Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 22 (1949)
Heft: V

Artikel: Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel
Autor: Schafroth, Max Robert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112016

Höhere strahlungstheoretische Näherungen zur Klein-Nishina-Formel

von **Max Robert Schafroth** (ETH. Zürich).

(2. VII. 1949)

Zusammenfassung: Die von der neuen Quantenelektrodynamik entwickelten Methoden zur Subtraktion, resp. „Deutung", der auftretenden Divergenzen werden, parallel im Impulsraum- und Ortsraumformalismus, auf die e^6-Näherung zum Comptonquerschnitt angewendet und eine konvergente, lorentz- und eichinvariante Formel (52) für das zuständige Matrixelement gegeben. Der Wirkungsquerschnitt wird explizit nur für den Fall kleiner Energien berechnet. Die Zusatzhypothesen, die für die Rechnung mit divergenten Ausdrücken notwendig sind, werden ausführlich diskutiert. Besonderes Augenmerk gilt der Ultrarotkatastrophe, die sich in richtiger Weise gegen die des Doppelcomptoneffektes kompensiert.

§ 1. Einleitung.

In den letzten zwei Jahren wurde erkannt, dass die Quantenelektrodynamik trotz der ihr innewohnenden Schwierigkeiten wohl imstande ist, bestimmte quantitative Aussagen über höhere strahlungstheoretische Näherungen zu gewissen Problemen zu machen[1])[3]). Nachdem Phänomene zweiter Ordnung, wie die Feinstruktur des Wasserstoffspektrums und das magnetische Moment des Elektrons derart behandelt worden waren und die Resultate in schönster Übereinstimmung mit dem Experiment lagen, erhob sich die Frage, ob auch für Probleme 4. Ordnung dieses Verfahren brauchbar bliebe. Insbesondere könnten die Korrekturen zur Klein-Nishina-Formel interessieren, da dieselben wenigstens in bezug auf Winkelverteilung mit den heutigen experimentellen Möglichkeiten durchaus prüfbar sein dürften. Eine Arbeit von Corinaldesi und Jost[2]), in der das analoge Problem der Streuung von Licht an skalaren Boseteilchen behandelt worden war, zeigte, dass offenbar auch in 4. Ordnung die Divergenzschwierigkeiten umgangen werden können. Indessen litt diese Arbeit — abgesehen von der Tatsache, dass nur der Fall von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ experimentell interessant ist — an einem fundamentalen Mangel an Lorentzinvarianz. So stellte sich die Aufgabe, dasselbe Problem für Diracelektronen und auf lorentzinvariante Weise in Angriff zu nehmen. Von Schwinger[3]) ist eine lorentzinvariante Formulierung der gesamten Quantenelektrodynamik im Ortsraum angegeben worden, die für Fragen dieser Art besonders angepasst erscheint. Es dürfte indessen nicht allgemein bekannt sein, dass der übliche Formalismus der Störungsrechnung im Impulsraum dazu vollständig äquivalent ist[4]), und es mag deshalb ein gewisses Interesse haben, die Rechnungen parallel in beiden Formalismen durchzuführen, wie wir das im folgenden tun werden.

Die Idee, welche der erwähnten neuen Entwicklung der Quantenelektrodynamik zugrunde liegt, ist im wesentlichen folgende[3]):

Die jetzige Theorie ist als eine erste Approximation an eine „richtige Theorie" aufzufassen, welche bei hohen Energien wesentliche Veränderungen bringen wird. Bei strahlungstheoretischen Problemen der Art, wie sie uns hier interessieren, treten solche hohen Energien nur in virtuellen Zwischenzuständen auf und bewirken das Divergieren gewisser Integrale über diese Zwischenzustände. Man wird erwarten, dass die wesentlichen Abänderungen der künftigen Theorie darin bestehen werden, diese Integrale irgendwie durch konvergente zu ersetzen. Die Tatsache aber, dass sie in der heutigen Fassung der Theorie divergieren, deutet darauf hin, dass ihr Wert sehr stark von dem Verhalten der Theorie bei hohen Energien abhängt. Anderseits sollten die uns interessierenden Phänomene wohl davon weitgehend unabhängig sein. Dies führt zur Vermutung, dass sich diese divergenten resp. „theorieempfindlichen" Ausdrücke daraus überhaupt wegschaffen lassen sollten. In der Tat zeigt es sich bei allen bisher behandelten Problemen dieser Art, dass sie sich als Korrekturen zu den Ausdrücken einer niedrigeren strahlungstheoretischen Näherung deuten lassen, welche durch Zusätze δm, δe zu der Masse und der Ladung der auftretenden Elementarteilchen hervorgerufen werden. Nun lassen sich aber solche Zusätze experimentell nie von den „wahren" Grössen trennen, d. h. man hat $m + \delta m$, $e + \delta e$ mit den experimentell gemessenen Werten zu identifizieren („Renormalisation von Masse und Ladung").

§ 2. **Prinzip der Rechnung.**

Die mathematische Durchführung der oben dargelegten Ideen verläuft folgendermassen: Wir gehen aus von der Schrödingergleichung des Systems

$$i\,\frac{\partial \Psi'}{\partial t} = (H_0 + H')\,\Psi'. \tag{1}$$

Dabei bedeutet: $H_0 = H_0^{\text{Materie}} + H_0^{\text{Strahlung}}$ die Hamiltonfunktion der ungestörten Felder,

H' die Wechselwirkungsenergie.

Im Ortsraum ist es vorteilhaft, in Anlehnung an SCHWINGER[3]), zu einer anderen Darstellung, der „interaction representation", überzugehen, indem man die ungestörte Zeitabhängigkeit auf die Observablen überwälzt. Im Sinne einer Massenrenormalisation haben wir dabei die Selbstenergie als untrennbar mit der Masse verknüpft zu betrachten und also mit in die Zeitabhängigkeit zu nehmen; d. h. wir haben für diese anzusetzen:

$$\Psi' = e^{-i\cdot(H_0 + E_s)t}\,\Psi. \tag{2}$$

Dabei bedeutet E_s die Selbstenergie, deren Form wir noch zu diskutieren haben werden. Die Schrödingergleichung wird damit:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H' - E_s)\,\Psi. \tag{3}$$

Im Impulsraum gehen wir aus vom Hamiltonoperator

$$H = H_0 + H' - E_s. \tag{1'}$$

Die Selbstenergie ist in Analogie zum Ortsraumformalismus zwecks Renormalisation der Masse hinzugefügt worden.

Ausgehend von dieser Grundlage haben wir, im Sinne einer Entwicklung nach Potenzen der Elektronladung e, Störungstheorie zu treiben. (In natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$, wie wir sie hier durchgehend verwenden, zusammen mit dem Heavisideschen Maßsystem ist $e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}$.)

Dabei ist es noch wesentlich, zu bemerken, dass die Theorie in ihrer jetzigen Fassung den Begriff des freien Teilchens gar nicht kennt. Wie man leicht sieht, ist nämlich der Zustand, in welchem nur ein Teilchen vorhanden ist, gar keine Lösung der Schrödingergleichung. Um dem abzuhelfen, gehen wir durch eine kanonische Transformation zu neuen Feldgrössen über, die wir dann mit den physikalischen identifizieren. Auf diese Weise entkoppeln wir die Felder gerade so, dass ein Zustand mit nur einem freien Teilchen Lösung der Schrödingergleichung wird und so jener Begriff in der Theorie einen Platz bekommt. Diese Transformation werden wir natürlich im Sinne unserer Entwicklung nach Potenzen von e ebenfalls nur störungsmässig durchführen.

Schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} H' &= e H_1 + e^2 H_2 \\ E_s &= e^2 W + e^4 W' + \dots \\ H_2' - W &= H_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

so wird, zunächst im Impulsraum, (1′) zu

$$H = H_0 + e H_1 + e^2 H_2 - e^4 W' + \ldots \tag{1''}$$

Führen wir die erwähnte kanonische Transformation zunächst in erster Näherung durch:

$$H \rightarrow e^{-eS}\, H\, e^{+eS}\ *)$$

und verlangen wir im Sinne der Forderung nach Entkoppelung der Felder, dass im neuen Hamiltonoperator die Terme proportional e verschwinden, so kommt

$$H_1 + [H_0, S] = 0$$

und hiermit:

$$H = H_0 + e^2\, \mathfrak{H}_2 + e^3\, \mathfrak{H}_3' + e^4\, \mathfrak{H}_4' - e^4\, W' + \ldots \tag{5}$$

wo

$$\mathfrak{H}_2 = H_2 + \frac{1}{2}[H_1, S]$$

$$\mathfrak{H}_3' = [H_2, S] + \frac{1}{3}[[H_1, S], S]$$

$$\mathfrak{H}_4' = \frac{1}{2}[[H_2, S], S] + \frac{1}{8}\big[[[H_1, S], S], S\big].$$

Bei der Transformation zweiter Ordnung

$$H \rightarrow e^{-e^2 T}\, H\, e^{+e^2 T}$$

besteht insofern ein Unterschied gegen vorhin, als $\mathfrak{H}_2$ im Gegensatz zu H_1 Elemente auf der Energieschale besitzt, die wir mit regulärem T nicht wegtransformieren können. Wir beschränken uns deshalb auf

$$\mathfrak{H}_2 - \underline{\mathfrak{H}}_2 + [H_0, T] = 0$$

und erhalten

$$H = H_0 + e^2\, \underline{\mathfrak{H}}_2 + e^3\, \mathfrak{H}_3' + e^4\, \mathfrak{H}_4 - e^4\, W' + \ldots \tag{6}$$

wo

$$\mathfrak{H}_4 = \mathfrak{H}_4' + \frac{1}{2}[\mathfrak{H}_2 - \underline{\mathfrak{H}}_2, T].$$

(Unterstreichen eines Operators bedeutet hier und im folgenden stets den Energieschalenanteil desselben.)

$$(k \mid \underline{O} \mid l) = \begin{cases} (k \mid O \mid l) & (E_k = E_l) \\ 0 & (E_k \neq E_l). \end{cases} \tag{7}$$

*) Es ist hier wohl keine Verwechslung zu befürchten zwischen der Basis der natürlichen Logarithmen und der Elektronladung.

An (6) ist zu erkennen, dass die Entkoppelung im oben definierten Sinne nur dann (bis zur zweiten Ordnung) möglich ist, wenn $\mathfrak{H}_2$ keine Diagonalelemente besitzt. Gerade dies wird durch die Massenrenormalisation bewirkt, die also mit der Umdefinition der Felder zusammen nötig ist, um das obige Programm durchzuführen.

Die e^3-Transformation trägt zu unserem Problem nichts mehr bei. Der Wirkungsquerschnitt für die Comptonstreuung wird uns gegeben durch $| e^2 \underline{\mathfrak{H}}_2 + e^4 \underline{\mathfrak{H}}_4 |^2$, die gesuchten e^6-Korrekturen zur Klein-Nishina-Formel also durch $e^6 \{ \underline{\mathfrak{H}}_2^* \underline{\mathfrak{H}}_4 + \underline{\mathfrak{H}}_4^* \underline{\mathfrak{H}}_2 \}$. Unsere Aufgabe besteht somit darin, $\underline{\mathfrak{H}}_4$ zu diskutieren.

Im Ortsraum gehen wir ganz analog von

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (e H_1 + e^2 H_2 - e^4 W') \Psi \tag{4'}$$

mit $\Psi = e^{eS} \Psi'$ wo $\dfrac{\partial S}{\partial t} = - i H_1$ über zu

$$i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = (e^2 \mathfrak{H}_2 + e^3 \mathfrak{H}_3' + e^4 \mathfrak{H}_4' - e^4 W') \Psi' \tag{5'}$$

mit denselben Bezeichnungen wie oben.

Die Transformation 2. Ordnung ist hier insofern einfacher als im Impulsraum, als wir die Elemente auf der Energieschale in $\mathfrak{H}_2$ auch wegschaffen können. Wir nützen diese Möglichkeit aus und fordern also:

$$\Psi' = e^{e^2 T} \Psi''; \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = - i \mathfrak{H}_2 .$$

Damit erhalten wir

$$i \frac{\partial \Psi''}{\partial t} = (e^3 \mathfrak{H}_3' + e^4 \mathfrak{H}_4 - e^4 W') \Psi'' . \tag{6'}$$

Wegen $T(\infty) - T(-\infty) = - 2 \pi i \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_2 \neq 0$ enthält diese Transformation dabei zusätzlich zur Umdefinition der Felder noch eine echte Streuung, als Ersatz für den verlorengegangenen Term $\underline{\mathfrak{H}}_2$ in (6).

Das uns interessierende $\underline{\mathfrak{H}}_4$ ist hier gegeben durch

$$2 \pi \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} d t \cdot \mathfrak{H}_4$$

wobei $\hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4$ mit $\underline{\mathfrak{H}}_4$ zusammenhängt durch

$$(k \mid \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4 \mid l) = (k \mid \underline{\mathfrak{H}}_4 \mid l) \, \delta (E_k - E_l).$$

§ 3. Eichinvarianz.

Ein wesentlich nicht-lorentzinvarianter Zug kommt in die Theorie herein durch die Elimination der longitudinalen Komponenten des Strahlungsfeldes mit Hilfe der Nebenbedingung zur Erhaltung der Eichinvarianz. Die Wechselwirkung lautet dann:

$$e H_1 + e^2 H_2' = -\int d^3 x\, j_\mu(x)\, \mathfrak{A}_\mu(x) + \frac{1}{8\pi}\int d^3 x \int d^3 x' \,\frac{\varrho(x)\,\varrho(x')}{|x-x'|} \tag{8}$$

wo $\mathfrak{A}_\mu(x)$ das transversale Viererpotential:

$$\mathfrak{A}_4 = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

$j_\mu(x)$ der Strom des Elektronenfeldes ($\varrho = -i j_4$) bedeuten. Das Vakuum bezüglich der Photonen ist definiert durch $\mathfrak{A}_\mu^{(+)}.\,\Psi_{\text{Vac}} = 0$ wo $\mathfrak{A}_\mu^{(+)}$ den Anteil von $\mathfrak{A}_\mu$ mit positiven Frequenzen bedeutet.

