Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 22 (1949)

Heft: V

Artikel: Zur experimentellen Bestimmung des Resonanzwiderstandes elektromagnetischer Hohlräume

Autor: Borgnis, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112019

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur experimentellen Bestimmung des Resonanzwiderstandes elektromagnetischer Hohlräume

von **F. Borgnis** (Zürich).

(12. VI. 1949)

Zur Messung des Resonanzwiderstandes von Hohlraumresonatoren lassen sich eine Anzahl von Methoden angeben. Nach Betrachtungen allgemeiner Art über den Begriff und die Messung des Resonanzwiderstandes bei Mikrowellen werden diese Methoden speziell auf Hohlräume angewandt, deren elektromagnetisches Feld in gewissen Bereichen, auf die der Resonanzwiderstand bezogen wird, entweder als homogen oder als rotationssymmetrisch angesehen werden kann. Die notwendigen theoretischen Beziehungen werden abgeleitet; experimentelle Untersuchungen bei einer Wellenlänge von 14 cm an verschieden gestalteten Hohlräumen zeigen die Eignung und die Genauigkeit der angeführten Messmethoden.

Das Verhalten eines schwach gedämpften Parallelresonanzkreises gegenüber einer Wechselspannung der Kreisfrequenz $\omega = 2\,\pi\,\nu$ lässt sich durch ein Ersatzschaltbild nach Fig. 1 beschreiben. Bei Resonanz ($\omega^2 LC = 1$) stellt R_p den zwischen den Stellen A und B wirksamen, rein ohm'schen „Resonanzwiderstand" dar. Die „Dämpfung" d bzw. ihr Reziprokwert $Q = 1/d$ (Quality-factor) eines solchen Kreises lässt sich in bekannter Weise aus der Breite der Resonanzkurve ermitteln. Energetisch können Dämpfung und Resonanzwiderstand folgendermassen definiert werden: Die Dämpfung

$$d = \frac{\overline{Q}}{\omega\,\overline{W}}, \tag{1}$$

wobei $\overline{Q}$ die im Zeitmittel vom Kreis aufgenommene Verlustleistung und $\omega\overline{W}$ die mittlere Blindleistung ($\overline{W}$ = mittlerer elektromagnetischer Energieinhalt) bedeuten; der Resonanzwiderstand

$$R_p = \frac{\overline{U^2}}{\overline{Q}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\overline{Q}}. \tag{2}$$

$\overline{U^2} = U_{\text{eff}}^2$ ist das Quadrat der effektiven Wechselspannung am

Kreis. Dämpfung und Resonanzwiderstand stehen daher allgemein in dem Zusammenhang

$$d \cdot R_p = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\omega \overline{W}}. \tag{3}$$

Für einen Kreis nach Fig. 1 gilt speziell

$$d \cdot R_p = \omega L = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{3a}$$

Im Bereich hoher Frequenzen, bei denen die linearen Abmessungen der Kreise in die Grössenordnung der Wellenlänge kommen, ist eine

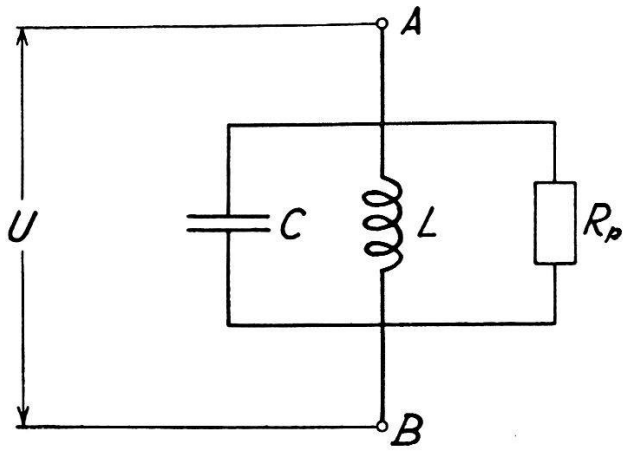

Fig. 1.

Ersatzbild eines schwach gedämpften Parallelresonanzkreises (R_p Parallelresonanzwiderstand, U = Wechselspannung zwischen den Punkten A, B).

„quasistationäre" Betrachtungsweise nicht mehr angängig. Die Verschiebungsströme treten wesentlich in Erscheinung, und die idealisierten Begriffe einer konzentrierten Kapazität oder Induktivität verlieren ihre Gültigkeit. Als Resonanzkreise verwendet man daher hier geschlossene metallische Hohlräume, in deren Innerem durch eine von aussen eingeführte Erregung ein elektromagnetisches Wechselfeld aufrechterhalten wird. Das Wechselspiel zwischen magnetischer und elektrischer Energie, die im quasistationären Fall in der Induktivität L bzw. der Kapazität C konzentriert ist, vollzieht sich hier im elektromagnetischen Feld des Hohlraums (HR), wobei elektrisches und magnetisches Feld räumlich nicht mehr zu trennen sind. Beziehungen von der Art (3a) verlieren ihren Sinn*);

*) In der Umgebung einer Resonanzstelle kann zwar auch das Verhalten eines Hohlraumresonators durch ein Ersatzbild nach Fig. 1 (oder einen Serienresonanzkreis) beschrieben werden; die fiktiven Grössen L und C haben jedoch dann keine unmittelbare physikalische Bedeutung wie beim quasistationären Kreis.

hingegen bleiben die energetischen Beziehungen (1) bis (3) aufrecht.

Die Dämpfung d kann auch bei Hohlräumen aus der Resonanzkurve entnommen werden[1]). Bei der Definition des Resonanzwiderstandes R_p nach (2) muss hier aber noch angegeben werden, was unter der „Spannung" U_{eff} verstanden wird, da das Linienintegral der elektrischen Feldstärke zwischen zwei Punkten im Innern eines HR nicht mehr unabhängig vom beliebigen Weg ist; es müssen also Bezugspunkte A, B (Fig. 2) für R_p festgelegt werden, ausserdem muss der Weg, auf den die „Spannung zwischen A und B" bezogen wird, evident sein.

Die Kenntnis von R_p spielt bei der Anwendung von Hohlraumresonatoren eine bedeutende Rolle. So liefert R_p beispielsweise die

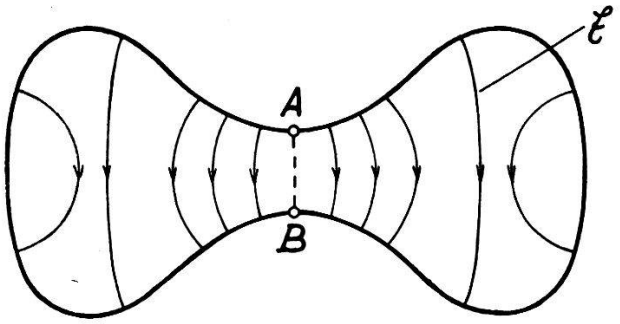

Fig. 2.

Hohlraumresonator mit einer durch die elektrischen Feldlinien E angedeuteten Erregung. Der Resonanzwiderstand wird hier z. B. auf die Punkte A, B, die „Spannung U_{AB}" auf den Weg AB längs der Symmetrieachse bezogen.

Grösse der aufzuwendenden Verlustleistung, wenn in einem HR zwischen zwei gewählten Bezugspunkten eine Wechselspannung vorgegebener Grösse (z. B. bei Acceleratoren) erzeugt werden soll; oder man erhält damit den Wert des Anfachstromes für einen Elektronenstrahl, der einen solchen HR zu Eigenschwingungen anregt. Die zweckmässige Wahl der Stellen A, B, auf welche R_p jeweils zu beziehen ist, folgt meist ohne weiteres aus der geometrischen Konfiguration des HR.

Die folgende Untersuchung befasst sich mit verschiedenen Methoden zur experimentellen Bestimmung des Resonanzwiderstands von Hohlräumen gebräuchlicher Formen. Teil I gibt die notwendigen theoretischen Beziehungen; Teil II berichtet über die experimentellen Ergebnisse bei den verschiedenen Methoden, so dass dieselben bezüglich ihrer Brauchbarkeit untereinander verglichen werden können.

