Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 22 (1949)
Heft: V

Artikel: Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112017

Über den Einfluss des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld

von **W. Scherrer**, Bern.

(27. VI. 1949.)

§ 1. Einleitung.

Der umfassende Charakter der klassischen Einstein'schen Gravitationsgleichungen

$$R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{\sigma\varrho} R = -\varkappa T_{\varrho\sigma} \tag{1.1}$$

kommt unter anderem darin zum Ausdruck, dass die identisch verschwindende Divergenz der linken Seite den sog. Erhaltungssatz

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial (\sqrt{-G}\, T_\varrho^\sigma)}{\partial x_\sigma} - \Gamma_{\varrho\lambda}^\sigma T_\sigma^\lambda = 0 \tag{1.2}$$

erzwingt, gleichgültig wie auch im einzelnen der Energietensor $T_{\varrho\sigma}$ gestaltet sein mag.

Obwohl schon seit langem Versuche unternommen werden, die Theorie nicht nur durch passende Wahl von $T_{\varrho\sigma}$, sondern auch durch gleichzeitige Bereicherung der Metrik zu fördern, habe ich den Eindruck, dass die bei Festhaltung der Riemann-Metrik sich bietenden Möglichkeiten noch nicht ausreichend analysiert worden sind. Im folgenden präsentiere ich daher eine Variante der Theorie, welche sich in diesem engeren Rahmen hält. Dabei stütze ich mich vor allem auf zwei Argumente:

1. *Physikalisch* ist es paradox, dass die Gleichungen (1.1) auch dann noch Lösungen liefern, wenn keine Materie vorhanden ist. Von einer Theorie, die die Materie nicht nur für die Abweichungen von der Trägheitsbahn, sondern für die totale metrische Struktur verantwortlich macht, sollte man eigentlich erwarten, dass sie im Falle verschwindender Materie entartet.

Anders ausgedrückt ist es paradox, wenn man einem Linienelement ds gemäss

$$ds^2 = G_{\varrho\sigma}\, dx_\varrho\, dx_\sigma \tag{1.3}$$

eine reale Existenz zusprechen will, auch wenn den beiden infinitesimal benachbarten Weltpunkten x_ϱ und $x_\varrho + dx_\varrho$ kein materielles Substrat entspricht.

So gelange ich zu der heuristischen Forderung, jeder Weltstelle x_ϱ eine Intensität ψ^2 zuzuordnen, etwa in dem Sinne, dass der Ausdruck

$$\psi^2 \sqrt{-G}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \psi^2 \sqrt{-G}\, dx \tag{1.4}$$

die relative Anzahl der im Volumelement $\sqrt{-G}\;dx$ vorhandenen materiellen Elemente darstellen soll. Es liegt im Wesen der Kontinuumstheorie, dass die entsprechende absolute Anzahl als mathematisch unendlich aufgefasst werden muss. Eine diskrete — und damit erkenntnistheoretisch befriedigendere — Theorie mit endlicher Elementzahl liegt wohl noch in weiter Ferne.

2. *Mathematisch* ist es verfänglich, in der Einstein'schen Theorie die so weit über den uns vertrauten Anschauungsbereich hinaus reicht, an den expliciten Gleichungen Zusatzglieder anzubringen. Methodisch viel günstiger ist es, von einem Wirkungsprinzip auszugehen. Ein solches liefert immer ein vollständiges System von Gravitations- und Materiegleichungen. Ausserdem gestattet es — ganz abgesehen von den rechnerischen Vorteilen — von Anfang an eine klare Scheidung zwischen Annahmen und Folgerungen.

Wohl das einfachste Wirkungsprinzip, das dem unter 1. entwickelten Gesichtspunkt Rechnung trägt, hat die Gestalt

$$\delta \int R\, \psi^2 \sqrt{-G}\, dx = 0 \tag{1.5}$$

Dabei könnte angesichts des relativen Charakters der Intensität ψ^2 die normierende Nebenbedingung

$$\delta \int \psi^2 \sqrt{-G}\, dx = 0 \tag{1.6}$$

von Interesse sein.

Eine naheliegende Bereicherung von (1.5) stellt das Prinzip

$$\delta \int \left(R\, \psi^2 + 4\,\omega\, G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right) \sqrt{-G}\, dx = 0 \tag{1.7}$$

dar.

