - x)\, \gamma_\sigma\, \psi(x)] \end{aligned}$$

durchgeführt, könnte aber ebensogut mit $h_s = \delta \cdot \bar{\psi}(x)\, \psi(x)$ durchgeführt werden.

---

*) (03) bedeutet $(x - x''')$ usw.

**) $S(x)$, $\bar{S}(x)$, $S^{(1)}(x)$ usw. nach SCHWINGER[9]).

***) Vgl. die Anmerkungen zu $D_c(x)$ und $D_c(q)$ in § 2.

Für $R^{(2)}(q)$ findet man

$$R^{(2)}_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2)\Big[-\frac{4}{3}\cdot\frac{e_0{}^2\, i}{(2\pi)^4}\int d^4 k\cdot\frac{1}{k^2+m^2} \qquad (24)$$
$$-\frac{e_0^2}{8(2\pi)^2} q^2 \int_{-1}^{+1} du\, \frac{u^2\left(1-\frac{1}{3}u^2\right)}{m^2+\frac{q^2}{4}(1-u^2)}\Big]$$

Die Ladungsrenormalisation ist im ersten, logarithmisch divergenten Integral enthalten. Als invariantes Limitierungsverfahren kann man die Regularisierung von PAULI-VILLARS[8]) verwenden, d. h. man kann an Stelle des Integrals

$$\int d^4 k\,(k^2+m^2)^{-2}$$

setzen

$$\int d^4 k\,[(k^2+m^2)^{-2} - (k^2+m^2+M^2)^{-2}]$$

$$= \int d^4 k_0 \int_0^1 du\, \frac{2M^2}{[k^2+m^2+M^2 u]^3} = \pi^2 i \int_0^1 du\, \frac{M^2}{m^2+M^2 u} = \pi^2 i \ln\frac{m^2+M^2}{m^2}$$

woraus mit (15′)

$$\tilde{A}_2(0) = \frac{e_0^2}{12\pi^2}\ln\frac{m^2+M^2}{m^2} \qquad (25)$$

Von $R^{(4)}$ interessiert uns zuerst die Eichinvarianz. Man findet für

$$i\, q_\mu R^{(4)}_{\mu\nu}(q) = \delta\cdot m\cdot q_\mu\cdot\frac{8}{(2\pi)^3}\int d^4 p\int_0^1 dv\,\frac{1-2v}{[p^2+m^2+q^2 v(1-v)]^2}$$

wobei δ die Selbstmasse der Elektronen ist. Dieser Ausdruck ist unbestimmt. Das letzte Integral aber verschwindet, wenn man bezüglich der Elektronen mit $\Sigma C_i = O$ regularisiert[8]). R_2 ist also eichinvariant, sofern man durch Regularisierung nur dafür sorgt, dass es endlich ist.

Zur Ausrechnung zerlegen wir $R^{(4)}$ wie folgt:

$$R^{(4)}_{\mu\nu} = \left(U^{(1)}_{\mu\nu} + U^{(2)}_{\mu\nu} + V_{\mu\nu}\right) e_0^4 \qquad (26)$$

wobei

$$U^{(1)}_{\mu\nu}(03) = -\frac{1}{2}\int_{1,2} D_c(12)\, Sp\{\gamma_\mu S_c(01)\,\gamma_\sigma S_c(12)\,\gamma_\sigma S_c(23)\,\gamma_\nu S_c(30)\}$$
$$\cdot[\varepsilon(13) - \varepsilon(23)] \qquad (27')$$

$$U^{(2)}_{\mu\nu}(03) = -\frac{1}{2}\int_{1,2} D_c(12)\, Sp\{\gamma_\mu S_c(03)\,\gamma_\nu S_c(32)\,\gamma_\sigma S_c(21)\,\gamma_\sigma S_c(10)\}$$
$$\cdot[\varepsilon(20) - \varepsilon(10)] \qquad (27'')$$

$$V_{\mu\nu}(03) = -\int\limits_{1,2} D_c(12)\, Sp\{\gamma_\mu S_c(01)\,\gamma_\sigma S_c(13)\,\gamma_\nu\, S_c(32)\,\gamma_\sigma\, S_c(20)\} \tag{28}$$