I. Theoretische Beziehungen für die experimentelle Bestimmung des Resonanzwiderstandes.

1. Besitzen die verwendeten Hohlräume einfache geometrische Gestalt, so lassen sich Resonanzwiderstand und Dämpfung formelmässig berechnen*). Als Beispiel mögen die folgenden Anordnungen dienen:

a) Im kreiszylindrischen Hohlraum (Fig. 3), der in der elektrischen Grundschwingung (TM_{001}) erregt ist, besitzt das elektrische Feld E nur eine Komponente in Richtung der Zylinderachse; die

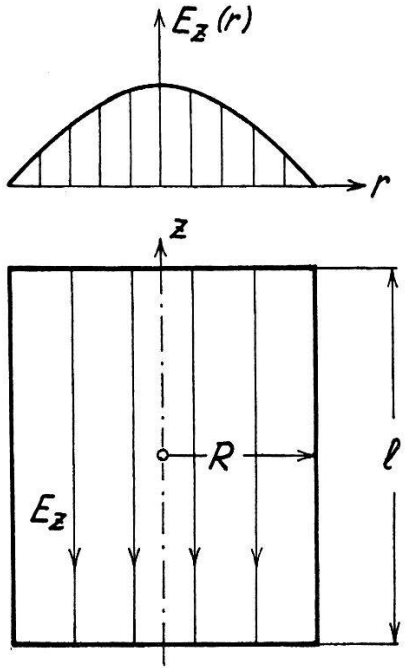

Fig. 3.
Kreiszylindrischer Hohlraum mit ebenen Abschlussflächen bei Erregung in der elektrischen Grundschwingung (TM_{001}).

radiale Verteilung $E_z(r)$ verläuft nach der Besselfunktion $J_0(kr)$ mit $k = 2\pi/\lambda$, wenn λ die Resonanzwellenlänge der Grundschwingung bedeutet. Von der z-Koordinate hängt E_z nicht ab; die magnetischen Feldlinien verlaufen in Kreisen um die Achse[2]). Die Resonanzwellenlänge ist gegeben durch

$$\lambda = 2{,}61 \cdot R\,. \tag{4}$$

*) Die Formeln werden im praktischen Maßsystem angegeben (Einheiten: Volt, Ampere, cm, sec.). Es bedeuten: $c = 3 \cdot 10^{10}$ (Lichtgeschwindigkeit), $\varepsilon_0 = 0{,}886 \cdot 10^{-13} = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11})$ (Dielektrizitätskonstante des Vakuums), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$ (Permeabilität des Vakuums), σ = elektrische Leitfähigkeit der inneren Hohlraumberandung in $(\text{Ohm} \cdot \text{cm})^{-1}$.

Weiterhin ergeben sich (s. a. Fig. 10):

$$R_{p\,(A,\,B)} = \frac{\pi\, l}{0{,}39\,\lambda\, c\, \varepsilon_0} \sqrt{\frac{30\sigma}{\lambda}} \frac{1}{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{l}\right)} \text{[Ohm]} \tag{5}$$

$$d = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{30\sigma}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{l}\right) \tag{6}$$

und somit

$$d \cdot R_p = \frac{l}{0{,}78\,\lambda\, c\, \varepsilon_0} \text{[Ohm]}. \tag{7}$$

b) Eine koaxiale kreiszylindrische, beiderseits metallisch abgeschlossene Doppelleitung (Fig. 4) von der Länge l und dem Aussen- bzw. Innenradius r_a und r_i besitzt bei der Erregung als Lecherleitung (TEM-Typ) ein radiales elektrisches Feld E_r und ein in Kreisen um die Achse verlaufendes magnetisches Feld H_φ, wobei die Felder in Ebenen senkrecht zur Achse liegen ($E_z = H_z \equiv 0$) und längs der

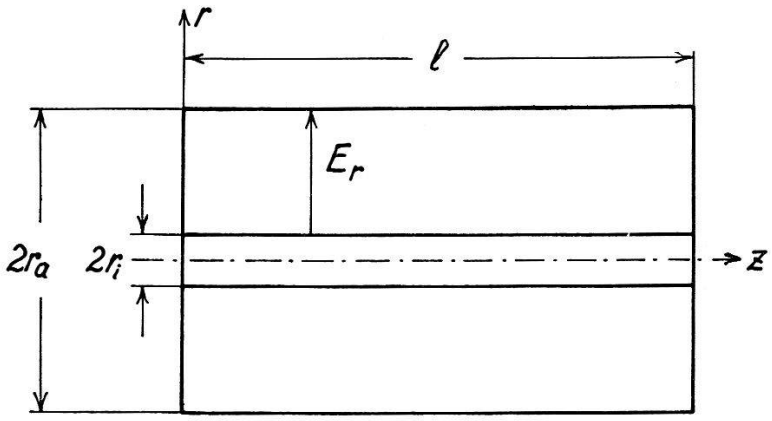

Fig. 4.

Konzentrische kreiszylindrische Leitung mit ebenen Abschlussflächen. E_r elektrische Feldstärke bei Erregung im Lechertyp (TEM-Typ).

z-Achse sinusförmig variieren. Die Resonanzwellenlänge der *Grundschwingung* ist

$$\lambda = 2\, l. \tag{8}$$

Weiterhin gilt für eine Stelle z der Leitung[3]):

$$R_p(z) = \frac{4}{\pi\, \varepsilon_0\, c} \sqrt{\frac{30\,\sigma}{\lambda}} \frac{r_a \ln r_a/r_i}{\frac{1 + r_a/r_i}{\ln r_a/r_i} + \frac{4\, r_a}{l}} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} z \text{[Ohm]}, \tag{9}$$

für die Dämpfung

$$d = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{30\,\sigma}} \frac{1}{r_a} \left[\frac{1 + r_a/r_i}{\ln r_a/r_i} + \frac{4\, r_a}{l}\right] \tag{10}$$

und somit

$$d \cdot R_p(z) = \frac{\ln r_a/r_i}{\pi^2 c \varepsilon_0} \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} z \,[\text{Ohm}]\,. \tag{11}$$

In Fällen, die einer exakten Rechnung zugänglich sind, wie z. B. in den vorangehenden, lässt sich der Resonanzwiderstand daher berechnen, sobald die Dämpfung d bekannt ist. Diese kann durch Aufnahme der Resonanzkurve (bei quadratisch arbeitendem Indikator aus der Halbwertsbreite) experimentell bestimmt werden.

2. Für Hohlräume mit weniger einfachen geometrischen Formen lässt sich die Feldverteilung als Lösung der Maxwellschen Gleichungen für die zugehörigen Randbedingungen meist nicht in geschlossener Form bestimmen. Energieinhalt und Verlustleistung im HR und damit ein theoretischer Zusammenhang zwischen R_p und d können hier nicht in einfacher Weise formelmässig angegeben werden.

Im folgenden werden einige Methoden besprochen, die zur experimentellen Bestimmung von R_p verwendet werden können. Aus Gründen, die sogleich verständlich werden, wollen wir diese Methoden abkürzend als ΔC-, ΔL-, und ΔR_p-Methode bezeichnen.

A. *Methode der dielektrischen Verstimmung* (*ΔC-Methode*).

Zur Veranschaulichung betrachten wir den Resonanzkreis der Fig. 1 mit „konzentrierten" Elementen C, L und R_p. Für die Resonanzfrequenz gilt

$$\omega^2 LC = 1 \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}\,. \tag{12}$$

Variiert man die Kapazität C (bei konstantem L) um ΔC, so folgt die zugehörige Änderung der Resonanzfrequenz $\Delta\omega$ mit (12) aus

$$2\,\omega\, C \Delta\,\omega + \omega^2\, \Delta C = 0;$$

daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\omega C} = -\frac{2}{\omega^2}\frac{\Delta\omega}{\Delta C} = 2\,\frac{\Delta(1/\omega)}{\Delta C} = \frac{1}{\pi c}\,\frac{\Delta\lambda}{\Delta C}\,. \tag{13}$$

Aus der Beziehung (3a) zwischen Resonanzwiderstand und Dämpfung erhält man mit (13)

$$R_p = \frac{1}{\omega C d} = \frac{1}{\pi c d}\,\frac{\Delta\lambda}{\Delta C}\,[\text{Ohm}]\,. \tag{14}$$

Misst man also die Dämpfung d und die durch eine kleine Kapazitätsänderung ΔC hervorgerufene Änderung der Resonanzwellenlänge $\Delta\lambda$, so kann R_p nach (14) berechnet werden.