Wir wollen nun zeigen, dass wir für unser Problem die richtigen Resultate erhalten, wenn wir die longitudinalen Photonen nicht eliminieren, die Nebenbedingung vernachlässigen und das Vakuum als den Zustand definieren, in welchem weder transversale noch longitudinale Photonen vorhanden sind; d. h. wenn wir als Wechselwirkung ansetzen:

$$e \tilde{H}_1 = -\int d^3 x\, j_\mu(x)\, A_\mu(x); \qquad e^2 \tilde{H}_2' = 0 \tag{9}$$

wo nun $A_\mu(x)$ das vollständige Viererpotential bedeutet und das Vakuum definiert ist durch $A_\mu^{(+)}.\,\Psi_{\text{Vac}} = 0$.

Zu beweisen ist also, dass, wenn wir die im Strahlungsfeld bilinearen Terme in $\hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4$ — die allein zum Comptoneffekt beitragen — mit $\hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4^C$ bezeichnen, und falls aus (8) folgt

$$2\pi\, \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4^C = \int d^4 x \int d^4 x'\, J_{\mu\nu}(x, x')\,\{\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x')\}; \tag{10}$$

wo

$$\{A, B\} \equiv AB + BA$$

und aus (9)

$$2\pi\, \hat{\tilde{\underline{\mathfrak{H}}}}_4^C = \int d^4 x \int d^4 x'\, \tilde{J}_{\mu\nu}(x, x')\,\{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \tag{11}$$

gilt:

$$J_{\mu\nu}(x, x') = \tilde{J}_{\mu\nu}(x, x'). \tag{12}$$

Das bedeutet gleichzeitig die Invarianz unseres Resultates gegenüber Umeichung des realen Strahlungsfeldes, da die Eichung von A_μ freibleibt.

Der Beweis verläuft im wesentlichen folgendermassen: Die Vertauschungsrelationen der Potentiale sind:

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\,\delta_{\mu\nu} D(x-x') \tag{13}$$

$$[\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x')] = i\,\delta_{\mu\nu} D(x-x') + 2i\,\frac{\partial D_\mu(x-x')}{\partial x_\nu'}\,. \tag{14}$$

Die Vakuumerwartungswerte der symmetrisierten Produkte:

$$\langle\{A_\mu(x), A_\nu(x')\}\rangle_{\mathrm{Vac}} = \delta_{\mu\nu} D^1(x-x') \tag{15}$$

$$\langle\{\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x')\rangle_{\mathrm{Vac}} = \delta_{\mu\nu} D^1(x-x') + 2\,\frac{\partial D^1_\mu(x-x')}{\partial x_\nu'}\,, \tag{16}$$

D, D^1 sind die invarianten D-Funktionen zur Masse Null in der Bezeichnung von SCHWINGER[3]), während D_μ und D^1_μ folgendermassen definiert sind:

$$\left.\begin{aligned} D_\mu(x) &= +\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{d^3\varkappa}{2\,|\vec{\varkappa}|}\,\frac{\varkappa_\mu}{|\vec{\varkappa}|^2}\cos(\varkappa x)\,;\quad (\varkappa x) = \vec{\varkappa}\vec{x} - |\vec{\varkappa}|\,x_0 \\ D^1_\mu(x) &= +\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{d^3\varkappa}{2\,|\vec{\varkappa}|}\,\frac{\varkappa_\mu}{|\vec{\varkappa}|^2}\sin(\varkappa x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die einzigen im Folgenden verwendeten Eigenschaften derselben sind:

$$\left.\begin{aligned} D_\mu(x) &= D_\mu(-x) \\ D^1_\mu(x) &= -D^1_\mu(-x) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

und

$$\left.\begin{aligned} D_4(x) &= \begin{cases} \dfrac{i}{8\pi\,|\vec{x}|} & \text{ausserhalb des Lichtkegels} \\ 0 & \text{innerhalb des Lichtkegels} \end{cases} \\ D_k(x) &= \begin{cases} \dfrac{x_0}{8\pi}\,\dfrac{x_k}{|\vec{x}|^3} & \text{ausserhalb des Lichtkegels} \\ 0 & \text{innerhalb des Lichtkegels} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Damit wird zunächst

$$\mathfrak{H}_2 = H_2 + \frac{1}{2i}\int d x_0'\,\Theta(x-x')\,[H_1(x_0), H_1(x_0')]$$

wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & (x_0 > 0) \\ 1 & (x_0 < 0) \end{cases}\,;$$

$$S = \frac{1}{i}\int d x_0'\,\Theta(x-x')\,H_1(x_0'):\quad S(-\infty) = 0\,.$$

Setzen wir hierin ein

$$[j_\mu(x)\,\mathfrak{A}_\mu(x)\,,\; j_\nu(x')\,\mathfrak{A}_\nu(x')] =$$
$$= \frac{1}{2}\{j_\mu(x), j_\nu(x')\}\Big(i\,\delta_{\mu\nu}\,D(x-x') + 2\,i\,\frac{\partial D_\mu(x-x')}{\partial x_\nu'}\Big)$$
$$+ \frac{1}{2}[j_\mu(x)\,,\; j_\nu(x')]\{\mathfrak{A}_\mu(x)\,,\;\mathfrak{A}_\nu(x')\}$$

so können wir durch partielle Integration die Ableitung von D_μ auf Θ abwälzen:

$$+\frac{1}{2}\int d^3x\int d^4x'\,\Theta(x-x')\{j_\mu(x), j_\nu(x')\}\frac{\partial D_\mu(x-x')}{\partial x_\nu'}$$
$$\Big(\text{wegen } \frac{\partial j_\nu(x')}{\partial x_\nu'} = 0\Big)$$
$$= +\frac{1}{2}\int d^3x\int d^4x'\,\delta(x_0-x_0')\{j_\mu(x), \varrho(x')\}D_\mu(x-x')$$
$$= -\frac{1}{8\pi}\int d^3x\int d^3x'\,\frac{\varrho(x)\,\varrho(x')}{|\,x-x'\,|}\,.$$

Dieser Term kompensiert genau die Coulomb-Wechselwirkung und wir verbleiben mit

$$\mathfrak{H}_2 = +\frac{1}{4}\int d^3x\int d^4x'\,\Theta(x-x')\{j_\mu(x), j_\nu(x')\}D(x-x')$$
$$+\frac{1}{4\,i}\int d^3x\int d^4x'\,\Theta(x-x')\,[j_\mu(x), j_\nu(x')]\{\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x')\} \tag{20}$$

während man aus (9) erhält:

$$\tilde{\mathfrak{H}}_2 = +\frac{1}{4}\int d^3x\int d^4x'\,\Theta(x-x')\{j_\mu(x), j_\nu(x')\}D(x-x')$$
$$+\frac{1}{4\,i}\int d^3x\int d^4x'\,\Theta(x-x')\,[j_\mu(x), j_\nu(x')]\{A_\mu(x), A_\nu(x')\}\,. \tag{20'}$$

Rechnen wir unter Verwendung dessen nun $J_{\mu\nu} - \tilde{J}_{\mu\nu}$ aus, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form

$$\int d^4x''\int d^4x'''\,S_{\sigma\varrho\nu\mu}\,\frac{\partial D_\sigma(x''-x''')}{\partial x_\varrho''} + \int d^4x''\int d^4x'''\,S'_{\sigma\varrho\nu\mu}\,\frac{\partial D_\sigma^1(x''-x''')}{\partial x_\varrho''}\,.$$