$U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ enthalten beide den Ausdruck $\gamma_\sigma D_c\,(21)\; S_c\,(12)\;\gamma_\sigma = M_c\,(12)$

$$M_c(12) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4k\, d^4p\, e^{i(x'-x'')(p-k)}\,\frac{\gamma_\sigma\,(i\gamma p - m)\,\gamma_\sigma}{k^2\,(p^2+m^2)}$$

$$= -\frac{2}{(2\pi)^8}\int d^4q\, e^{iq(x'-x'')}\int d^4k\,\frac{i\gamma\,(p+k)+2m}{k^2\,((q+k)^2+m^2)}$$

Dabei ist die nützliche Gleichung

$$\gamma_\sigma\,\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_{2n+1}}\gamma_\sigma = -2\,\gamma_{\nu_{2n+1}}\gamma_{\nu_{2n}}\cdots\gamma_{\nu_1}$$

in einem Spezialfall verwendet.

Das auftretende k-Integral divergiert. Wir können es aber durch eine formale Regularisierung mit Hilfe einer grossen ,,Photonmasse'', konvergent machen. Dadurch ersetzen wir

$$\frac{1}{k^2}\ \text{durch}\ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+M^2} = \frac{M^2}{k^2+M^2}$$

und lassen im Schlussresultat M^2 gegen unendlich gehen, sofern dies möglich ist, ohne dass der Ausdruck unendlich wird[5])[8]). In diesem Fall sagen wir, die Unendlichkeiten der k-Integration heben sich gegenseitig auf. Die Regulierung wird hier nur als Methode zur Behandlung unendlicher Ausdrücke benützt.

Dadurch also

$$M_c(12) = -\frac{2M^2}{(2\pi)^8}\int d^4q\, e^{iq(x'-x'')}\int d^4k\,\frac{i\gamma\,(q+k)+2m}{((q+k)^2+m^2)\,k^2\,(k^2+M^2)}$$

unter Verwendung von Feynmans Formel[5])

$$\frac{1}{a_0\,a_1\cdots a_n} = n\,!\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} dx_n\,\frac{1}{[a_0+(a_1-a_0)\,x_1+\cdots+(a_n-a_{n-1})\,x_n]^{n+1}}$$

ergibt sich

$$M_c(12) = -\frac{4M^2}{(2\pi)^8}\int d^4q\, e^{iq(x'-x'')}\times$$

$$\times\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4k\,\frac{i\gamma\,(q+k)+2m}{[(k+q\,(1-x))^2+q^2\,x\,(1-x)+m^2\,(1-x)+M^2\,y]^3}$$

Setzt man $k' = k + q\,(1-x)$, so ergibt sich

$$M_c(12) = -\frac{4\,M^2}{(2\,\pi)^8}\int d^4 q\, e^{i\,q\,(x'-x'')}\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\,\times$$

$$\times\int d^4 k\,\frac{i\,\gamma\,q\,x + 2\,m}{[k^2 + q^2\,x\,(1-x) + m^2\,(1-x+M^2\,y]^3}$$

$$= -\frac{2\,\pi^2\,i\,M^2}{(2\,\pi)^8}\int d^4 q\, e^{i\,q\,(x'-x'')}\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\,\frac{i\,\gamma\,q\,x+2\,m}{q^2\,x\,(1-x)+m^2(1-x)+M^2\,y}$$

wobei verwendet wurde[5])

$$\int\frac{d^4\,k}{[k^2+A]^3} = \frac{\pi^2\,i}{2\,A}$$

Nun tritt in $U^{(1)}$ auf $\frac{1}{2}\int M_c(12)\;S\,(23)\;\varepsilon\,(13)\;d^4\,x''$

$$= -\frac{\pi^2\,i\,M^2}{(2\,\pi)^4}\cdot\frac{(-i)}{(2\,\pi)^3}\,\varepsilon\,(13)\int d^4 q\, e^{i\,q\,(x'-x''')}\,\times$$

$$\times\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\,\frac{(i\,\gamma\,q\,x + 2\,m)\,(i\,\gamma\,q - m)}{q^2\,x\,(1-x)+m^2\,(1-x)+M^2\,y}\;\delta\,(q^2+m^2)\;\varepsilon\,(q)$$

$$= -\frac{\pi^2\,i\,M^2}{(2\,\pi)^4}\cdot\frac{(-i)}{(2\,\pi)^3}\;\varepsilon\,(13)\int d^4 q\, e^{i\,q\,(x'-x''')}\,\times$$