Diese Methode lässt sich nun auf Hohlräume übertragen. Der Änderung ΔC im quasistationären Kreis entspricht hier eine durch äussere

Einwirkung hervorgerufene Änderung ΔW_e des elektrischen Energieinhaltes $W_e = \frac{1}{2}\int\limits_V \varepsilon\varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 dV$ im HR. Dies kann geschehen durch eine kleine Änderung ΔV des Hohlraumvolumens V, z. B. durch eine kleine Veränderung der metallischen Berandung an Stellen, wo das magnetische Feld gleich Null bzw. vernachlässigbar klein ist; oder durch eine Änderung der Dielektrizitätskonstante (DK) $\varepsilon\varepsilon_0$, d. h. Änderung der elektrischen Polarisation P im Bereich eines kleinen Volumens ΔV im Hohlraum. Die hierdurch bewirkte Änderung der Resonanzfrequenz $\Delta\omega$ lässt sich nach einem von J. MÜLLER[4]) angegebenen Satz berechnen zu

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{W}}, \tag{15}$$

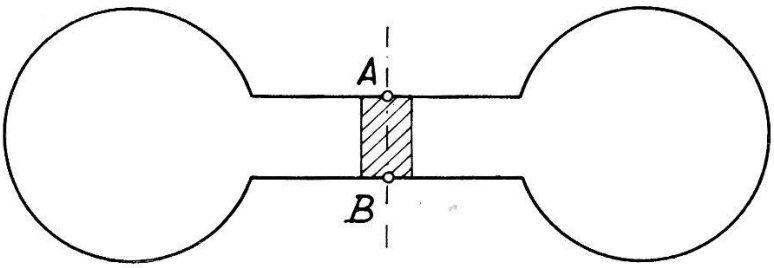

Fig. 5.
Hohlraumresonator von der Art der Fig. 2. In der Umgebung der Symmetrieachse AB wird das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ als homogen und quasistatisch (rot $\mathfrak{E} = 0$), das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ als rotationssymmetrisch um die Achse A, B ($\mathfrak{H} = 0$) angesehen.

wobei $\overline{\Delta A}$ die bei der Änderung der elektrischen bzw. magnetischen Feldenergie langsam im Vergleich zur Periodendauer geleistete Arbeit und $\overline{W}$ den totalen elektromagnetischen Energieinhalt des HR bedeuten. Wir geben zwei Anwendungen für Fälle, die von praktischem Interesse sind:

a) In einem beliebig gestalteten Hohlraum existiere ein Gebiet mit praktisch homogenem elektrischen Feld. Als Beispiel diene ein HR nach Fig. 5 mit der Symmetrieachse AB. Zwischen A und B liege ein kleiner zylindrischer Bereich mit AB als Achse, in dem das elektrische Feld als homogen und parallel der Achse angesehen werden kann. Die elektrische Feldstärke sei gegeben durch $E_0 \sin \omega t$ über die Länge $l = \overline{AB}$. Führen wir ein dielektrisches Stäbchen ($\mu = 1$) mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon\varepsilon_0$, dem Querschnitt f und der Länge l parallel der Achse zwischen den Punkten A und B ein, so lässt sich die hierdurch hervorgerufene Änderung der Resonanzwellenlänge $\Delta\lambda$ nach (15) berechnen. Denken wir uns in dem kleinen Volumen $\Delta V = f \cdot l$ des Stäbchens die relative DK ε lang-

sam vom Wert 1 bis zum Wert ε wachsend, so folgt für die Zunahme der elektrischen Energie des abgeschlossenen Hohlraums im Zeitmittel (Periodendauer T):

$$\overline{\Delta W_e} = -\overline{\Delta A} = \frac{1}{2T}\int_0^T \varepsilon_0(\varepsilon-1) f l E_0^2 \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{4}\varepsilon_0(\varepsilon-1) f l E_0^2 .$$

Der elektromagnetische Energieinhalt des HR steht daher nach (15) mit der relativen Verstimmung $\Delta\lambda/\lambda$ durch das dielektrische Stäbchen in der Beziehung

$$\overline{W} = -\frac{\lambda \overline{\Delta A}}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda \varepsilon_0 (\varepsilon-1) f l E_0^2}{4 \Delta\lambda} . \tag{16}$$

Setzen wir diesen Wert in (3) ein, so erhalten wir

$$d \cdot R_p = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\omega \overline{W}} = \frac{E_0^2 l^2}{2 \omega \overline{W}}$$

und

$$R_p = \frac{1}{\pi c \varepsilon_0} \frac{l}{(\varepsilon-1) f} \frac{\Delta\lambda}{d} = 120 \frac{l}{(\varepsilon-1) f} \frac{\Delta\lambda}{d} \text{ [Ohm]} . \tag{17}$$

Zur gleichen Beziehung gelangt man mit (14), wenn man sich das Verhalten des HR in der Umgebung der Resonanzstelle durch ein Ersatzbild nach Fig. 1 darstellt und die Kapazitäts*änderung* mit

$$\Delta C = \Delta\left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 f}{l}\right) = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 f}{l}$$

in (14) einführt. Hiermit wird auch ersichtlich, warum wir diese Methode kurz als ΔC-Methode bezeichnen wollen.

Man hat demnach bei dieser Methode eine Dämpfungsmessung am ungestörten Hohlraum vorzunehmen und die Verstimmung $\Delta\lambda$ der Resonanzwellenlänge durch ein zwischen den Stellen A und B parallel der Achse AB eingebrachtes dünnes dielektrisches Stäbchen (Länge l, Querschnitt f, DK $\varepsilon\varepsilon_0$) zu messen. Aus (17) folgt sodann der Wert des auf die Punkte A, B bezogenen Resonanzwiderstandes R_p des Hohlraums*).

b) Es liege ein beliebig gestalteter Hohlraum vor, dessen Feldverteilung im einzelnen nicht bekannt zu sein braucht. Durch eine Öffnung sei der HR mit einer Koppelleitung verbunden, die als konzentrische kreiszylindrische Leitung ausgeführt ist. (Fig. 6.) Der HR werde, wie dies meist geschieht, über eine solche Leitung

*) Über diese Methode zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes nach (17) von Hohlräumen, die längs einer Achse ein konstantes elektrisches Feld aufweisen, s. a.: W. Dahlke, Messungen an Hohlraumresonatoren, Bericht über die Arbeitskreistagung Röhren (Breslau 1944) S. 259—265.

erregt; auf der Leitung bestehe ein Schwingungszustand, der gewöhnlich als „Lechertyp" (TEM-Typ) bezeichnet wird. Das elektrische Feld mit der radialen Komponente E_r und das magnetische Feld mit der azimutalen Komponente H_φ liegen in Ebenen senkrecht zur Leitungsachse. Sie sind gegeben durch

$$|E_r| = E_1 \frac{\sin k z}{r}; \quad |H_\varphi| = \frac{E_1}{120\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\cos k z}{r}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{18}$$

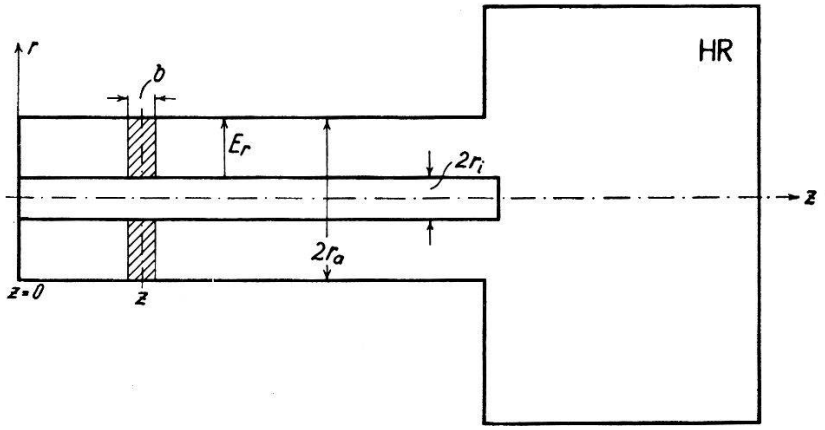

Fig. 6.
Beliebig gestalteter Hohlraum HR mit angeschlossener konzentrischer Leitung, die bei $z = 0$ kurzgeschlossen ist. Die Einkopplung der Erregung durch eine kleine Öffnung im System ist nicht eingezeichnet.