Auf diese Ansätze habe ich schon vor längerer Zeit hingewiesen[1]). Jetzt konstatiere ich, dass Feldgleichungen, wie sie aus dem Prinzip (1.7) folgen, in der Literatur zur Behandlung kommen sollen[2]). Ich hoffe daher, dass eine einlässlichere Darstellung meiner Untersuchungen Interesse finden werde.

Selbstverständlich hat man mit der Möglichkeit zu rechnen, dass Ansätze mit einer skalaren Intensität zu primitiv sind und man kann als nächste Stufe auch Invarianten in Betracht ziehen, die aus dem Vektorpotential Φ_ϱ aufgebaut sind[3]). Trotzdem beschränke ich mich auf den einfachsten Fall in der Hoffnung zu erfahren, was für Struktureffekte das metrische Feld allein schon ausübt.

Gegen die primäre Einführung eines Vektorfeldes Φ_ϱ lässt sich nämlich folgendes sagen. Ein Vektor ist nach seinem ursprünglichen Sinne schon eine Relation zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten. Dasselbe gilt aber auch von dem Linienelement ds^2. Es ist daher eine Frage von grundsätzlicher Bedeutung, was aus der Verbindung von ds^2 und ψ^2 allein schon folgt.

In dieser Arbeit will ich nun zeigen, dass das zum einfachsten Wirkungsprinzip (1.5) gehörige statische und räumlich zentralsymmetrische Problem exakt und vollständig lösbar ist. Die Lösungen bilden eine zweiparametrige Schar. Zu jeder dieser Lösungen gehört eine endliche Totalenergie. Wir haben hier ein Beispiel für ein Feld, das bei grosser Entfernung r vom Zentrum eine Energiedichte vom Typus

$$T_0^0 \sim \frac{\text{konst}}{r^4} \tag{1.8}$$

aufweist, dessen Totalenergie aber unter dem Einfluss des metrischen Feldes allein endlich bleibt.

§ 2. Die Feldgleichungen.

Wir legen uns vorderhand keine Beschränkung auf und leiten die Feldgleichungen ab für das Prinzip (1.7) mit der Nebenbedingung (1.6). Nach den Methoden der Variationsrechnung haben wir zu dem Zweck einfach das Prinzip

$$\delta \int \left[(R - 2\Lambda)\, \psi^2 + 4\,\omega\, G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right] \sqrt{-G}\, d x = 0 \tag{2.1}$$

zu behandeln, wo Λ eine Konstante ist.

---

1) Verhandlungen der S.N.G., Basel, 1941, S. 86—87.

2) G. Ludwig uud C. Müller, Archiv der Mathematik **1**, 1948, S. 80—82.

3) Mitteilungen der Berner Naturforschenden Gesellschaft, Neue Folge, Bd. 6 1949.

Zur leichteren Übersicht verwenden wir folgende Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} R_{\varrho\sigma} &\equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\varrho\lambda}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\varrho\sigma}}{\partial x_\lambda} - Q_{\varrho\sigma} \\ Q_{\varrho\sigma} &\equiv \Gamma^{\lambda}_{\varrho\sigma}\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\varrho\mu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} \\ P^{\lambda} &\equiv G^{\lambda\varrho}\Gamma^{\mu}_{\varrho\mu} - G^{\varrho\mu}\Gamma^{\lambda}_{\varrho\mu} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned} R &\equiv G^{\varrho\sigma} R_{\varrho\sigma}\,; \qquad \mathfrak{R} \equiv R\sqrt{-G} \\ Q &\equiv G^{\varrho\sigma} Q_{\varrho\sigma}\,; \qquad \mathfrak{Q} \equiv Q\sqrt{-G} \\ &\mathfrak{P}^{\lambda} \equiv P^{\lambda}\sqrt{-G} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Dann gilt bekanntlich die Identität

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{\partial \mathfrak{P}^{\lambda}}{\partial x_\lambda} + \mathfrak{Q}\,. \tag{2.4}$$

Weiter charakterisieren wir die kovariante Differentiation nach der Koordinate x_ϱ durch das Symbol D_ϱ und führen hierauf die Beltrami'schen Operatoren

$$\nabla \psi \equiv G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\sigma} \equiv G^{\varrho\sigma} D_\varrho \psi D_\sigma \psi\,, \tag{2.5}$$

$$\Box \psi \equiv \frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x_\varrho}\left(\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma}\right) \equiv G^{\varrho\sigma} D_\varrho D_\sigma \psi \equiv D_\sigma \psi^{\sigma} \tag{2.6}$$

ein.