$$\times\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\,\frac{(2-x)\,m\,(i\,\gamma\,q - m)}{m^2\,(1-x)^2+M^2\,y}\;\delta\,(q^2+m^2)\;\varepsilon\,(q)$$

$$= -\frac{\pi^2\,i\,M^2\,m}{(2\,\pi)^4}\cdot\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\,\frac{2-x}{m^2\,(1-x)^2+M^2\,y}\;\varepsilon\,(13)\,S\,(13)$$

$$= +\frac{2\pi^2\,i\,M^2\,m}{(2\,\pi)^4}\cdot\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\,\frac{2-x}{m^2\,(1-x)^2+M^2\,y}\,\overline{S}\,(13)$$

$$= +\frac{2\,\pi^2\,i\,M^2\,m}{(2\,\pi)^8}\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\,\frac{2-x}{m^2\,(1-x)^2+M^2\,y}\int d^4 q\, e^{i\,q\,(x'-x''')}\,\frac{i\,\gamma\,q-m}{q^2+m^2}$$

Weiter tritt in $U^{(1)}$ auf

$$-\frac{1}{2}\int M_c(12)\;S\,(23)\;\varepsilon\,(23)\;d^4\,x'' = \int M_c\,(12)\;\overline{S}\,(23)\;d^4\,x''$$

$$= -\frac{2\,\pi^2\,i\,M^2}{(2\,\pi)^8}\int d^4\,q\, e^{i\,q\,(x'-x''')}\int\limits_0^1 d\,x\int\limits_0^x d\,y\Big[-\frac{x}{q^2\,x\,(1-x)+m^2\,(1-x)+M^2\,y}$$

$$+\frac{m\,(2-x)\,(i\,\gamma\,q-m)}{[q^2\,x\,(1-x)+m^2\,(1-x)+M^2\,y]\,[q^2+m^2]}\Big]$$

also für die Summe der beiden Terme

$$\frac{1}{2}\int d^4 x''\, M_c(12)\, S(23)\,[\varepsilon(13) - \varepsilon(23)]$$

$$= -\frac{2\pi^2 i M^2}{(2\pi)^8}\int d^4 q\, e^{iq(13)}\int_0^1 dx\int_0^x dy\Big[-\frac{x}{q^2 x(1-x)+m^2(1-x)+M^2 y}$$

$$+\frac{m(2-x)(i\gamma q - m)}{q^2+m^2}\left(\frac{1}{(q^2+m^2)x(1-x)+m^2(1-x)^2+M^2 y}-\frac{1}{m^2(1-x)^2+M^2 y}\right)\Big]$$

$$= \frac{2\pi^2 i M^2}{(2\pi)^8}\int d^4 q\, e^{iq(13)}\int_0^1 dx\int_0^x dy\Big[\frac{x}{q^2 x(1-x)+m^2(1-x)+M^2 y}$$

$$+\int_0^x dz\,\frac{m(2-x)(i\gamma q - m)(1-x)}{[(q^2+m^2)z(1-x)+m^2(1-x)^2+M^2 y]^2}\Big]$$

Hier erscheinen die Unendlichkeiten von der k-Integration getrennt. Führt man nämlich im zweiten Term der Klammer die y-Integration aus, so kann man M^2 gegen unendlich gehen lassen. Damit ergibt sich schliesslich

$$= \frac{2\pi^2 i}{(2\pi)^8}\int d^4 q\, e^{iq(13)}\Big[\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\frac{M^2 x}{q^2 x(1-x)+m^2(1-x)+M^2 y}$$

$$+\int_0^1 dx\int_0^x dz\,\frac{m(2-x)(i\gamma q - m)}{(q^2+m^2)z+m^2(1-x)}\Big]$$

Setzt man das in $U^{(1)}_{\mu\nu}(x - x''')$ ein und geht nach (13) zur Fouriertransformierten über, so erhält man:

$$U^{(1)}_{\mu\nu}(q) = \frac{2\pi^2 i}{(2\pi)^8}\int d^4 p\,\frac{1}{(p^2+m^2)((p-q)^2+m^2)}\times$$

$$\times\Big\{M^2\int_0^1 dx\int_0^1 dy\cdot x\,\frac{Sp\{\gamma_\mu(i\gamma p - m)\,\gamma\,\nu\,(i\gamma(p-q)-m)\}}{m^2(1-x)+p^2 x(1-x)+M^2 y}$$

$$+m\int_0^1 dx\int_0^x dz\cdot(2-x)\cdot\frac{Sp\{\gamma_\nu(i\gamma p - m)^2\gamma_\mu(i\gamma(p-q)-m)\}}{m^2(1-x)+(p^2+m^2)z}\Big\} \qquad (29')$$