Wegen $H_z \equiv 0$ existiert auf der Leitung an jeder Stelle z eine eindeutige „Spannung" $U = \int_{r_i}^{r_a} E_r \, dr$ zwischen Innen und Aussenleiter in Ebenen senkrecht zur Leitungsachse, auf die der Resonanzwiderstand bezogen werden kann. An der Stelle $z = 0$ sei die Leitung kurzgeschlossen. Bringt man ein dielektrisches Scheibchen von der Breite b und der DK $\varepsilon\varepsilon_0$ (Fig. 6) an einer Stelle z in die Leitung, welche vom HR so weit entfernt ist, dass sich dort praktisch ein Zustand nach (18) ausgebildet hat, so gilt mit (15) und (18)

$$\overline{W} = -\frac{\lambda \overline{\Delta A}}{\Delta \lambda} = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \cdot \frac{1}{4} \int_{\Delta V} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_r^2 \, dV$$

$$= \frac{\lambda \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_1^2}{4 \Delta \lambda} \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \int_{z-b/2}^{z+b/2} \frac{\sin^2 k z}{r^2} \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

oder

$$\overline{W} = \frac{\pi E_1^2}{4} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot \left(b - \frac{\sin k b \cos 2 k z}{k}\right) \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$

Mit (3) erhält man für R_p unter Einführung von $U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{r_i}^{r_a} E_r \, dr$ für

den Resonanzwiderstand $R_p(z)$ der ganzen Anordnung nach Fig. 6 bezogen auf den Abstand z vom kurzgeschlossenen Leitungsende

$$R_p(z) = \frac{1}{\pi^2 c\, \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)} \frac{\ln \frac{r_a}{r_i} \cdot \sin^2 k z}{b - \frac{\sin k b \cos 2 k z}{k}} \frac{\Delta \lambda}{d} \text{ [Ohm]} . \tag{19}$$

Für *dünne* Scheibchen ($b \ll \lambda$) und eine Bezugstelle z, die nicht allzuweit vom Spannungsbauch ($z = \lambda/4$) entfernt liegt, kann bei Gültigkeit von

$$\frac{\pi^2 b^2}{3 \lambda^2} \ll 1$$

in (19) nach Potenzen von b entwickelt werden; dann folgt aus (19) die vereinfachte Näherung:

$$R_p(z) = \frac{60}{\pi} \frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{b (\varepsilon - 1)} \frac{\Delta \lambda}{d} \text{ [Ohm]} . \tag{19a}$$

Wie sich von selbst versteht, gelten die Beziehungen (19) auch für den Resonanzwiderstand einer beiderseits abgeschlossenen konzentrischen Lecherleitung, deren Länge ein ganzes Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt.

Die Beziehung von (19a) zu Gleichung (14) lässt sich leicht aufzeigen. Setzt man in (14) $\Delta C = \Delta Q/U$ und versteht unter ΔQ die kleine Änderung der Oberflächenladung auf der konzentrischen Leitung durch das Einbringen eines dielektrischen Scheibchens von der Breite b an der Stelle $z = \lambda/4$, so folgt $\Delta Q = 2\pi E_1 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)$ b; mit $U = E_1 \cdot \ln r_a/r_i$ ergibt sich

$$\Delta C = \left(\frac{\Delta Q}{U}\right)_{z=\lambda/4} = \frac{2\pi \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) b}{\ln r_a/r_i}$$

und hiermit aus (14) unmittelbar die Gleichung (19a).

Bei Anwendung dieser Methode hat man also ebenfalls eine Dämpfungsmessung des ungestörten Systems vorzunehmen sowie die Messung der Verstimmung $\Delta\lambda$ durch ein kreiszylindrisches dielektrisches Scheibchen (Aussen- bzw. Innenradius r_a und r_i, Breite b, DK $\varepsilon\varepsilon_0$), das im Abstand z vom kurzgeschlossenen Ende der Leitung angebracht ist. Mit (19) bzw. der Näherungsformel (19a) bei dünnen Scheibchen und einer Stelle z in der Nähe des Spannungsbauches erhält man den bei z zwischen Innen- und Aussenleiter der Leitung wirksamen Resonanzwiderstand $R_p(z)$.

B. *Methode der induktiven Verstimmung* (*ΔL-Methode*).

Verändert man in dem quasistationären Kreis nach Fig. 1 bei konstantem C den Wert der Selbstinduktion L um ΔL, so folgt analog den Betrachtungen unter A. die Beziehung

$$\omega L = \pi c \frac{\Delta L}{\Delta \lambda}. \tag{20}$$

Unter Einführung des „*Wellenwiderstands*" $Z = \sqrt{L/C}$ schreiben wir (3a) in der Form

$$d \cdot R_p = \omega L = \frac{\omega L}{\omega^2 L C} = \frac{Z^2}{\omega L}.$$

Mit dem obigen Wert für ΔL erhalten wir daraus

$$R_p = \frac{Z^2}{\pi c d} \frac{\Delta \lambda}{\Delta L}. \tag{21}$$

Im Prinzip könnte man bei Hohlräumen in Analogie zu den unter A. angeführten Beispielen der dielektrischen Verstimmung von einer Verstimmung des HR durch Einbringen magnetischer Probekörper ($\mu \neq 1$) mit geringer Leitfähigkeit Gebrauch machen. Solche Materialien waren jedoch noch nicht erhältlich. Es wurde deshalb eine andere Art der induktiven Verstimmung betrachtet, nämlich durch Änderung der Berandung des HR an Stellen, wo praktisch nur ein magnetisches Feld vorhanden ist. Wird das Hohlraumvolumen V an einer solchen Stelle um den kleinen Betrag ΔV verringert, so beträgt die im Zeitmittel (langsam gegenüber der Periodendauer) geleistete Arbeit gegen die magnetischen Feldkräfte an der Berandung

$$\overline{\Delta A} = \frac{\mu_0}{4} \int_{\Delta V} \mathfrak{H}^2 \, dV$$

und damit nach (15) die Verstimmung

$$-\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\mu_0}{4 \overline{W}} \int_{\Delta V} \mathfrak{H}^2 \, dV. \tag{22}$$

Als Beispiel betrachten wir wiederum eine Anordnung nach Fig. 6. Verschiebt man das kurzgeschlossene Ende der im Lechertyp (TEM-Typ) erregten konzentrischen Leitung um ein kleines Stück Δl (Fig. 7), so ergibt sich aus (22) unter Benutzung des Ausdrucks für das magnetische Feld $\mathfrak{H} = H_\varphi$ nach (18)

$$\overline{W} = \frac{\mu_0 \lambda}{4 |\Delta \lambda|} \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Delta l} \frac{E_1^2}{(120\pi)^2} \frac{\cos^2 kz}{r^2} \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$\overline{W} = \frac{\pi \mu_0 \lambda}{2 |\Delta \lambda|} \frac{E_1^2}{(120\pi)^2} \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot \Delta l. \tag{23}$$

*

Unter Einführung der Spannung $U = \int_{r_i}^{r_a} E_r \, dr$ mit Verwendung von (18) erhält man schliesslich mit (3) für den auf eine Stelle z der Leitung bezogenen Resonanzwiderstand

$$R_p(z) = \frac{60}{\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \cdot \sin^2 k z \cdot \frac{\Delta \lambda}{d \cdot \Delta l} \text{ [Ohm]} . \tag{24}$$

Ist die konzentrische Leitung beiderseits kurzgeschlossen ($l = \lambda/2$), so ist theoretisch $\Delta\lambda/\Delta l = 2$; setzt man dies in (24) ein, so folgt die theoretische Beziehung (11).

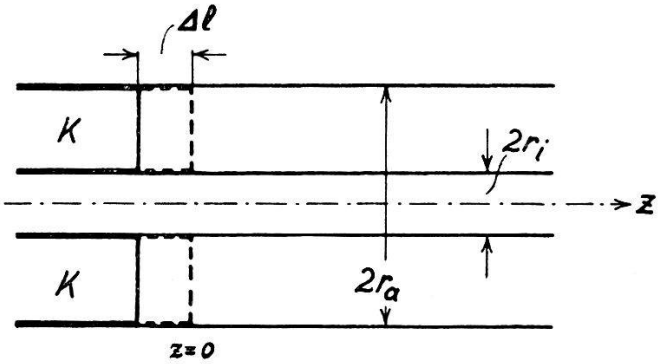

Fig. 7.
Verschiebung des Kurzschlusses K (Abschlusskolben) am Leitungsende $z = 0$ (siehe Fig. 6) um das kleine Stück Δl.

Auch hier kann man wieder (24) in Beziehung zur entsprechenden quasistationären Betrachtung bringen. Berechnet man in (21) ΔL aus $\Delta L = \Delta\Psi/J$, wobei $\Delta\Psi$ die kleine Änderung des Induktionsflusses $\int B_n df$ durch Verschieben des Kurzschlusses bei $z = 0$ um Δl und J den Strom an der Kurzschlussstelle bedeutet, so ergibt sich mit (18)

$$\Delta L = \frac{\mu_0 \Delta l}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} .$$

Setzt man in (21) diesen Wert und für den Wellenwiderstand Z der konzentrischen Leitung den hier sinngemässen Ausdruck $Z = 60 \cdot \ln r_a/r_i \cdot \sin kz$ ein, so erhält man Gleichung (24).