Benützen wir schliesslich noch die Abkürzung

$$\chi \equiv \psi^2 \tag{2.7}$$

so verwandelt sich (2.1) nach der durch (2.4) angezeigten partiellen Integration in

$$\delta \int \left[-\mathfrak{P}^{\lambda} \frac{\partial \chi}{\partial x_\lambda} + (\mathfrak{Q} - 2\Lambda\sqrt{-G})\,\chi + \omega \frac{\nabla \chi}{\chi}\sqrt{-G}\right] dx = 0. \tag{2.8}$$

Die weitere Rechnung wird etwas verkürzt, wenn man als unabhängig zu variierende Funktionen die Grössen χ und $\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}$ wählt. Die Variationen der $D_\varrho \chi$ lassen sich in der üblichen Weise durch partielle Integration entfernen und man erhält nach einer ersten Berechnungsphase an Stelle von (2.8):

$$\int \left\{\begin{aligned} &\left[R - 2\Lambda + \omega\left(\frac{\nabla\chi}{\chi^2} - 2\frac{\Box\chi}{\chi}\right)\right]\sqrt{-G}\,\delta\chi \\ &- D_\lambda \chi\, \delta\mathfrak{P}^{\lambda} + \chi\,\delta\mathfrak{Q} - 2\Lambda\chi\,\delta\sqrt{-G} + \omega\frac{D_\varrho\chi D_\sigma\chi}{\chi}\,\delta\left(\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}\right) \end{aligned}\right\} dx = 0 \tag{2.9}$$

Zur Umformung der zweiten Zeile in (2.9) — Wegschaffung der Variationen der Ableitungen $\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}$ — benötigt man die zum Rüstzeug der allgemeinen Relativitätstheorie gehörigen Formeln

$$\delta \sqrt{-G} = \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma}\, \delta (\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}) \tag{2.10}$$

$$\mathfrak{P}^{\lambda} = G^{\lambda\mu} \frac{\partial \sqrt{-G}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial (\sqrt{-G}\, G^{\lambda\mu})}{\partial x_\mu} \tag{2.11}$$

$$\delta \mathfrak{Q} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left[\Gamma^{\lambda}_{\varrho\sigma}\, \delta (\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}) \right] - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}\, \delta (\sqrt{-G}\, G^{\lambda\nu}) \right] + R_{\varrho\sigma}\, \delta (\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}) . \tag{2.12}$$

Nach einer zweiten Berechnungsphase erhält man dann das Teilintegral von (2.9)

$$\int (-D_\lambda \chi \cdot \delta \mathfrak{P}^{\lambda} + \chi\, \delta \mathfrak{Q})\, dx = \int \left(D_\varrho D_\sigma \chi + \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \Box \chi + R_{\varrho\sigma} \chi\right) \delta (\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma})\, dx . \tag{2.13}$$

Als Endresultat ergibt sich schliesslich die Formel

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta \int \left[(R - 2\Lambda)\chi + \omega \frac{\nabla \chi}{\chi} \right] \sqrt{-G}\, dx \\ &= \int \left\{ \begin{aligned} &\left[R - 2\Lambda + \omega \left(\frac{\nabla \chi}{\chi^2} - 2 \frac{\Box \chi}{\chi} \right) \right] \sqrt{-G}\, \delta \chi \\ &+ \left[\begin{aligned} &D_\varrho D_\sigma \chi + \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \Box \chi \\ &+ (R_{\varrho\sigma} - \Lambda G_{\varrho\sigma}) \chi + \omega \frac{D_\varrho \chi D_\sigma \chi}{\chi} \end{aligned} \right] \delta (\sqrt{-G}\, G^{\varrho\sigma}) \end{aligned} \right\} dx \end{aligned}} \tag{2.14}$$

Die Feldgleichungen der Gravitation lauten daher vorerst

$$(R_{\varrho\sigma} - \Lambda G_{\varrho\sigma}) \chi + D_\varrho D_\sigma \chi + \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \Box \chi + \omega \frac{D_\varrho \chi D_\sigma \chi}{\chi} = 0 , \tag{2.15}$$

und als Feldgleichung der Materie ergibt sich

$$R - 2\Lambda + \omega \left(\frac{\nabla \chi}{\chi^2} - 2 \frac{\Box \chi}{\chi} \right) = 0 . \tag{2.16}$$