Weiter findet man leicht

$$U^{(2)}_{\mu\nu}(q) = U^{(1)}_{\mu\nu}(-q) \tag{29''}$$

Etwas heikler zu behandeln ist der Term $V_{\mu\nu}(03)$ von (28). Zunächst findet man durch Fouriertransformation (wobei die Regularisierung bezüglich der Photonen schon durchgeführt ist)

$$V_{\mu\nu}(q) = \frac{M^2}{(2\pi)^8} \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \times$$

$$\times \frac{Sp\{\gamma_\mu(i\gamma p_1 - m)\gamma_\sigma(i\gamma p_2 - m)\gamma_\nu(i\gamma(p_2-q)-m)\gamma_\sigma(i\gamma(p_1-q)-m)\}}{(p_1^2+m^2)(p_2^2+m^2)((p_2-q)^2+m^2)((p_1-q)^2+m^2)(p_1-p_2)^2((p_1-p_2)^2+M^2)} \tag{30}$$

Die Abspaltung der Hauptunendlichkeiten geschieht genau nach der Dyson'schen Vorschrift*) und kann wie folgt durchgeführt werden:

$$\left.\begin{aligned}
V_{\mu\nu}(q) &= \frac{M^2}{(2\pi)^8}\int d^4p_1 \int d^4 p_2 \\
&\left\{\int_0^1 d\lambda_1 \int_0^1 d\lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} \times\right.\\
&\times \frac{Sp\{\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\sigma(i\gamma p_2-m)\gamma_\nu(i\gamma(p_2-\lambda_2 q)-m)\gamma_\sigma(i\gamma(p_1-\lambda_1 q)-m)\}}{(p_1{}^2+m^2)(p_2{}^2+m^2)((p_2-\lambda_2 q)^2+m^2)((p_1-\lambda_1 q)^2+m^2)(p_1-p_2)^2((p_1-p_2)^2+M^2)}\\
&+ \frac{Sp\{\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\sigma(i\gamma p_2-m)\gamma_\nu(i\gamma p_2-m)\gamma_\sigma(i\gamma(p_1-q)-m)\}}{(p_1{}^2+m^2)(p_2{}^2+m^2)^2((p_1-q)^2+m^2)(p_1-p_2)^2((p_1-p_2)^2+M^2)}\\
&+ \frac{Sp\{\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\sigma(i\gamma p_2-m)\gamma_\nu(i\gamma(p_2-q)-m)\gamma_\sigma(i\gamma p_1-m)\}}{(p_1{}^2+m^2)^2(p_2{}^2+m^2)((p_2-q)^2+m^2)(p_1-p_2)^2((p_1-p_2)^2+M^2)}\\
&\left.- \frac{Sp\{\gamma_\mu(i\gamma p_1-m)\gamma_\sigma(i\gamma p_2-m)\gamma_\nu(i\gamma p_2-m)\gamma_\sigma(i\gamma p_1-m)\}}{(p_1{}^2+m^2)^2(p_2{}^2+m^2)^2(p_1-p_2)^2((p_1-p_2)^2+M^2)}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Hierbei ist das letzte Integral überhaupt von q unabhängig, für unsere Diskussion also entbehrlich. Wir lassen es daher in Zukunft auch weg. Weiter geben die beiden mittleren Integrale gleich viel und zwar gibt je schon eine Integration beim Grenzübergang $M^2 \to \infty$ Unendlichkeiten. Im ersten Integral aber ist die Photon-Regularisierung überflüssig, da man dort eine Integration durchführen kann ohne auf Unendlichkeiten zu stossen. Wir beginnen mit der

*) DYSON[4]), p. 1749. Wir sind Herrn DYSON für eine Diskussion über diesen Fall sehr zu Dank verpflichtet.