In Anwendung dieser Methode hat man die Dämpfung d der ungestörten Anordnung sowie der Verstimmung $\Delta\lambda$ zu messen, wenn das kurzgeschlossene Leitungsende um das kleine Stück Δl verschoben wird. Gleichung (24) liefert dann den Wert des auf einen Abstand z vom kurzgeschlossenen Ende bezogenen Resonanzwiderstandes $R_p(z)$.

Den unter A. und B. betrachteten Methoden der dielektrischen und induktiven Verstimmung liegt, von einem allgemeinen Standpunkt aus besehen, die Beziehung (3) zugrunde, wobei der mittlere

Energieinhalt $\overline{W}$ des Hohlraums durch (15) einer Messung zugänglich gemacht wird. Mit (3) und (15) kann die allgemeine Beziehung zur Messung von R_p in der Form

$$R_p = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\omega \overline{W}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{2\pi c} \left| \frac{\Delta \lambda}{\overline{\Delta A}} \right| \tag{25}$$

angeschrieben werden. $\Delta\lambda$ bedeutet die Verstimmung der Resonanzwellenlänge, wenn an dem abgeschlossenen Hohlraum durch äussere Einwirkung im Zeitmittel, und zwar langsam gegenüber den periodischen zeitlichen Änderungen des Feldes die (kleine) Arbeit $\overline{\Delta A}$ gegen die Feldkräfte geleistet wird. Die im folgenden unter C. angeführte Methode beruht auf einer anderen Überlegung; dort wird nicht der elektromagnetische Energieinhalt, sondern die im Hohlraum verbrauchte ohm'sche Verlustleistung verändert.

C. *Methode der zusätzlichen Dämpfung* (ΔR_p-*Methode*).

Über diese Methode wurde als erste bereits kurz berichtet[5]). Als Beispiel zu dieser Methode betrachten wir einen Hohlraum nach Fig. 2 oder 10, der über einen kleinen Bereich ein homogenes elektrisches Feld aufweist. Bringt man zwischen die Bezugspunkte A, B parallel zum Feld ein dünnes Stäbchen geringer Leitfähigkeit (Querschnitt

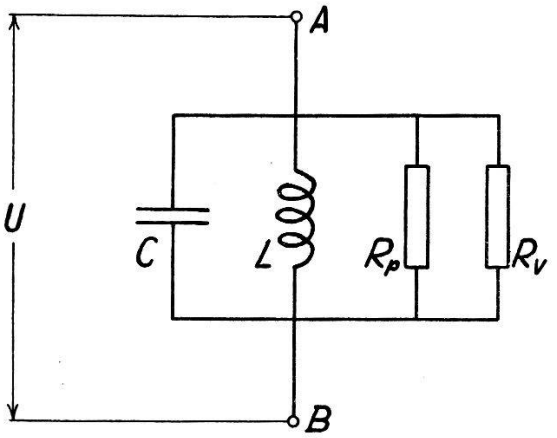

Fig. 8.
Parallelschaltung eines ohmschen Verlustwiderstandes R_V zum Resonanzwiderstand R_p im Ersatzbild des Parallelresonanzkreises.

f, Länge l, Leitfähigkeit σ, DK $\varepsilon\varepsilon_0$), so entspricht dies beim quasistationären Ersatzbild (Fig. 8) einer Parallelschaltung eines ohmschen Verlustwiderstandes R_v bzw. eines Leitwertes $G_v = 1/R_v$ zum Leitwert $G_p = 1/R_p$ des Kreises. Der Leitwert G_v steht mit dem „Verlustfaktor" $\varepsilon\,\varepsilon_0 \operatorname{tg}\delta$ des Stäbchenmaterials im Zusammenhang[6]):

$$G_v = \sigma \frac{f}{l} = \omega\,\varepsilon\,\varepsilon_0 \frac{f}{l} \operatorname{tg}\delta\,[\text{Ohm}]^{-1}. \tag{26}$$

Die Dämpfung nimmt den Wert konst. $\cdot (G_p + G_v)$ an. Bringt man ein zweites Stäbchen mit einem andern Leitwert an Stelle des ersten ein und bestimmt nacheinander die zugehörigen Dämpfungen d_1 und d_2, so folgt

$$d_1 = \text{konst.} \cdot (G_p + G_{v_1})$$
$$d_2 = \text{konst.} \cdot (G_p + G_{v_2}).$$

Mit

$$K = \frac{d_2}{d_1} \tag{27}$$

folgt

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{K-1}{G_{v_2} - K \cdot G_{v_1}}. \tag{28}$$

Da die eingebrachten Stäbchen notwendigerweise ein von 1 verschiedenes ε haben, wählt man den Querschnitt f so, dass jeweils durch die verschiedenen Stäbchen dieselbe Verstimmung hervorgerufen wird ($(\varepsilon - 1) f =$ konstant). Man erhält so den Resonanzwiderstand R_p für den um $\Delta\lambda$ verstimmten Hohlraum. Da im allgemeinen $\Delta\lambda/\lambda$ sehr klein (unter 1%) gehalten werden kann, ist dieser Umstand praktisch ohne Bedeutung.

Auch bei einer im Lechertyp (TEM-Typ) erregten konzentrischen Leitung ist diese Methode anwendbar. Man benutzt dünne Scheibchen aus Materialien mit verschiedener Leitfähigkeit (verschiedenem Verlustfaktor $\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{tg} \delta$). Der Parallelleitwert G_v ist hier gegeben durch

$$G_v = \frac{2\pi b}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \omega \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{tg} \delta \, [\text{Ohm}]^{-1}, \tag{29}$$

wenn b die Breite der Scheibchen, r_a und r_i Aussen- und Innendurchmesser der konzentrischen Leitung bzw. der Scheibchen und $\varepsilon\varepsilon_0$ deren DK bedeuten. Der Verlustfaktor selbst kann in Anordnungen der gleichen Art gemessen werden[6]).

II. Experimentelle Bestimmung des Resonanzwiderstandes.

1. *Messanordnung.* Experimentelle Untersuchungen wurden bei einer Wellenlänge von 14 cm (2100 Mc) vorgenommen mit dem Ziel, die Brauchbarkeit der unter I. angeführten Methoden zu prüfen und dieselben unter sich zu vergleichen*). Als Generator G

*) Die Messungen wurden bereits vor längerer Zeit am Physikalischen Institut der Universität Graz (Abt. für Technische Physik) von Herrn Dr. Adolf Jeschke, dzt. Gmünd (Kärnten), ausgeführt, dem ich für seine Mitarbeit an dieser Untersuchung zu besonderem Dank verpflichtet bin. Ebenso habe ich Herrn Privatdozent Dr. Ernst Ledinegg (Graz) für seine Mitwirkung zu danken.

(Fig. 9) diente eine Bremsfeldröhre hoher Frequenzkonstanz (10^{-6}) mit einer mittleren Wellenlänge von 14 cm, die sich über einen Bereich von etwa 6 mm variieren liess[7]). Die Verbindung zu den Hohlräumen, die untersucht werden sollten, stellten flexible konzentrische Kabel L her unter Zwischenschaltung von geeigneten Transformationsvierpolen T, welche die richtige Anpassung zwischen Generator und Hohlraum sowie zwischen Hohlraum und Indikator besorgten. Als Indikatoren J wurden Spezialdetektoren (Germanium und künstlich hergestelltes Siliciumkarbid) verwendet, deren quadratisches Arbeiten durch separate Untersuchungen sichergestellt war.

Bei der Bestimmung von R_p kommt es wesentlich darauf an, die Eigendämpfung d des zu untersuchenden Hohlraumes richtig zu

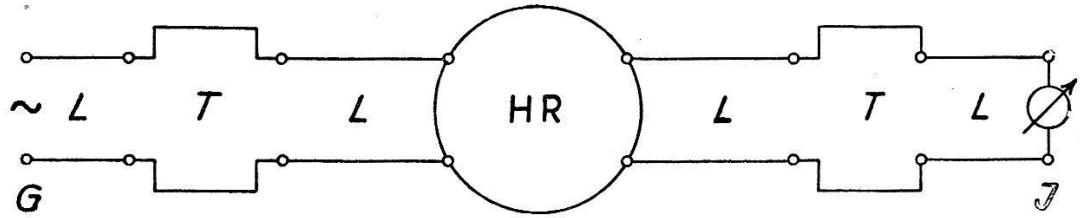

Fig. 9.
Schema der Messanordnung zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes eines Hohlraumresonators HR. G = Generator, L = konzentrische Verbindungsleitungen, T = Transformationsvierpole, J = Indikator.

messen; es muss daher Sorge getragen werden, dass durch die generator- und indikatorseitigen Ankopplungen keine *merkliche* Fremddämpfung eingekoppelt wird. Durch lose Kopplung und richtige Einstellung der Transformationsvierpole lässt sich dies erreichen. Die Resonanzkurve kann dann einwandfrei durch die Abhängigkeit des Indikatorstroms von der Frequenz gemessen werden. Ein wertvolles Kriterium dafür, dass unerwünschte Kopplungserscheinungen ausgeschaltet sind, bietet der Vergleich der punktweise aufgenommenen Resonanzkurve mit deren theoretischem Verlauf[1]) bei der zugehörigen Halbwertsbreite.