Durch Multiplikation von (2.15) mit $G^{\varrho\sigma}$ erhalten wir die zugehörige skalare Gleichung

$$(R - 4\Lambda)\chi + 3 \Box \chi + \omega \frac{\nabla \chi}{\chi} = 0 . \tag{2.17}$$

Bildet man nun die Kombination χ^{-1} (2.15) — $\frac{1}{2} \chi^{-1} G_{\varrho\sigma}$ (2.17), so erhält man schliesslich die Feldgleichungen der Gravitation in der Gestalt

$$\boxed{\begin{aligned} & R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} R + \Lambda G_{\varrho\sigma} \\ & + \frac{1}{\chi} \left(D_\varrho D_\sigma \chi - G_{\varrho\sigma} \Box \chi \right) \\ & + \frac{\omega}{\chi^2} \left(D_\varrho \chi D_\sigma \chi - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \nabla \chi \right) = 0 \end{aligned}} \tag{2.18}$$

die zum Vergleich mit den klassischen Gleichungen (1.1) geeignet ist.

Analog bilden wir die Kombination (2.17) $-\chi \cdot$ (2.16) und erhalten als Feldgleichung der Materie

$$\boxed{(3 + 2\,\omega) \Box \chi - 2\,\Lambda\,\chi = 0} \tag{2.19}$$

Aus dem Vergleich unserer Gleichungen (2.18) mit den klassischen Gleichungen (1.1) entnehmen wir nun, dass wir als Energietensor anzusetzen haben

$$T_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\varkappa} \left\{ \frac{D_\varrho D_\sigma \chi - G_{\varrho\sigma} \Box \chi}{\chi} + \omega \cdot \frac{D_\varrho \chi \cdot D_\sigma \chi - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} \nabla \chi}{\chi^2} \right\}. \tag{2.20}$$

Schon Einstein hat das kosmologische Glied als einen Schönheitsfehler der Theorie bezeichnet. Gerade an dieser Stelle kommt einem das zum Bewusstsein, da es für sich allein schon dem Erhaltungssatz (1.2) genügt, könnte man es ungestraft zum Energietensor schlagen. Dies aber hat wiederum nicht viel Zweck, da kein Austausch mit $T_{\varrho\sigma}$ stattfindet.

§ 3. Das statische Zentralfeld.

Wir wählen das Schwarzschild'sche Linienelement

$$ds^2 = f^2\,dx_0^2 - g^2\,dr^2 - r^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2)\,, \tag{3.1}$$

wo nun also f und g Funktionen des Radius r sind. Es folgt

$$\sqrt{-G} = f\,g\,r^2 \sin\vartheta\,, \tag{3.2}$$

und man erhält

$$\mathfrak{R} = \left\{ - \left[\frac{2\,r}{g} (r f' + 2 f) \right]' + 2 \left(\frac{2\,r f' + f}{g} + f g \right) \right\} \sin\vartheta\,, \tag{3.3}$$

wobei der Strich die Ableitung nach r anzeigt.

Das Wirkungsprinzip (2.1) nimmt für $\Lambda = \omega = 0$ und mit (2.7) die Gestalt

$$\delta \int R \chi \sqrt{-G}\, d x = 0 \tag{3.4}$$

an. Lassen wir hier die Zeit und die Winkelvariabeln weg, so ergibt sich nach Ausübung der durch (3.3) nahegelegten partiellen Integration das Prinzip

$$\delta \int \left\{ \frac{r}{g} (r f' + 2 f)\, \chi' + \left(\frac{2 r f' + f}{g} + f g \right) \chi \right\} d r = 0 . \tag{3.5}$$

Durch sukzessive Variation von f, χ und g, gefolgt von respektiver Division durch χ, f und χf erhält man nach leichter Umformung die Gleichungen

$$\left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{\chi'}{\chi} + \frac{2}{r} \right) \right]' + \frac{r^2}{g} \left(\frac{\chi'}{\chi} \right)^2 - \left(g + \frac{1}{g} \right) = 0 , \tag{3.6}$$

$$\left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) \right]' + \frac{r^2}{g} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - \left(g + \frac{1}{g} \right) = 0 , \tag{3.7}$$

$$\frac{r^2}{g^2} \left(\frac{\chi'}{\chi} + \frac{2}{r} \right) \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) - \left(1 + \frac{3}{g^2} \right) = 0 . \tag{3.8}$$