Dabei sind $S_{\sigma\varrho\nu\mu}$, $S'_{\sigma\varrho\nu\mu}$ Summen von Termen von folgendem Bau: ein Produkt dreier Θ mal einem aus $j_\mu(x)$, $j_\nu(x')$, $j_\varrho(x'')$, $j_\sigma(x''')$ gebildeten Kommutator. Diese Ausdrücke lassen sich zunächst in x, x' symmetrisieren; ferner, wegen der Symmetrieeigenschaften von D_μ und D_μ^1, kann man bezüglich x'' und x''' im ersten Integral antisymmetrisieren, im zweiten symmetrisieren. Wir dürfen also $S_{\sigma\varrho\nu\mu}$ ersetzen durch $S_{[\sigma\varrho](\nu\mu)}$, $S'_{\sigma\varrho\nu\mu}$ durch $S'_{(\sigma\varrho)(\nu\mu)}$, wobei runde Klammern Symmetrisierung, eckige Antisymmetrisierung an-deuten. Schliesslich lassen sich solche Produkte dreier Θ — die eine Grössenbeziehung zwischen den x^i festlegen — linear aus vierundzwanzig Basisgrössen $\Theta\,(iklm)$ aufbauen, wo $\Theta\,(iklm) = 1$, wenn $x^i < x^k < x^l < x^m$, sonst $= 0$ ist. Zum Beispiel ist

$$\Theta(x-x')\,\Theta(x-x'')\,\Theta(x-x''') = \Theta(0123)+\Theta(0213)+\Theta(0231).$$

Führen wir diese Zerlegung nach der Basis durch, so erhalten wir vierundzwanzig Terme von der Form

$$\int d^4x'' \int d^4x''' \,\Theta(i\,k\,l\,m)\, S^{(i\,k\,l\,m)}_{[\sigma\,\varrho]\,(\nu\,\mu)} \frac{\partial D_\sigma(x''-x''')}{\partial x_\varrho''} + \int d^4x'' \int d^4x''' \,\Theta(i\,k\,l\,m)\, S'^{(i\,k\,l\,m)}_{(\sigma\,\varrho)\,(\nu\,\mu)} \frac{\partial D^1_\sigma(x''-x''')}{\partial x_\varrho''}\,.$$

Nun können wir partiell integrieren; infolge der Kontinuitätsgleichung für die Ströme wälzt sich dabei die Differentiation nur auf Θ ab. Das liefert z. B.

$$\frac{\partial\,\Theta\,(3012)}{\partial x_\varrho''} = +\,\delta_{\varrho 4}\,\Theta(301)\,\delta\,(x_0'-x_0'')\,. \tag{21}$$

Fasst man jetzt alle Terme, die zu einer bestimmten Permutation von (301) — z. B. (301) — gehören, zusammen, so findet man, dass sich alle auftretenden Kommutatoren mit Hilfe der Jacobischen Identität derart zusammenfassen lassen, dass $[j_\nu(x')\,,\,j_\varrho(x'')]$ als Faktor erscheint. Wegen des Faktors $\delta_{\varrho 4}\,\delta\,(x_0'-x_0'')$ in (21) ergibt das $[j_\nu\,(\vec{x}\,',\,x_0'),\,j_4(\vec{x}\,'',\,x_0')]$. Für diesen Kommutator, der auch im Problem der Vakuumpolarisation auftritt, findet man leicht

$$[j_\nu(x'),j_\varrho(x'')]\;\delta_{\varrho 4}\,\delta(x_0'-x_0'') = (\bar\psi(x')\gamma^\nu\psi(x'')-\bar\psi(x'')\gamma^\nu\psi(x'))\,\delta^4(x'-x'').$$

Davon verschwindet der „Einteilchenterm“ ([3]), da der Einteilchenterm von $\bar\psi_\alpha(x')\,\psi_\beta\,(x'')$ bei $x' = x''$ regulär ist. Der Vakuumerwartungswert hingegen ist zunächst unbestimmt

$$\left(\text{nämlich formal} = \frac{\partial\,\Delta^1\,(x'-x'')}{\partial x_\nu'}\;\delta^4(x'-x'')\right),$$

muss aber aus physikalischen Gründen zu Null limitiert werden (vgl. [7])). In diesem Sinne dürfen wir also setzen

$$[j_\nu(\vec{x}\,',\,x_0'),\,j_4(\vec{x}\,'',\,x_0')] \underset{=}{\rightarrow} 0\,.$$

Damit verschwindet unser Integral. Dasselbe gilt für den zweiten Term und ebenso für jede beliebige Permutation von (301). Damit ist (12) bewiesen.

§ 4. Rechnung im Impulsraum.

Nach dem in § 2 angegebenen Schema führen wir zunächst die Rechnung im Impulsraum durch. Auf Grund der Resultate des § 3 brauchen wir dabei keine Coulomb-Wechselwirkung einzuführen, so dass $H_2 = - W$ wird. Einfachheitshalber verwenden wir den Formalismus der Störungstheorie im diskreten Spektrum (indem wir etwa unser System in einen grossen Kasten eingeschlossen denken) und führen später den Grenzübergang zum kontinuierlichen Spektrum aus. Die Zustände numerieren wir symbolisch durch einfache Indizes $k, l, m, \ldots$

In der speziellen Darstellung, in welcher H_0 diagonal ist:

$$(k \mid H_0 \mid l) = E_k \cdot (k \mid 1 \mid l)$$

wird

$$(k \mid S \mid l) = \frac{(k \mid H_1 \mid l)}{E_l - E_k}$$

$$(k \mid T \mid l) = \frac{(k \mid \mathfrak{H}_2 \mid l)}{E_l - E_k} \; (E_l \neq E_k)\,; = 0 \; (E_l = E_k).$$

Rechnen wir damit das $\mathfrak{H}_4$ aus, so erhalten wir nach einfacher Zusammenfassung der Energienenner:

$$
\begin{aligned}
(k \mid \mathfrak{H}_4 \mid l) = &+ \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ E_{n_2} \neq E_k \\ n_1 \neq n_3}} \frac{(k \mid H_1 \mid n_1)(n_1 \mid H_1 \mid n_2)(n_2 \mid H_1 \mid n_3)(n_3 \mid H_1 \mid l)}{(E_k - E_{n_1})(E_k - E_{n_2})(E_k - E_{n_3})} && \text{(a)} \\
&- \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ E_{n_2} \neq E_k}} \left\{ \frac{(k|W|n_2)(n_2|H_1|n_3)(n_3|H_1|l)}{(E_k - E_{n_2})(E_k - E_{n_3})} + \frac{(k|H_1|n_1)(n_1|H_1|n_2)(n_2|W|l)}{(E_k - E_{n_1})(E_k - E_{n_2})} \right\} && \text{(b)} \\
&- \sum_{n_1 \neq n_3} \frac{(k \mid H_1 \mid n_1)(n_1 \mid W \mid n_3)(n_3 \mid H_1 \mid l)}{(E_k - E_{n_1})(E_k - E_{n_3})} && \text{(b')} \\
&- \sum_{m} \frac{(k \mid H_1 \mid m)(m \mid H_1 \mid l)}{(E_k - E_m)^2} \left\{ (k|\mathfrak{H}_2|k) + (l|\mathfrak{H}_2|l) - 2(m|\mathfrak{H}_2|m) \right\} && \text{(c)} \\
&- \frac{1}{2} \sum_{m, p} \frac{(k \mid H_1 \mid m)(m \mid H_1 \mid l)}{E_k - E_m} \left\{ \left| \frac{(k \mid H_1 \mid p)}{E_k - E_p} \right|^2 + \left| \frac{(l \mid H_1 \mid p)}{E_l - E_p} \right|^2 \right\} && \text{(d)} \\
&- \sum_{\substack{m, n \\ E_k \neq E_k}} \frac{(k \mid H_1 \mid m)(m \mid H_1 \mid n)(n \mid H_1 \mid m)(m \mid H_1 \mid l)}{(E_k - E_m)(E_k - E_n)(E_m - E_n)}\,. && \text{(e)} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Dabei sind Summationsbeschränkungen der Art $E_n \neq E_k$ beim Übergang zum kontinuierlichen Spektrum so zu interpretieren, dass über den betreffenden Pol des Integranden der Hauptwert genommen werden soll.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die Terme zu diskutieren, die zu selbstenergieartigen Divergenzen Anlass geben, das sie kompensierende W aufzusuchen und zu zeigen, dass sich dieses tatsächlich als reine Massenrenormalisation darstellt. Zu diesem Zwecke haben wir zunächst die oben nur symbolisch dargestellten Matrixelemente aufzuschreiben. Machen wir in gewohnter Weise eine Fourierzerlegung der Felder:

$$\text{Spinorfeld:}\ \psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\sigma=1}^{4} \int d^3 p\, a_\sigma(\vec{p})\, u_\sigma(\vec{p})\, e^{i(\vec{p}\vec{x} - E_\sigma t)} \tag{23}$$

wo

$E_\sigma = \pm\, \omega(\vec{p});\ \omega(\vec{p}) = \overset{+}{\sqrt{m^2 + p^2}}$

$\sum_{\sigma=1}^{4}$ = Summation über Spin und Energievorzeichen,

$u_\sigma(\vec{p})$ = normierte Spinoren

$a_\sigma(\vec{p})$ = Absorptionsoperatoren:

$$\{a_{\sigma'}(\vec{p}\,'),\, a_\sigma(\vec{p})\} = 0$$
$$\{a_{\sigma'}(\vec{p}\,'),\, a_\sigma(\vec{p}\,')\} = \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta(\vec{p} - \vec{p}\,')$$

$$\text{Strahlungsfeld:}\ A_\mu(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\sigma=1}^{4} \int \frac{d^3 \varkappa}{\sqrt{2\varkappa}} \{A_s(\vec{\varkappa}) e_\mu^s e^{i(\vec{\varkappa}\vec{x} - \varkappa t)} + A_s^*(-\vec{\varkappa})\, e_\mu^s\, e^{-i(\vec{\varkappa}\vec{x} - \varkappa t)}\} \tag{24}$$

wo

$$\varkappa = |\vec{\varkappa}|$$

$\sum_s$ = Summation über die Polarisationsrichtungen,

$e_\mu^s(\vec{\varkappa}) = e_\mu^s(-\vec{\varkappa})$ = Polarisationsvektoren:

$$\sum_\mu e_\mu^s(\vec{\varkappa})\, e_\mu^{s'}(\vec{\varkappa}) = g^{ss'} = \begin{cases} 0\ (s \neq s') \\ +1\ (s = s' = 1, 2, 3) \\ -1\ (s = s' = 0) \end{cases}$$

$A_s(\vec{\varkappa})$ = Absorptionsoperatoren:

$$[A_s(\vec{\varkappa}),\, A_{s'}(\vec{\varkappa}\,')] = 0$$
$$[A_s^*(\vec{\varkappa}),\, A_{s'}(\vec{\varkappa}\,')] = -\,\delta_{ss'}\, \delta(\vec{\varkappa} - \vec{\varkappa}\,')$$

so erhalten wir leicht aus $e H_1 = -\int d^3 x\, j_\mu A_\mu$ mit $j_\mu = e\,(\psi^* \alpha_\mu \psi)$

und unter Weglassen der Zeitfaktoren:

$$H_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\sigma'\sigma s} \sum_{\mu=1}^{4} \int \frac{d^3\varkappa}{\sqrt{2\varkappa}} \int d^3 p \int d^3 p' \\ \{\delta(\vec{p} - \vec{p}\,' - \vec{\varkappa}) \left(u_\sigma^*(\vec{p})\, \alpha_\mu e_\mu^s(\vec{\varkappa})\, u_{\sigma'}(\vec{p}\,')\right) a_\sigma^*(\vec{p})\, a_{\sigma'}(\vec{p}\,') A_s(\vec{\varkappa}) \\ + \delta(\vec{p} - \vec{p}\,' + \vec{\varkappa}) \left(u_\sigma^*(\vec{p})\, \alpha_\mu e_\mu^s(\vec{\varkappa})\, u_{\sigma'}(\vec{p}\,')\right) a_\sigma^*(\vec{p})\, a_{\sigma'}(\vec{p}\,')\, A_s^*(\vec{\varkappa})\}. \tag{25}$$

Das Vakuum ist zu definieren als:

$$A_s(\vec{\varkappa}) \cdot \Psi_{\text{Vac}} = 0 \text{ bezüglich des Strahlungsfeldes}$$

$$\left.\begin{aligned} a_\sigma(\vec{p}) \cdot \Psi_{\text{Vac}} &= 0\,(E_\sigma > 0) \\ a_\sigma^*(\vec{p}) \cdot \Psi_{\text{Vac}} &= 0\,(E_\sigma < 0) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{für das Spinorfeld im Sinne}\\ \text{der Löchertheorie.}\end{array}$$

Nun zur Diskussion der selbstenergieartigen Divergenzen. Es treten dabei folgende Termtypen auf:

1. Terme mit einer Integration über zwei unabhängige virtuelle Zwischenzustände. Es sind dies Terme in (a) und (e), bei welchen neben der gewünschten Comptonstreuung virtuell ein Elektron-Positron-Paar und ein Photon erzeugt und wieder vernichtet werden. Diese Terme kompensieren sich bis auf gewisse konvergente Restterme, die von der Modifikation des Vakuums durch die bei der Comptonstreuung reell und virtuell vorhandenen Teilchen herrühren.

2. Terme, in denen ein (reelles oder virtuelles) Elektron ein Photon emittiert und später wieder absorbiert: sie kompensieren sich exakt in (a) und (b).

3. Die Terme (c).

4. Paarterme, d. h. Terme, in denen das Vakuum in einem zweistufigen Übergang virtuell ein Paar mit verschwindendem Gesamtimpuls erzeugt: solche treten nur in (a) auf.

5. Die Terme (b) + (b').

Man sieht zunächst ohne weiteres, dass die Terme (c) wegfallen, wenn die Diagonalterme von W genau die Selbstenergie von Elektronen und Photonen im betreffenden Zustand darstellen. Von der Photonselbstenergie weiss man zwar aus Gründen der Eichinvarianz, dass sie verschwinden muss, und dies liefert ja gerade eines der Hauptkriterien für ein sinnvolles Limitierungsverfahren (vgl. [7]) und § 8). Um uns aber mit solchen tieferliegenden Fragen hier nicht zu belasten, werden wir in W auch die Photonselbstenergie mitbegreifen, ohne damit etwas Neues einzuführen, da sie, wenn nicht formal im Impulsraum, so doch physikalisch verschwindet.