Diskussion der Summe der beiden mittleren Integrale. Man findet dafür, ähnlich wie früher,

$$-\frac{4M^2\pi^2 i}{(2\pi)^8}\int d^4p\int_0^1 dx\int_0^x dy\cdot x\times$$

$$\times\frac{Sp\left\{\gamma_\mu(i\gamma p-m)\gamma_\nu(i\gamma(p-q)-m)\right\}}{(p^2+m^2)\,((p-q)^2+m^2)\,[p^2x(1-x)+m^2(1-x)+M^2y]}$$

$$+\frac{2\pi^2 i}{(2\pi)^8}\int d^4p\int_0^1 dx\frac{Sp\left\{(\gamma_\mu(i\gamma p-m)\gamma_\sigma(i\gamma p x+m)\gamma_\nu(i\gamma p x+m)\gamma_\sigma(i\gamma(p-q)-m)\right\}}{(p^2+m^2)\,(p^2x+m^2)\,((p-q)^2+m^2)}$$

$$-\frac{4\pi^2 i}{(2\pi)^8}\int d^4p\int_0^1 dx\;x(p^2(1-2x)-m^2)\frac{Sp\left\{\gamma_\mu(i\gamma p-m)\gamma_\nu(i\gamma(p-q)-m)\right\}}{(p^2+m^2)\,(p^2x+m^2)\,((p-q)^2+m^2)}$$

$$+\frac{2\pi^2 i}{(2\pi)^8}\int d^4p\,\frac{Sp\left\{\gamma_\mu(i\gamma p-m)\gamma_\nu(i\gamma(p-q)-m)\right\}}{(p^2+m^2)\,((p^2-q)^2+m^2)} \tag{32}$$

Der erste Term hebt sich genau weg gegen die M^2 enthaltenden Terme von $U^{(1)}_{\mu\nu}(q)$ und $U^{(2)}_{\mu\nu}(q)$ (29). Diese Tatsache ist entscheidend für die Endlichkeit der Theorie.

Da wir schon wissen, dass $R^{(4)}_{\mu\nu}(q)$, sofern nur durch genügende Regularisierung für die Endlichkeit gesorgt ist, eichinvariant ist, genügt es, die Spur $R^{(4)}_{\nu\nu}(q)$ zu betrachten. Nach (15′) erhält man

$$R^{(4)}_{\nu\nu}(q) = -3q^2 A(q) \tag{33}$$

und aus den oben stehenden Formeln (29) (31) und (32)

$$A^{(4)}(q^2) = \frac{16\,e_0^4}{3q^2\cdot(2\pi)^8}\left\{\int d^4p_1\int d^4p_2\int_0^1 d\lambda_1\times\right.$$

$$\times\int_0^1 d\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\frac{Sp}{(p_1-p_2)^2(p_1{}^2+m^2)(p_2^2+m^2)((p_2-\lambda_2 q)^2+m^2)((p_1-\lambda_1 q)^2+m^2}$$

$$+\pi^2 i\int d^4p\int_0^1 dx\frac{p^4x-p^2(pq)x+p^2m^2(1+8x-6x^2)-(pq)m^2(1+2x)+2m^4(1-2x)}{(p^2\,m^2)\,((p-q)^2+m^2)\,(p^2x+m^2)}$$

$$-4\pi^2 i\int d^4p\int_0^1 dx\int_0^x dz\frac{m^2((pq)-m^2)(2-x)}{(p^2+m^2)\,((p-q)^2+m^2)\,((p^2+m^2)z+m^2(1-x))} \tag{33}$$

wobei

$$Sp = -\frac{1}{16} Sp\{\gamma_\mu (i\gamma p_1 - m)\gamma_\sigma (i\gamma p_2 - m)\gamma_\mu (i\gamma p_2) - \lambda_2 q) - m)\gamma_\sigma \times$$
$$(i\gamma (p_1 - \lambda_1 q - m)\}$$
$$= 2[(p_1 p_2)^2 - \lambda_1 (p_1 p_2)(p_2 q) - \lambda_2 (p_1 p_2)(p_1 q) + \lambda_1 \lambda_2 (p_1 q)(p_2 q)]$$
$$+ m^2 [4 (p_1 p_2) + p_1^2 + p_2^2 - \lambda_1 (p_1 q) + 2 (p_2 q)) - \lambda_2 ((p_2 q) + 2 (p_1 q))$$
$$+ \lambda_1 \lambda_2 q^2] + 2 m^4 \tag{34}$$