Ersetzt man hier die beiden ersten Gleichungen durch ihre Differenz und ihre Summe und führt man überdies an Stelle von χ und f die neuen Funktionen

$$P \equiv \chi f , \qquad Q \equiv \frac{\chi}{f} \tag{3.9}$$

ein, so erhält man durch Auswertung einer an der Differenz unmittelbar ersichtlichen Integration, das System

$$\frac{r^2 Q'}{g Q} = \frac{A}{P} , \tag{3.10}$$

$$2 \frac{r^2}{g} \left[\frac{r^2}{g} \left(\frac{P'}{P} + \frac{4}{r} \right) \right]' + \left(\frac{r^2}{g} \frac{P'}{P} \right)^2 + \frac{A^2}{P^2} - 4 r^2 \left(1 + \frac{1}{g^2} \right) = 0 , \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{g^2} \left[r^2 \left(\frac{P'}{P} \right)^2 + 8 r \frac{P'}{P} + 4 \right] - \left(\frac{A^2}{r^2 P^2} + 4 \right) = 0 . \tag{3.12}$$

Hier empfiehlt es sich, (3.11) noch umzuformen in

$$\frac{r^2}{g^2} \left[2 r \left(\frac{r P'}{P} \right)' + \left(\frac{r P'}{P} \right)^2 + \frac{2 r P'}{P} + 4 \right]$$
$$+ \left(\frac{1}{g^2} \right)' r^3 \left(\frac{r P'}{P} + 4 \right) + \frac{A^2}{P^2} - 4 r^2 = 0 . \tag{3.11'}$$

Setzt man jetzt

$$S \equiv rP \; ; \qquad K \equiv \frac{r\,P'}{P}\,, \tag{3.13}$$

so gilt offenbar

$$r\,S' = S\,(K+1)\,. \tag{3.14}$$

Nun findet man aus (3.12) und (3.11′) nach einiger Rechnung als Differentialgleichung zwischen S^2 und K allein

$$\frac{2\,(K+1)\,dK}{K\,(K^2+8\,K+4)} + \frac{d/S^2)}{A^2+4\,S^2} = 0\,. \tag{3.15}$$

Ihr Integral lautet

$$\frac{K^2\,(A^2+4\,S^2)}{K^2+8\,K+4} = B^2\,. \tag{3.16}$$

Weiter finden wir aus (3.10), (3.13) und (3.14)

$$\frac{d\,Q}{Q} = g\,\frac{A\,d\,S}{(K+1)\,S^2}\,. \tag{3.17}$$

Aus (3.12), (3.13) und (3.16) aber folgt

$$g = \frac{K\,S}{B}\,, \tag{3.18}$$

womit (3.17) übergeht in

$$\frac{d\,Q}{Q} = \frac{A\,K}{B\,(K+1)} \cdot \frac{dS}{S}\,. \tag{3.19}$$

Um nun die endgültige Integration einzuleiten, müssen wir die nach (3.13) und (3.14) in (3.16) enthaltene Differentialgleichung auflösen. Setzt man

$$s \equiv Lg\,r \tag{3.20}$$

und bezeichnet die Ableitung nach s mit einem Punkt, so erhält man

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{4\,S^2+A^2+3\,B^2-2\,B\sqrt{4\,S^2+A^2+3\,B^2}}{4\,S^2+A^2-B^2}\,. \tag{3.21}$$

Führt man nun die Abkürzungen

$$2\,a = \sqrt{A^2+3\,B^2}\,, \qquad \beta = \frac{B}{2\,a} \tag{3.22}$$

ein, so verwandelt sich (3.21) vermittels der Substitution

$$S = a\sqrt{x^2 - 1} \tag{3.23}$$

in

$$\frac{x + 2\beta}{x^2 - 1}\, dx = ds. \tag{3.24}$$

Die Integration ergibt mit Rücksicht auf (3.20)

$$r = b\sqrt{x^2 - 1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\beta}. \tag{3.25}$$