Für den Selbstenergieoperator setzen wir also an:

$$W = W_e + W_\pi \tag{26}$$

wo W_π eine Photonselbstenergie ist: $W_\pi = \text{const.} \int d^3 x \cdot A_\mu(x) A_\mu(x)$, auf die wir nicht näher einzugehen brauchen, und

$$W_e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3 p \int \frac{d^3 \varkappa}{2\varkappa}$$

$$\times \left(u_\sigma^*(\vec{p})\, \Lambda\, u_{\sigma'}(\vec{p}\,')\right) a_\sigma^*(\vec{p})\, a_{\sigma'}(\vec{p}\,') + \text{conj.} \tag{27}$$

$$\Lambda \equiv \sum_{\lambda=1}^{4} \left\{ \frac{\alpha_\lambda \dfrac{\vec{\alpha}(\vec{p}-\vec{\varkappa}) + \beta m + \omega(\vec{p}-\vec{\varkappa})}{2\,\omega(\vec{p}-\vec{\varkappa})} \alpha_\lambda}{E_\sigma(\vec{p}) - \omega(p-\vec{\varkappa}) - |\vec{\varkappa}|} + \frac{\alpha_\lambda \dfrac{\vec{\alpha}(\vec{p}-\vec{\varkappa}) + \beta m - \omega(\vec{p}-\vec{\varkappa})}{-2\,\omega(\vec{p}-\vec{\varkappa})} \alpha_\lambda}{E_\sigma(\vec{p}) + \omega(p-\vec{\varkappa}) + |\vec{\varkappa}|} \right\}$$

der von WEISSKOPF und FRENCH[4]) eingeführte Selbstenergieoperator des Elektrons ist. Mit dieser Wahl verschwinden die Diagonalelemente von $\mathfrak{H}_2$, d. h. die Terme (c), und die Paarterme in (a) kompensieren sich gegen den divergenten Anteil von (b) + (b').

Der Operator (27) hat zwar nicht die Form einer reinen Massennormalisation, die lauten würde:

$$W_e = \text{const.} \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3 p \left(u_\sigma^*(\vec{p})\, \beta\, u_{\sigma'}(\vec{p}\,')\right) a_\sigma^*(\vec{p})\, a_{\sigma'}(\vec{p}\,') \tag{28}$$

und man sieht auch leicht, dass ein Ansatz der Form (28) nicht imstande ist, sämtliche Divergenzen zu kompensieren. Es wäre indessen falsch, zu verlangen, dass die Selbstenergie in unserem unrelativistischen Formalismus die Form (28) haben müsse. Das Einzige, was wir fordern dürfen, ist, dass sie durch konsistente Limitierung in die Form (28) gebracht werden kann, was für (27) zutrifft. (Vgl. [4]) und § 5). Ausserdem ist es nur konsequent, den Selbstenergieoperator so zu übernehmen, wie er sich im Sinne der verwendeten Störungstheorie ergibt, d. h. eben in der Form (27).

Nachdem auf diese Weise die selbstenergieartigen Divergenzen eliminiert sind, besteht unsere nächste Aufgabe darin, sämtliche verbleibenden Terme durch Aufsuchen aller möglichen Zwischenzustände aufzuschreiben und zusammenzufassen. Das Resultat dieser sehr langwierigen Rechnung ist eine Formel, die immer noch mehrere Druckseiten füllt und deshalb hier nicht wiedergegeben werden kann. Untersucht man die noch darin steckenden Divergenzen bei hohen Impulsen, so findet man, dass sie alle die Form haben: $C \cdot \mathfrak{H}_2$, wo C ein von den Impulsen der Teilchen unabhängiges divergentes Integral darstellt. Man kann sie also als Renormalisation der Ladung interpretieren und subtrahieren; die exakte Determinierung des zu subtrahierenden Ausdrucks werden wir unten vornehmen[11]).

Ausser den bisher allein erwähnten Divergenzen bei hohen Impulsen enthält unser Ausdruck noch einen nicht-integrablen Pol im Integranden, d. h. eine Ultrarotkatastrophe. Dass dieselbe keine Schwierigkeit darstellt, ist wohlbekannt[5][6]. Der Grund ist folgender: Bei jedem Streuprozess werden in Wirklichkeit ausser dem gestreuten Photon noch unendlich viele Lichtquanten beliebig kleiner Energie emittiert, so dass die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass genau nur das gestreute Photon emittiert wird, physikalisch keinen Sinn hat. Einzig sinnvoll ist die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass das gestreute Quant in einem bestimmten Raumwinkelelement $d\,\Omega$ liegt und ausser ihm kein anderes von einer Energie $> \mu$ emittiert wird, wo μ eine Grenzenergie darstellt, für die $e^2 \log(\varkappa_1/\mu) \ll 1$ gelten muss. ($\vec{\varkappa}_1$ = Impuls des Streuphotons). (Vgl. dazu § 9 und [6].) Zu unserer e^6-Näherung für den Compton-Querschnitt haben wir also noch den Wirkungsquerschnitt für den Doppelcomptoneffekt zu addieren, bei dem das zweite emittierte Photon $< \mu$ ist: dieser ist nämlich ebenfalls $\sim e^6$. Er beträgt für $\mu \ll \varkappa_1$:

$$d\sigma''(\mu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_{\lambda=1}^{4} \int\limits_{|\vec{\varkappa}|<\mu} \frac{d^3\varkappa}{|\vec{\varkappa}|} \left\{\frac{p_0^\lambda}{(p_0\varkappa)} - \frac{p_1^\lambda}{(p_1\varkappa)}\right\}^2 \cdot d\sigma_4 \tag{29}$$

wo $d\sigma_4$ der Klein-Nishina-Querschnitt, $(p\varkappa) = \vec{p}\vec{\varkappa} - \omega(\vec{p})|\vec{\varkappa}|$ ist. Dies kompensiert, wie man leicht nachrechnet, genau die durch $\underline{\mathfrak{H}}_4$ in die e^6-Korrektur zum Compton-Querschnitt hereingebrachte Divergenz beim Pol des Integranden. Formal kann man die Addition von $d\sigma''(\mu)$ zum Compton-Wirkungsquerschnitt so durchführen dass man den Pol im Integranden von $\underline{\mathfrak{H}}_4$ dadurch wegschafft, dass man dem virtuellen Photon die Masse μ erteilt, d. h. einfach $|\varkappa|$ durch $\overset{+}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}}$ ersetzt, mit der Abmachung, alle Terme $\leqq 0(\mu)$ zu vernachlässigen. Das so erhaltene $\underline{\mathfrak{H}}_4(\mu)$ bestimmt dann direkt $d\sigma_6 + d\sigma''(\mu) \equiv d\sigma_6(\mu)$. Diese Bemerkung wird uns später noch von Nutzen sein.

Nachdem so die Ultrarotschwierigkeiten eliminiert sind, können wir die genaue Form der Ladungsrenormalisation festlegen durch die von Corinaldesi und Jost[2]) aufgestellte Forderung, dass im unrelativistischen Grenzfall die Korrekturen verschwinden sollen. Dies bedeutet physikalisch, dass wir die Thomsonformel als Definition der Elementarladung ansehen.