2. Mit der beschriebenen Messanordnung wurde die Bestimmung von R_p für verschiedene Arten von Hohlraumresonatoren und nach verschiedenen Methoden durchgeführt. Im folgenden werden die Ergebnisse angeführt, wobei jeweils auch auf die Berechnung der Resonanzwellenlänge kurz eingegangen wird.

A. Kreiszylindrischer Hohlraum mit ebenen Abschlussflächen. (Aus Messing gedrückt, innen versilbert.)
Erregung: Grundschwingung des elektrischen Typs (TM_{001}).
$\lambda = 14$ cm, $R = 5{,}35$ cm, $l = 10$ cm (Fig. 10).

Resonanzwellenlänge und theoretische Dämpfung folgen aus (4) und (6). Es ergaben sich:

	theoretisch	mittlerer Messwert
Dämpfung d	$4{,}04 \cdot 10^{-5}$	$5{,}3 \cdot 10^{-5}$
Resonanzwiderstand R_p. .	$8{,}55 \cdot 10^{6}$	$6{,}6 \cdot 10^{6}$ Ohm

Der theoretische Wert von R_p folgt aus (7); er bezieht sich auf die Punkte A, B in Fig. 10.

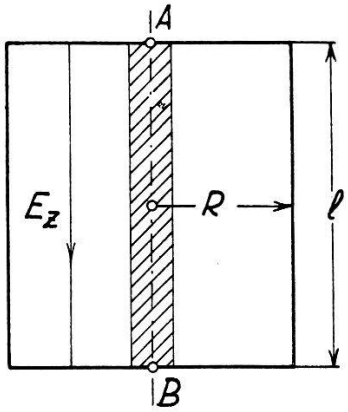

Fig. 10.

Kreiszylindrischer Hohlraumresonator bei Erregung in der elektrischen Grundschwingung (TM_{001}). Zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes wird als Probekörper ein zylindrischer dielektrischer dünner Stab längs der Achse A, B eingebracht.

a) *ΔC-Methode.* Das elektrische Feld der elektrischen Grundschwingung[2]) besitzt nur eine Komponente E_z in Richtung der Achse und ist unabhängig von z. Als Probekörper dienten kreiszylindrische Stäbchen von 10 cm Länge aus verschiedenen dielektrischen Materialien, die zwischen A und B eingebracht wurden. Die Genauigkeit, mit der R_p bestimmbar ist, ist im wesentlichen durch die Genauigkeit für $\varepsilon - 1$ und d gegeben. $\varepsilon - 1$ wurde in der gleichen Anordnung nach einem an anderer Stelle angegebenen Verfahren[6]) gemessen; die Genauigkeit betrug etwa 3%. Die relative Halbwertsbreite und damit die Dämpfung d konnten auf etwa 10% genau gemessen werden. Eine Genauigkeit auf 10% kann bei Messungen dieser Art als genügend angesehen werden; um unnötige Schwierigkeiten zu vermeiden, wurde davon abgesehen, die Genauigkeit höher zu treiben, als praktisch notwendig erscheint. Die Genauigkeit für die Dämpfung steigt mit wachsendem d. Bei Zu-

grundelegen des *mittleren* Dämpfungswertes ergab sich mit (17):

Dielektrikum	Durchmesser in mm	ε	$R_p \cdot 10^{-6}$ Ohm
Quarz	5,98	3,85	6,7
Quarz	4,06	3,85	6,6
Bernstein . . .	3,41	2,6	6,8
Trolitul	4,97	2,45	6,6
Calit	2,00	6,3	6,6
Ardostan . . .	4,00	5,5	6,8

b) *R_p-Methode.* Die elektrischen und magnetischen Feldgrössen im Hohlraum sind ein Mass für die Stärke der Erregung. Bei quadratisch arbeitendem Indikator sind die Ausschläge des Anzeigeinstrumentes (Galvanometer) daher proportional dem Quadrat der Resonanzamplituden des Hohlraumfeldes. Bei konstanter Primärerregung ist die Resonanzamplitude der Dämpfung d des HR umgekehrt proportional[1]). Das Verhältnis $K = d_2/d_1$ nach (27) kann daher auch durch die zugehörigen Indikatorausschläge α ausgedrückt werden:

$$K = \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}. \tag{30}$$

An Hand des Ersatzbildes (Fig. 1) lässt sich leicht zeigen, dass auch bei zusätzlich eingekoppelter Fremddämpfung die Beziehung (30) verwendet werden kann, wobei dann d_1 und d_2 die um die (kleine) Fremddämpfung erhöhten Werte von d bedeuten. Wichtig ist, bei der Messung die Primärerregung konstant zu halten; dies geschah durch Beobachtung der Hochfrequenzspannung an einer kleinen Sonde, welche in ein festes konzentrisches Leitungsstück zwischen Generator und Hohlraum hineinragte.

Die Genauigkeit dieser Methode hängt davon ab, wie genau die Leitfähigkeit bzw. der Verlustfaktor der Proben bekannt ist; ferner von den Beträgen von G_{v_1}/G_{v_2}, K und dem Fehler von K in (28). Eine einfache Fehlerbetrachtung zeigt, dass ein Messfehler δK sich um so stärker auswirkt, je näher K an Eins liegt.

Für verschiedene Kombinationen von Proben ergab sich nach dieser Methode folgendes:

Kombination	$R_p \cdot 10^{-6}$ Ohm
Calit-Ardostan	6,7
Calit-Quarz	6,7
Ardostan-Quarz	6,6
Trolitul-Bernstein . . .	7,2

B. *Konzentrische Leitung*, beiderseits kurzgeschlossen mit veränderlicher Eigenfrequenz (verschiebbarem Abschlusskolben), erregt in der Grundschwingung des Lechertyps (TEM-Typ).

$\lambda = 2\,l$. $\lambda = 14$ cm, $r_a = 1{,}9$ cm, $r_i = 0{,}5$ cm. Versilbert, $\sigma = 60 \cdot 10^4$ (Ohm cm)$^{-1}$ (Fig. 11).

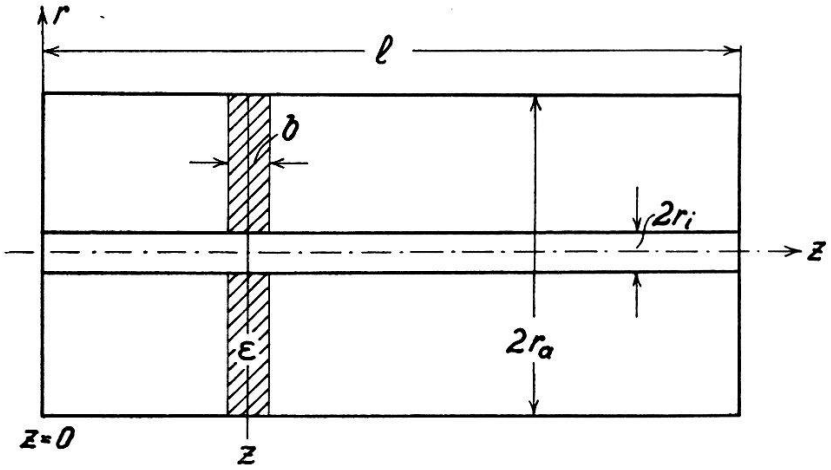

Fig. 11.

Zur Bestimmung des Resonanzwiderstandes einer beiderseits kurzgeschlossenen konzentrischen Leitung, die im Lechertyp (TEM-Typ) erregt ist, wird als Probekörper ein dünnes dielektrisches Scheibchen an einer Stelle z der Leitung eingebracht.

Die Resonanzwellenlänge der Grundschwingung ist $\lambda = 2\,l$; Dämpfung und Resonanzwiderstand folgen theoretisch aus (9) und (10). Es ergaben sich:

	theoretisch	mittlerer Messwert
Dämpfung d	$17{,}3 \cdot 10^{-5}$	$26{,}2 \cdot 10^{-5}$
Resonanzwiderstand R_p $(z = \lambda/4)$	$2{,}95 \cdot 10^5$	$1{,}9 \cdot 10^5$ Ohm

Der Unterschied zwischen den theoretischen und experimentellen Werten hatte seine Ursache in den zusätzlichen Verlusten an den Schleifkontakten des gefederten Abschlusskolbens, wie Vergleichsmessungen mit einer allseits verlöteten Leitung gleicher Abmessungen zeigten.