Aus (3.14), (3.20), (3.21), (3.22) und (3.23) folgt weiter

$$K = -\frac{2\beta}{x + 2\beta}. \tag{3.26}$$

Führt man nun (3.23) und (3.26) in (3.19) ein und integriert, so folgt

$$Q = C\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\alpha} \tag{3.27}$$

mit

$$\alpha = \frac{A}{2a}. \tag{3.28}$$

Aus (3.13), (3.23) und (3.25) ergibt sich dazu

$$P = \frac{a}{b}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-\beta}. \tag{3.29}$$

Wegen (3.9) erhalten wir also

$$\chi^2 = \frac{Ca}{b}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-(\alpha+\beta)} \tag{3.30}$$

und

$$f^2 = \frac{a}{Cb}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\alpha-\beta}. \tag{3.31}$$

Aus (3.18), (3.23), (3.26) und (3.22) folgt schliesslich

$$g^2 = \frac{x^2 - 1}{(x + 2\beta)^2}. \tag{3.32}$$

Jetzt nehmen wir die Normierung im Unendlichen vor. Aus $x \to \infty$ folgt nach (3.25) $r \to \infty$. Damit also das pseudoeuklidische Linienelement herauskommt, muss in (3.31) gesetzt werden

$$\frac{a}{Cb} = 1. \tag{3.33}$$

Weiter aber normieren wir die relative Intensität χ so, dass im Unendlichen herauskommt $\chi = 1$. Nach (3.30) bedingt dies

$$\frac{C a}{b} = 1 . \tag{3.34}$$

Wir haben also zu setzen

$$b = a \quad ; \qquad C = 1 . \tag{3.35}$$

Schliesslich ist noch zu beachten, dass wegen (3.22) und (3.28) gilt

$$\alpha^2 + 3\,\beta^2 = 1 \tag{3.36}$$

Die gewonnenen Resultate stellen wir nun zusammen in folgender Tabelle

$$\boxed{\begin{aligned} r &= a\sqrt{x^2-1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\beta} \\ f^2 &= \left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\alpha-\beta} \\ g^2 &= \frac{x^2-1}{(x+2\,\beta)^2} \\ \chi^2 &= \left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned}} \tag{3.37}$$

Nach (3.23) muss auf jeden Fall $|x| > 1$ sein. Doch genügt es, sich auf

$$x > 1 \tag{3.38}$$

zu beschränken, denn die den negativen x-Werten entsprechenden Lösungen erhält man auch bei positiven x-Werten, wenn man in der Tabelle das Exponentenpaar (α, β) durch $(-\alpha, -\beta)$ ersetzt.

§ 4. Der Energietensor.

Um den Energietensor zu berechnen, führen wir auch im Linienelement (3.1) an Stelle von r den Parameter x ein. Nach (3.37) haben wir also einzusetzen

$$r = a\,(x-1)^{\frac{1}{2}+\beta}\,(x+1)^{\frac{1}{2}-\beta}, \tag{4.1}$$

und wir erhalten

$$ds^2 = f^2\,dx_0^2 - h^2\,dx^2 - r^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) \tag{4.2}$$

mit

$$h = a\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\beta}. \tag{4.3}$$

Jetzt ermitteln wir die Dreizeigersymbole auf Grund der Tatsache, dass die Differentialgleichungen der geodätischen Linie auf kanonische Gestalt gebracht, die Form

$$\ddot{x}_\varrho + \Gamma^\varrho_{\lambda\mu}\,\dot{x}_\lambda\,\dot{x}_\mu = 0 \tag{4.4}$$

haben müssen, falls man die Bogenlänge als Parameter benützt.

Bezeichnen wir — in Abweichung von § 3 — die Ableitung nach x mit einem Strich, so ergibt die Berechnung

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^{\,0}_{10} = \frac{f'}{f}, \\
\Gamma^{\,1}_{00} = \frac{ff'}{h^2},\quad &\Gamma^{\,1}_{11} = \frac{h'}{h},\quad \Gamma^{\,1}_{22} = -\frac{rr'}{h^2},\quad \Gamma^{\,1}_{33} = -\frac{rr'}{h^2}\sin^2\vartheta, \\
&\Gamma^{\,1}_{12} = \frac{r'}{r}, \qquad\qquad\qquad\qquad \Gamma^{\,2}_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \\
&\Gamma^{\,3}_{13} = \frac{r'}{r},\quad \Gamma^{\,3}_{23} = \operatorname{tg}\vartheta,
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

während alle übrigen $\Gamma^\varrho_{\lambda\mu}$ Null sind.