Wir subtrahieren also von $d\sigma_6(\mu)$ ein solches Vielfaches von $d\sigma_4$, dass nachher $d\sigma_6(\mu) \to 0$ für $\vec{\varkappa}_0 \to \vec{p}_0$. Damit erhalten wir für unser definitives Matrixelement im Impulsraum:

$$\mathfrak{H}_4(\mu;\, \vec{p}_0, \vec{\varkappa}_0; \vec{p}_1, \vec{\varkappa}_1) - \mathfrak{H}_4(\mu; \vec{p}_0, \vec{p}_0; \vec{p}_0, \vec{p}_0) \tag{30}$$

wobei: $\vec{p}_0$ = Impuls des Anfangselektrons
$\vec{p}_1$ = „ „ Endelektrons
$\vec{\varkappa}_0$ = „ „ Anfangsphotons
$\vec{\varkappa}_1$ = „ „ Endphotons

§ 5. Übergang zum Ortsraum, Lorentzinvarianz.

Die mit der in § 4 skizzierten Methode gefundene Formel für $\mathfrak{H}_4(\mu)$ zeichnet ein Bezugssystem aus, und es erwächst uns die Aufgabe, dieselbe in lorentzinvariante Form umzuschreiben. Vorteilhafterweise gehen wir hierzu wieder auf das $\mathfrak{H}_4$ zurück, in welchem Ladungsrenormalisation und Ultrarotkatastrophe noch enthalten sind, und diskutieren dann dieselben am Schluss analog zu oben.

Wir werden in diesem Paragraphen $\mathfrak{H}_4$ in den Ortsraum transformieren, wo die Lorentzinvarianz beinahe evident ist. Gleichzeitig erreichen wir damit den Anschluss an den Schwingerschen Formalismus. Zu dieser Transformation benötigen wir die in § 4 angegebenen Fourierdarstellungen der Felder und jene der invarianten D- und S-Funktionen[3]); des weiteren die Gleichung

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega}\, e^{-i\omega t} = -i\pi \frac{t}{|t|} \equiv -i\pi\, \varepsilon(t) \tag{31}$$

zur Transformation der Energienenner. P vor dem Integral bedeutet, dass man über den Pol bei $\omega = 0$ den Hauptwert zu nehmen hat, was genau der Summationsbeschränkung in (21) entspricht. Ausserdem ist zu beachten:

$$\int \frac{d^3 p}{2\,\omega(\vec{p})} \left[F(\vec{p}, +\omega(\vec{p})) + F(\vec{p}, -\omega(\vec{p}))\right]$$
$$= \int d^4 p\, \delta(p_\nu p^\nu + m^2)\, F(\vec{p}, p_0)\,. \tag{32}$$

Um ein Beispiel für diese Art von Rechnung zu geben, führen wir die Transformation des Selbstenergieoperators W_e in (27) durch: Wir schreiben ihn zunächst

$$W_e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\mu=1}^{4} \int d^3 p \int d^3 p'' \int \frac{d^3 p'}{2\,\omega(p')} \int \frac{d^3 \varkappa}{2\,\varkappa}\, \delta^3(\vec{p}\,'' - \vec{p})$$
$$\times\, \delta^3(\vec{p}\,'' - \vec{\varkappa} - \vec{p}\,')\, a_\sigma^*(\vec{p})\, a_{\sigma'}(\vec{p}\,'')$$
$$\times \left(u_\sigma^*(\vec{p})\, \alpha_\mu \left[\frac{\vec{\alpha}\,\vec{p}\,' + \beta m + \omega(p')}{p_0'' - \omega(p') - \varkappa} - \frac{\vec{\alpha}\,\vec{p}\,' + \beta m - \omega(p')}{p_0'' + \omega(p') + \varkappa}\right] \alpha_\mu\, u_{\sigma'}(\vec{p}\,'')\right) + \text{conj.}$$

Geht man von den α-Matrizen zu den γ über mit

$$u^* = \bar{u}\,\gamma^4; \quad \beta = \gamma^4, \quad \alpha_\mu = i\,\gamma^4\,\gamma^\mu$$

so kann man W_e offenbar schreiben:

$$W_e = +\frac{i}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\mu=1}^{4} \int d^3 p \int d^3 p'' \int d^4 p' \int d^4 \varkappa\, \delta(\varkappa_\varrho \varkappa^\varrho)\, \delta(p'_\nu p'^\nu + m^2)$$
$$\times \frac{\delta^3(\vec{p}\,'' - \vec{p}\,' - \vec{\varkappa})}{p_0'' - p_0' - \varkappa_0}\, \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,'') \times \frac{1}{2}[\varepsilon(\varkappa_0) + \varepsilon(p_0')]\left(\bar{u}_\sigma(p)\,\gamma^\mu(\gamma^\lambda p'_\lambda + i m)\right.$$
$$\left.\times\, \gamma^\mu u_{\sigma'}(p'')\right) a_\sigma^*(p)\, a_{\sigma'}(p'') + \text{conj.}$$

Durch Fourieranalyse der beiden dreidimensionalen δ-Funktionen und des Energienenners nach (31) wird dies

$$W_e = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^9 \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\mu=1}^{4} \int d^3 \xi \int d^4 \eta \int d^3 p \int d^3 p'' \int d^4 p' \int d^4 \varkappa\, \delta(\varkappa_\varrho \varkappa^\varrho)$$
$$\times\, \delta(p'_\nu p'^\nu + m^2)[\varepsilon(\varkappa_0) + \varepsilon(p_0')]\left(\bar{u}_\sigma(p)\,\gamma^\mu(\gamma^\lambda p'_\lambda + i m)\,\gamma^\mu u_{\sigma'}(p'')\right)$$
$$\times\, a_\sigma^*(p)\, a_{\sigma'}(p'')\, \varepsilon(\eta_0)\, e^{i(\varkappa + p' - p'')_\alpha \eta^\alpha}\, e^{i(p - p'')_\beta \xi^\beta} + \text{conj.}$$

wobei wir noch die Zeitabhängigkeit beigefügt haben, im Sinne des Übergangs zur interaction representation. Dies ist unter Beachtung der Definition der D- und S-Funktionen und von (23):

$$W_e = -\frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^{4} \int d^3 x \int d^4 x' \left(\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu[D_1(x - x')\,\bar{S}(x - x')\right.$$
$$\left. + \bar{D}(x - x')\, S_1(x - x')]\,\gamma^\mu\, \psi(x')\right) + \text{conj.} \tag{33}$$

womit die Transformation geleistet ist.

(33) ist genau der Einteilchenterm von $\hat{\mathfrak{H}}_2$, von dem SCHWINGER[3]) gezeigt hat, dass er durch formale Umformungen, deren Berechtigung man durch konsistente Limitierung etwa nach PAULI und VILLARS[7]) nachweisen kann (vgl. auch § 8), auf die Form einer reinen Massenrenormalisation $\delta m \int \bar{\psi}(x)\,\psi(x)\,d^3 x$ gebracht werden

kann, was die Wahl von (27) nach einer Bemerkung daselbst rechtfertigt.