Als dielektrische Probekörper dienten dünne Scheibchen, die auf die Leitung aufgeschoben wurden (Fig. 11). Die Resonanzwellenlänge λ einer konzentrischen Leitung nach Fig. 11, in der sich an der Stelle z eine dielektrische Scheibe der Breite b und der DK $\varepsilon\varepsilon_0$ befindet, ergibt sich aus folgender Gleichung für den „Eigenwert" $k = 2\,\pi/\lambda$:

$$\operatorname{tg} k\,b\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\operatorname{tg} k\,z + \sqrt{\varepsilon}\operatorname{tg} k\,(l-b-z)\,(1-\sqrt{\varepsilon}\operatorname{tg} k\,b\sqrt{\varepsilon}\cdot\operatorname{tg} k\,z) = 0. \qquad (31)$$

Die Herleitung von (31) folgt z. B. unter Verwendung der Feldverteilung nach (18) und der Stetigkeitsbedingungen für E_r und H_φ an den beiden Grenzflächen der Scheibe. Aus (31) kann man in 1. Näherung die Verstimmung $\Delta\lambda$ der ungestörten Leitung durch eine Scheibe mit der (kleinen) Polarisation $\varepsilon - 1$ gewinnen mit

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{d\varepsilon}\,\Delta\varepsilon = -\frac{2\pi}{k^2}\,\frac{dk}{d\varepsilon}\,(\varepsilon - 1)\,.$$

Berechnet man aus (31) den Ausdruck für $dk/d\varepsilon$, so ergibt sich

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\varepsilon - 1}{2\,l}\left(b - \frac{\sin k\,b\,\cos 2\,k\,z}{k}\right). \tag{32}$$

Für dünne Scheibchen kann man noch in (32) nach Potenzen von b entwickeln und höhere Potenzen vernachlässigen. (Die Beziehung (31) lässt sich zur experimentellen Bestimmung der DK von Materialien verwenden, aus denen dünne, konzentrisch durchbohrte Kreisscheibchen hergestelltwerden können.) Die experimentelleNachprüfung der Verstimmung $\Delta\lambda$ durch Proben mit bekanntem $\varepsilon - 1$ ergab vorzügliche Übereinstimmung mit (31) bzw. (32).

a) *ΔC-Methode.* $R_p(z)$ wurde für verschiedene Stellen z, d. h. verschiedenen Lagen der Scheibchen in der Leitung bestimmt. ($z = 3{,}5/2{,}1/1{,}4$ cm und „am Rand", d. h. $z = b/2$), wobei sich die theoretische Abhängigkeit gemäss $\sin^2 kz$ bestätigte.

Als Beispiel seien zwei Ergebnisse für $z = l/2 = 3{,}5$ cm angegeben:

Dielektrikum	Dicke in mm	ε	$R_p \cdot 10^{-5}$ Ohm
Trolitul	4,00	2,45	1,90
Bernstein	3,92	2,6	1,81

Die Messgenauigkeit lässt sich wieder mit etwa 10% angeben. Bei Messungen für kleine Werte von z, d. h. am Rande der Leitung, nahm die Genauigkeit etwas ab, da bei kleinen Verstimmungen die Messung von $\Delta\lambda$ etwas ungenauer wurde.

b) *ΔL-Methode.* Da $\lambda = 2\,l$ ist, gilt theoretisch $\Delta\lambda/2\Delta l = 1$. Das kurzgeschlossene Leitungsende wurde jeweils um den konstanten Wert $\Delta l = 0{,}05$ cm verschoben. Es ergab sich folgendes Bild:

Leitungslänge in cm	6,95	7,00	7,05	7,10	7,15	7,20
$\frac{\Delta\lambda}{2\,\Delta l}$	0,96	1,00	0,99	0,99	1,02	1,01
Resonanzwiderstand $R_p\,(b/2)\cdot 10^{-3}$ Ohm . .	1,43	1,48	1,47	1,48	1,52	1,51

Zur gemessenen Dämpfung von $d = 26{,}2 \cdot 10^{-5}$ gehört mit (11) der *theoretische* Wert R_p (b/2) $= 1{,}49 \cdot 10^3$ Ohm. Die R_p-Werte in obiger Tabelle wurden aus (24) mit $z = b/2$ berechnet, wobei die *gemessenen* Werte für $\Delta\lambda/2\Delta l$ eingesetzt wurden.

Kontrollmessungen nach der ΔC-Methode mit Verstimmung der Leitung durch eine Trolitulscheibe am Rande ($z = b/2$) lieferten den gleichen Wert für R_p ($b/2$). Die Gültigkeit von (24) wurde auch für andere Stellen z mit solchen Kontrollmessungen bestätigt.

c) *R_p-Methode.* Diese Methode wurde für eine Kombination Trolitul-Bernstein an verschiedenen Stellen z durchgeführt. Bei zweckmässiger Wahl der Kombination kann der Fehler ebenfalls auf etwa 10% beschränkt werden.

C. *Konzentrische Leitung,* wie unter B., jedoch in der *zweiten Oberschwingung* des Lechertyps erregt: $l = 3\,\lambda/2$. Für die Verstimmung gilt hier mit (32)

$$\Delta\lambda = \frac{\varepsilon - 1}{3}\left(b - \frac{\sin k b \cos 2 k z}{k}\right). \tag{33}$$

Im Mittel ergaben sich folgende Werte:

	theoretisch	mittlerer Messwert
Dämpfung d	$1{,}54 \cdot 10^{-4}$	$2{,}36 \cdot 10^{-4}$
Resonanzwiderstand R_p ($z = l/2$)	$10{,}6 \cdot 10^4$	$6{,}9 \cdot 10^4$ Ohm

Auch hier ersieht man wieder an dem Unterschied zwischen theoretischen und experimentellen Werten den Einfluss des federnd berührenden Abschlusskolbens auf die Verluste.

D. *Konzentrische Leitung mit kapazitivem Abschluss* (Fig. 12).
($r_i = 0{,}75$ cm, $r_a = 3{,}5$ cm, $h = 2{,}7$ cm, $a = 0{,}5$ cm).

Die theoretische Dämpfung kann nach Näherungsformeln[8]) berechnet werden; sie ergab sich zu $d = 12 \cdot 10^{-5}$. Der gemessene Wert betrug $d = 25 \cdot 10^{-5}$. Der Resonanzwiderstand wird auf die Stellen A, B bezogen.

Die Eigenwellenlänge dieses Resonators lässt sich streng nicht in geschlossener Form angeben. Ein sehr nützliches Verfahren zur *Abschätzung* der Resonanzwellenlängen von Hohlräumen, die einer strengen Berechnung nicht oder nur mit sehr grossem Rechenaufwand zugänglich sind, wurde von Grivet[9]) in diesem Zu-

sammenhang verwendet. Wegen seiner allgemeinen Brauchbarkeit werde seine Herleitung hier nochmals kurz skizziert:

Die aus den Maxwell'schen Gleichungen beispielsweise für den elektrischen Feldvektor $\mathfrak{E}$ folgende Wellengleichung $\nabla^2 \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = 0$ kann als die zum Variationsprinzip $\int_V |\operatorname{rot} \mathfrak{E}|^2 \, dV = \textit{stationär}$ mit

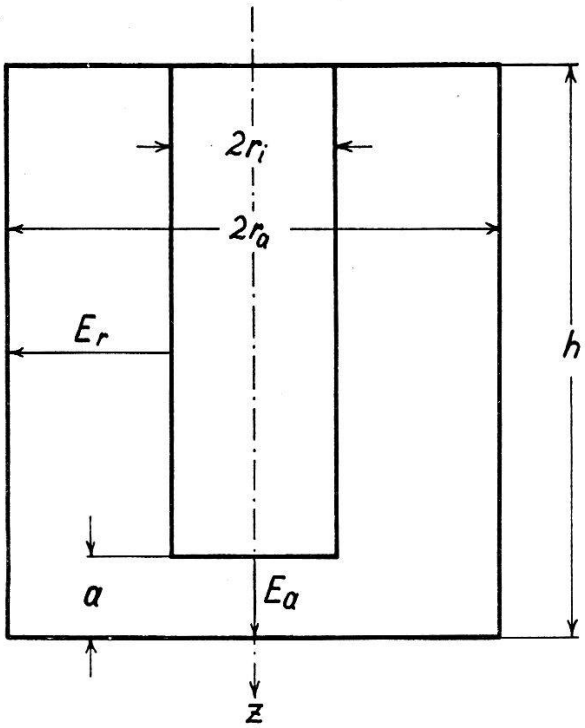

Fig. 12.