Ausgehend von (2.20) erhält man nun vorerst für die nicht verschwindenden Komponenten des Energietensors

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa T^0_0 &= \quad -G^{00}\,\Gamma^{\,1}_{00}\cdot\frac{\chi'}{\chi} = -\frac{f'\chi'}{h^2 f\chi} \\
\varkappa T^1_1 &= G^{11}\left(\frac{\chi''}{\chi} - \Gamma^{\,1}_{11}\frac{\chi'}{\chi}\right) = -\frac{h\chi'' - h'\chi'}{h^3\chi} \\
\varkappa T^2_2 &= \quad -G^{22}\,\Gamma^{\,1}_{22}\frac{\chi'}{\chi} = -\frac{r'\chi'}{h^2 r\chi} \\
\varkappa T^3_3 &= \quad -G^{33}\,\Gamma^{\,1}_{33}\frac{\chi'}{\chi} = -\frac{r'\chi'}{h^2 r\chi}
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Die weitere Berechnung nach (3.37) und (4.3) liefert zuerst

$$\frac{f'}{f} = \frac{\alpha-\beta}{x^2-1},\qquad \frac{\chi'}{\chi} = -\frac{\alpha+\beta}{x^2-1},\qquad \frac{r'}{r} = \frac{x+2\beta}{x^2-1}, \tag{4.7}$$

und schliesslich

$$\left.\begin{aligned}
T^0_0 \quad &= \quad \frac{\alpha^2-\beta^2}{\varkappa a^2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-2\beta}\cdot\frac{1}{(x^2-1)^2} \\
T^1_1 \quad &= -\frac{\alpha+\beta}{\varkappa a^2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-2\beta}\cdot\frac{2x+\alpha+3\beta}{(x^2-1)^2} \\
T^2_2 = T^3_3 &= \quad \frac{\alpha+\beta}{\varkappa a^2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-2\beta}\cdot\frac{x+2\beta}{(x^2-1)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Mit

$$\sqrt{-G} = f h r^2 \sin\vartheta = a^3 \left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{\alpha+5\beta}{2}} (x^2-1)\sin\vartheta \tag{4.9}$$

ergibt sich also die Energiedichte

$$\boxed{T_0^0\sqrt{-G} = \frac{a(\alpha^2-\beta^2)}{\varkappa}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{\sin\vartheta}{x^2-1}} \tag{4.10}$$

Nun berechnet man ohne Schwierigkeit die Totalenergie

$$E = \int_1^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} T_0^0\sqrt{-G}\,d\varphi\,d\vartheta\,dx\,. \tag{4.11}$$

Die Integration über die Winkel ergibt zuerst

$$E = \frac{4\pi a(\alpha^2-\beta^2)}{\varkappa}\int_1^\infty\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{dx}{x^2-1}\,, \tag{4.12}$$

und mit Hilfe der Substitution

$$\frac{x-1}{x+1} = z^2 \tag{4.13}$$

erhält man weiter

$$E = \frac{4\pi a(\alpha^2-\beta^2)}{\varkappa}\int_0^1 z^{\alpha+\beta-1}\,dz\,. \tag{4.14}$$

Damit das Integral konvergiert, muss also gelten

$$\alpha+\beta > 0 \tag{4.15}$$

und es folgt

$$\boxed{E = \frac{4\pi a(\alpha-\beta)}{\varkappa}} \tag{4.16}$$

Besonderes Interesse verdienen die Grenzfälle $\alpha + \beta = 0$, da für sie der Energietensor in allen Punkten $x > 1$ verschwindet, während er im Punkte $x = 1$ unendlich wird. Die Totalenergie geht dabei stetig in den durch (4.16) gegeben Wert über.