Zur Gewinnung der Ladungsrenormalisation*) benötigen wir $A^{(3)}(0)$. Durch Entwicklung findet man leicht

$$A^{(4)}(0) = \frac{16 e_0^4}{3 q^2 \cdot (2\pi)^8} \Big\{ \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 (p_1^2 + m^2)^2 (p_2^2 + m^2)^2} \Big[2 (p_1 q)(p_2 q)$$
$$+ m^2 q^2 + 4 (p_1 q)(p_2 q) \frac{2 (p_1 p_2)^2 + m^2 [4 (p_1 p_2) + p_1^2 + p_2^2] + 2 m^4}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)}$$
$$- 4 (p_2 q) \frac{2 (p_1 p_2)(p_2 q) + m^2 [(p_1 q) + 2 (p_2 q)]}{(p_2^2 + m^2)} \Big]$$
$$- \frac{\pi^2 i q^2}{2} \int d^4 p \int_0^1 d x \frac{p^6 x + p^4 m^2 (1 + 5 x) + 3 p^2 m^4 (1 + 6 x - 4 x^2) + 4 m^6 (1 - 2 x)}{(p^2 + m^2)^4 (p^2 x + m^2)}$$
$$- 2\pi^2 i q^2 \int d^4 p \int_0^1 d x \int_0^x d z \frac{(2 - x) m^2 (p^4 + p^2 m^2 + 2 m^4)}{(p^2 + m^2)^4 [(p^2 + m^2) z + m^2 (1 - x)]} \Big\} \tag{35}$$

und mit den gewohnten Methoden nach ziemlich umständlicher Rechnung

$$A^{(4)}(0) = -\frac{16 e_0^4}{3 \cdot (2\pi)^8} \cdot \frac{\pi^2 i}{2} \int d^4 p \times$$
$$\times \Big\{ \int_0^1 d x \frac{p^6 x^3 - p^4 m^2 x (1 + x - 2 x^2) - p^2 m^4 x (4 - 3 x) + 2 m^6}{(p^2 + m^2)^3 (p^2 x + m^2)^2}$$
$$+ \int_0^1 d x \frac{p^6 x + p^4 m^2 (1 + 5 x) + 3 p^2 m^4 (1 + 6 x - 4 x^2) + 4 m^6 (1 - 2 x)}{(p^2 + m^2)^4 (p^2 x + m^2)}$$
$$+ 4 \int_0^1 d x \int_0^x d z \frac{(2 - x) m^2 (p^4 + p^2 m^2 + 2 m^4)}{(p^2 + m^2)^4 [(p^2 + m^2) z + m^2 (1 - x)]} \Big\} \tag{36}$$

*) Die endlichen und grundsätzlich beobachtbaren Terme von $R_{\mu\nu}^{(4)}(q)$ betrachten wir hier nicht.

Der Ausdruck divergiert logarithmisch, und zwar wie

$$A^{(4)}_{\mathrm{div}}(0) = -\frac{8\pi^2 i}{3\cdot(2\pi)^8}\, e_0^4 \int d^4p \int_0^1 dx\, \frac{x+1}{(p^2+m^2)^2}$$

Regularisiert man bezüglich der Elektronen wie für $A^{(2)}_{\mathrm{div}}(0)$, so findet man

$$\tilde{A}^{(4)}_{\mathrm{div}}(0) = \frac{1}{64\pi^4}\, e_0^4 \ln \frac{m^2+M^2}{m^2} \tag{37}$$

Durch Vergleich von (25) und (37) erkennt man, dass $A^{(2)}(0)$ und $A^{(4)}(0)$ dasselbe Vorzeichen haben. Eine Kompensation ist deshalb unmöglich.

Wir danken Herrn Professor Pauli für das dauernde Interesse an dieser Arbeit.

Literatur.

1) Z. B. R. Jost und J. Rayski H.P.A. **22**, 457 (1949).
2) D. Feldman, Phys. Rev. im Druck.
3) H. Umezawa und Mitarbeiter, Progr. Theoret. Physics **3**, 317 (1948), weitere Arbeiten im Druck.
4) F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
5) R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).
6) D. Rivier, H. P. A. **22**, 265 (1949).
7) G. Källén, H. P. A. **22**, 637 (1949).
8) W. Pauli und F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
9) J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949); **76**, 790 (1949).
10) Z. B. A. Pais, The Development of the Theory of the Electron (Princeton 1948).