Konzentrische Leitung mit kapazitivem Abschluss als Hohlraumresonator. E_r (ungestörte) radiale elektrische Feldstärke bei Erregung im Lechertyp (TEM-Typ), E_a = Feldstärke im kapazitiven Abschluss längs der z-Achse.

der Nebenbedingung $\int_V \mathfrak{E}^2 \, dV = \text{const.}$ gehörige Euler'sche Differentialgleichung angesehen werden[10]). Spezialisiert auf die Grundschwingung und mit Einführung des Lagrange-Faktors wird das Variationsproblem zum Minimumproblem

$$\int_V |\operatorname{rot} \mathfrak{E}|^2 \, dV - k^2 \int_V \mathfrak{E}^2 \, dV = \textit{Minimum} \, ,$$

ohne Nebenbedingung. Für das spezielle Problem allseitig von vollkommenen Leitern umschlossener Hohlräume ergibt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen bei periodischen Vorgängen (Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -i\omega\mu\mu_0 \mathfrak{H}$$

und die Beziehung

$$|\operatorname{rot} \mathfrak{E}|^2 = (\omega \, \mu\mu_0)^2 \, \mathfrak{H}^2 .$$

Zufolge der Gleichheit von elektrischem und magnetischem Energieinhalt im Zeitmittel $\int_V \mu\mu_0 \mathfrak{H}^2 \, dV = \int_V \varepsilon\varepsilon_0 \mathfrak{E}^2 \, dV$[11]), erhält man

$$\int_V |\operatorname{rot} \mathfrak{E}|^2 \, dV = \int_V \varepsilon\varepsilon_0 \, \mu \, \mu_0 \, \omega^2 \, \mathfrak{E}^2 \, dV$$

und somit für den Eigenwert $k^2 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$:

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{\int_V |\operatorname{rot} \mathfrak{E}|^2 \, dV}{\int_V \mathfrak{E}^2 \, dV} . \tag{34}$$

Nach dem Obigen wird dieser Wert von k^2 zum Minimum, wenn für $\mathfrak{E}$ die zur Grundschwingung gehörige Eigenfunktion, die auch der Nebenbedingung genügt, eingesetzt wird. Um zu einem Näherungswert für k zu gelangen, setzt man für $\mathfrak{E}$ eine dem Problem angepasste Feldverteilung an, von der man erwarten kann, dass sie der tatsächlichen Feldverteilung nahekommt. Man kann eine Anzahl solcher Vergleichsfunktionen wählen, welche die Randbedingungen erfüllen. Bildet man aus solchen Funktionen eine Linearkombination mit unbestimmten Koeffizienten, so kann man versuchen, diese Koeffizienten so zu bestimmen, dass man k^2 nach (34) zu einem Minimum macht. Geeignete Vergleichsfunktionen sind im allgemeinen nicht leicht anzugeben. Man kann jedoch auch schon mit *einer* Vergleichsfunktion in manchen Fällen eine brauchbare Näherung erreichen. Der hiermit nach (34) errechnete Wert $\bar{k}^2 \geqq k^2$ liegt dem richtigen Eigenwert ersichtlich umso näher, je genauer die Vergleichsfunktion die tatsächliche Feldverteilung annähert.

Für das in Fig. 12 vorliegende Beispiel wurde die Vergleichsfunktion für $\mathfrak{E}$ folgendermassen gewählt:

$$E_r = \frac{E_1}{r} \sin \frac{\pi z}{2h} ; \qquad E_\varphi = E_z = 0 ; \qquad E_a = \text{const.}$$

mit der Forderung

$$a \, E_a = E_1 \ln \frac{r_a}{r_i} .$$

In (34) liefert hier nur die azimutale Komponente $\operatorname{rot}_\varphi \mathfrak{E}$ einen Beitrag. Die Auswertung mit der gewählten Vergleichsfunktion liefert nach kurzer Rechnung mit $\bar{k} = 2\pi/\bar{\lambda}$ den Näherungswert $\bar{\lambda}$:

$$\lambda \geqq \bar{\lambda} = 4h \sqrt{1 + \frac{r_i^2 \ln \frac{r_a}{r_i}}{a h}} . \tag{35}$$

Diese Näherungsformel ergab in einem Wertebereich von a/h und r_a/r_i, in dem eine brauchbare Näherung erwartet werden kann, eine recht zufriedenstellende Annäherung für die Resonanzwellenlänge. Sie deckt sich übrigens weitgehend mit Näherungsformeln, die auf ganz andere Weise gewonnen wurden[8]).

Die Verstimmung $\Delta\lambda$ durch ein dünnes kreiszylindrisches dielektrisches Stäbchen (Querschnitt f, DK $\varepsilon\varepsilon_0$) zwischen A und B (Fig.12) erhält man unter Zugrundelegung der nämlichen angenäherten Feldverteilung in Anwendung von (15) nach kurzer Rechnung zu

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{(\varepsilon-1)\,f}{2\pi\left(r_a^2 + \dfrac{a\,h}{\ln r_a/r_i}\right)}\,. \tag{36}$$

Zur Verstimmung wurden kreisrunde Stäbchen aus Quarz, Calit, Trolitul, Bernstein und Ardostan verwendet. Die folgende Tabelle zeigt, wie weit (36) die Verhältnisse annähert:

Dielektrikum	Durchmesser in mm	ε	$\Delta\lambda_{\text{theor.}}$ in mm	$\Delta\lambda_{\text{gemessen}}$
Quarz	2,00	3,85	1,06	0,92
Quarz	4,85	3,85	2,67	2,23
Calit	1,83	6,3	1,43	1,25
Trolitul	4,84	2,45	2,81	2,6
Bernstein	2,77	2,6	1,00	0,89
Ardostan	2,00	5,5	3,05	2,6

a) *ΔC-Methode.* Unter Anwendung von (17) ergab sich:

Dielektrikum	Durchmesser in mm	ε	$R_p \cdot 10^{-5}$ Ohm
Quarz	2,12	3,85	3,88
Quarz	4,85	3,85	3,92
Calit	2,00	6,3	3,9
Trolitul	4,84	2,45	4,15
Bernstein	2,77	2,6	3,9
Ardostan	2,00	5,5	3,84

b) *R_p-Methode.* Mit drei verschiedenen Kombinationen ergab sich mit (28):

Kombination	$R_p \cdot 10^{-5}$ Ohm
Bernstein-Quarz	4,0
Ardostan-Quarz	3,7
Calit-Ardostan	3,8

Der Wert von K betrug bei diesen Messungen überall etwa 1,5.

Zusammenfassend lässt sich beim Überblick über die an den verschiedenen Resonanzkreisen durchgeführten Messungen die praktische Brauchbarkeit der angegebenen Methoden feststellen, deren Ergebnisse untereinander ungefähr gleichwertig sind. In einem konkreten Fall wird sich daher die Auswahl der geeigneten Methode darnach richten, welche Methode sich jeweils am einfachsten durchführen lässt.

Die Genauigkeit der Bestimmung des Resonanzwiderstands bei Verwendung der hier beschriebenen Messanordnung kann im Durchschnitt mit 10% angegeben werden, was für die meisten praktischen Fälle genügt. Der experimentelle Aufwand ist dabei nicht weiter getrieben worden, als den normalen Bedürfnissen entspricht. An sich lässt sich die Genauigkeit zweifellos noch erhöhen, wobei, wie gewöhnlich in solchen Fällen, die erreichbare Genauigkeit erheblich langsamer ansteigt als die Anforderungen an den experimentellen Aufwand.

Literaturangaben.

1) F. Borgnis, Z. f. Phys. **122**, 407 (1944).
2) F. Borgnis, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **54**, 121 (1939).
3) F. Borgnis, Elektrotechn. Zeitschr. **61**, 461 (1940).
4) J. Müller, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **54**, 157 (1939).
5) F. Borgnis, Naturwiss. **31**, 20 (1943).
6) F. Borgnis, Physik. Zeitschr. **43**, 284 (1942).
7) W. Dällenbach, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **61**, 161 (1943).
8) W. Dällenbach, Hochfr. Techn. u. Elektroak. **61**, 129 (1943).
9) P. Grivet, I, II, Not. aux Comptes rendues de l'Académie des sciences, November 1943.
10) Courant-Hilbert, Methoden der mathem. Physik I, Berlin 1924.
11) F. Borgnis, Ann. d. Phys. V. **35**, 359 (1939).