Im Detail sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = -\frac{1}{2}. \tag{4.17a}$$

Man kann in (3.37) r als unabhängige Variable verwenden und erhält

$$f^2 = 1 - \frac{2a}{r}, \tag{4.18a}$$

$$g^2 = \frac{1}{1 - \frac{2a}{r}}, \tag{4.19a}$$

$$\chi = 1. \tag{4.20a}$$

Es liegt also das Einstein'sche Zentralfeld für den Gravitationsradius a vor, dem nach (4.16) jetzt die Totalenergie

$$E = \frac{4\pi a}{\varkappa} \tag{4.21a}$$

zugeordnet ist.

b) $$\alpha = -\frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2} \tag{4.17b}$$

Analog wie oben erhält man

$$f^2 = 1 + \frac{2a}{r}, \tag{4.18b}$$

$$g^2 = \frac{1}{1 + \frac{2a}{r}}, \tag{4.19b}$$

$$\chi = 1, \tag{4.20b}$$

also ein Feld, das einer negativen Masse entsprechen würde. Als Totalenergie folgt

$$E = -\frac{4\pi a}{\varkappa}. \tag{4.21b}$$

Bezeichnet man im Falle a) die Masse mit m, so liefert der bekannte Vergleich mit dem Newton'schen Potential

$$a = \frac{km}{c^2}, \tag{4.22}$$

wobei k die Newton'sche Gravitationskonstante und c die Licht-

*

geschwindigkeit bedeutet. Nimmt man nun noch den Satz von der Trägheit der Energie

$$m = \frac{E}{c^2} \tag{4.23}$$

hinzu, so erhält man aus (4.21a)

$$\varkappa = \frac{4\pi k}{c^4}, \tag{4.24}$$

also die Hälfte desjenigen Wertes, der für den phänomenologischen Energietensor aus der Poisson'schen Gleichung folgt.

Diese Abweichung hängt offenbar damit zusammen, dass für ein Materiefeld, das ein statisches Gleichgewicht zulässt, die Poisson'sche Gleichung auch näherungsweise nicht zuständig sein kann.

§ 5. Schlussbemerkungen.

Rückblickend erhalten wir folgendes Bild. Wenn wir die invariante Intensität χ als eigentlichen Repräsentanten der Materie betrachten, ist die Welt nirgends leer. Da nach (4.15) $\alpha + \beta > 0$ und nur in den Grenzfällen $\alpha + \beta = 0$ ist, weist die Intensität χ nach (3.37) normalerweise eine singuläre Verdichtung im Zentrum auf, die kontinuierlich auf 1 abklingt. Wenn man dagegen die Energiedichte als Repräsentanten der Materie auffasst, so kann diese Dichte nach (4.8) positiv, Null oder negativ sein. In allen Fällen aber liegt — auch nach (4.10) — eine singuläre Verdichtung des Absolutwertes im Zentrum vor.

Für die weitere Abklärung wäre natürlich eine Herleitung der ponderomotorischen Kraft erwünscht. Wenn man orientierungshalber das im Grenzfall (4.17a) bewährte Gesetz der geodätischen Linie zugrunde legt, wird man auf die Vermutung geführt, dass ein kontinuierlicher Übergang von anziehenden zu abstossenden Kräften stattfindet.

Grundsätzlich betrachtet, ist allerdings die Herleitung einer ponderomotorischen Kraft gar nicht nötig. Die konsequente Weiterentwicklung würde vielmehr darin bestehen, das Zweizentrenproblem vollständig zu lösen. Ich weiss aber nicht, ob irgendeine Aussicht besteht, diese schwierige Aufgabe zu bewältigen.

Da unser Modell ein vollständiges Gleichgewicht liefert, muss es sinngemäss in erster Linie für Elementarteilchen in Aussicht genommen werden. Man wird sich also fragen, weshalb noch keine Quantisierung auftritt. Dazu möchte ich nur folgendes bemerken. Einmal ist die Beschränkung auf den absolut statischen Fall möglicherweise zu eng. Weiter aber ist es denkbar, dass eine Quantisierung erst bei Wechselwirkung, also beim Zweizentrenproblem, auftritt. Faktisch liegt ja bei den klassischen Quantisierungen immer Wechselwirkung vor.

Schliesslich gebe ich noch zwei Hinweise auf weitere in § 1 genannte Probleme:

1. das Problem (1.5) — also das eben behandelte Problem — hat keine statische Lösung, wenn man die Nebenbedingung (1.6) hinzunimmt.

2. Das statische und zentralsymmetrische Problem (1.7) ohne Nebenbedingung (1.6) lässt sich analog zum eben behandelten Problem ebenfalls vollständig lösen. Abgesehen von einer an sich natürlich wesentlichen Strukturänderung des Gesamtfeldes tritt grundsätzlich nichts Neues auf. Die Energieverhältnisse habe ich noch nicht untersucht.