Transformiert man analog zum Obigen unser $\mathfrak{H}_4$, so erhält man, mit den Bezeichnungen:

$$\left.\begin{array}{l} F(x) \equiv F(0), F(x') \equiv F(1), F(x'') \equiv F(2), F(x''') \equiv F(3) \\ F(x-x') \equiv F(01), \ldots \qquad ; \quad \varepsilon(x_0 - x_0') = \dfrac{x_0 - x_0'}{|x_0 - x_0'|} \equiv \varepsilon(01) \\ \text{Spur}\, A \equiv \langle A \rangle \end{array}\right\}$$

$$2\pi \hat{\mathfrak{H}}_4 =$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{4}\int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x''' \\ \{D_1(03)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\sigma \bar S(01)\,\gamma^\mu A_\mu(1)\,\bar S(12)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\,\bar S(23)\,\gamma^\sigma\psi(3)) \\ +\bar D(03)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\sigma S_1(01)\,\gamma^\mu A_\mu(1)\,\bar S(12)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\,\bar S(23)\,\gamma^\sigma\psi(3)) \\ +\bar D(03)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\sigma \bar S(01)\,\gamma^\mu A_\mu(1)\,S_1(12)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\,\bar S(23)\,\gamma^\sigma\psi(3)) \\ +\bar D(03)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\sigma \bar S(01)\,\gamma^\mu A_\mu(1)\,\bar S(12)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\,S_1(23)\,\gamma^\sigma\psi(3))\} \end{array}\right\} \text{I.}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}\int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x''' \\ \{D_1(13)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\bar S(01)\,\gamma^\sigma \bar S(12)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\,\bar S(23)\,\gamma^\sigma\psi(3)) \\ +\bar D(13)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\bar S(01)\,\gamma^\sigma S_1(12)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\,\bar S(23)\,\gamma^\sigma\psi(3)) \\ +\bar D(13)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\bar S(01)\,\gamma^\sigma \bar S(12)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\,S_1(23)\,\gamma^\sigma\psi(3))\} \end{array}\right\} \text{II.}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{8}\int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x'''\,\varepsilon(13)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\bar S(01)\,\gamma^\sigma \\ \times [D_1(12)\,S(12) + D(12)\,S_1(12)]\,\gamma^\sigma \bar S(23)\,\gamma^\nu A_\nu(3)\,\psi(3)) \end{array}\right\} \text{III.}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{8}\int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x'''\,\varepsilon(13)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\bar S(01)\,\gamma^\nu A_\nu(1) \\ \times \bar S(12)\,[D_1(23)\,S(23) + D(23)\,S_1(23)]\,\gamma^\sigma\psi(3)) \end{array}\right\} \text{IV.}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{4}\int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x'''\,\varepsilon(13)\,\bar D(12)\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\bar S(01) \\ \times \gamma^\sigma\psi(1))\,\langle\gamma^\sigma S(23)\,\gamma^\nu A_\nu(3)\,S_1(32)\rangle \end{array}\right\} \text{V.}$$

$$+ \text{hermitisch konjugiert.} \tag{34}$$

Dabei haben wir bereits einen Term weggelassen, nämlich:

$$\frac{1}{2}\int d^4x \int d^4x' \int d^4x'' \int d^4x'''\,(\bar\psi(0)\,\gamma^\sigma\psi(0))\,\bar D(03)\,\langle \bar S(21)\,\gamma^\mu A_\mu(1)$$
$$\bar S(13)\,\gamma^\sigma S_1(32)\,\gamma^\nu A_\nu(2) + S_1(21)\,\gamma^\mu A_\mu(1)\,\bar S(13)\,\gamma^\sigma \bar S(32)\,\gamma^\nu A_\nu(2)$$
$$+\bar S(21)\,\gamma^\mu A_\mu(1)\,S_1(13)\,\gamma^\sigma \bar S(32)\,\gamma^\nu A_\nu(2)\rangle\,.$$

*

Diesem sieht man im Impulsraum nicht ohne weiteres an, dass er verschwindet, während diese Eigenschaft im Ortsraum sofort evident ist: Man braucht nur bezüglich $(\mu, 1)$ und $(\nu, 2)$ zu symmetrisieren, worauf man sieht, dass die Spur gegenüber simultaner Umkehrung aller dreier Argumente der S-Funktionen schief ist und sich demgemäss ihre Terme gegenseitig kompensieren.

Was nun die Lorentzinvarianz des Ausdruckes (34) betrifft, so ist dieselbe für die Terme I und II ohne weiteres klar, da sie nur invariante Funktionen enthalten; bei den übrigen Termen zeichnet jedoch das freie ε noch ein Bezugssystem aus. Solche Integrale mit einem freien ε, von der Form

$$\int d^4 \xi\, \varepsilon(\xi) F(\xi)$$

sind dann invariant, wenn $F(\xi)$ ausserhalb des Lichtkegels verschwindet. (Es ist zu beachten, dass wir unter Lorentzinvarianz stets nur Invarianz gegenüber der eingeschränkten Gruppe ohne Zeitumkehr verstehen.) Wir brauchen also nur zu beweisen, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int d^4 \eta\, \bar{S}(\xi - \eta)\, \gamma^\sigma [D_1(\eta) S(\eta) + D(\eta) S_1(\eta)] \\ &= \left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} - m\right) \gamma^\sigma \Phi(\xi) \end{aligned}$$

wo $\quad \Phi(\xi) \equiv \int d^4 \eta\, \bar{\Delta}(\xi - \eta)\, [D_1(\eta) S(\eta) + D(\eta) S_1(\eta)] \quad$ (für III, IV)

und $\quad F'(\xi) = \int d^4 \eta\, \bar{D}(\xi - \eta) \langle \gamma^\sigma S(\eta) \gamma^\nu S_1(-\eta) \rangle \quad$ (für V)

ausserhalb des Lichtkegels verschwinden. Nun gilt: Eine invariante Funktion $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$, die ungerade ist: $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = -F(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$, verschwindet ausserhalb des Lichtkegels. Wir brauchen uns also nur um den geraden Teil der obigen Funktionen zu kümmern. Derjenige von Φ z. B. lässt sich schreiben

$$\frac{1}{2}[\Phi(\xi) + \Phi(-\xi)] = \gamma^\varrho \int d^4 \eta\, \bar{\Delta}(\xi - \eta) [D_1(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_\varrho} \Delta(\eta) + D(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_\varrho} \Delta_1(\eta)]$$

und dies muss aus Invarianzgründen die Form haben

$$\frac{1}{2}[\Phi(\xi) + \Phi(-\xi)] = \gamma^\varrho \frac{\partial}{\partial \xi_\varrho} \psi(\xi)$$

wo nun $\psi(\xi)$ invariant und ungerade ist, und also ausserhalb des Lichtkegels verschwindet. Damit ist die Behauptung für $\Phi(\xi)$ erwiesen, also auch für F. Für F' geht der Beweis analog.

Nachdem so die Lorentzinvarianz von (34) festgestellt ist, könnte man leicht auch die Eichinvarianz verifizieren, d. h. die Invarianz gegenüber einer Ersetzung von A_μ durch $A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}$. Da wir diese Eigenschaft über schon in § 3 bewiesen haben, gehen wir hierauf nicht näher ein.

Bevor wir zur Diskussion von (34) schreiten, skizzieren wir noch die direkte Herleitung im Ortsraum.

§ 6. Rechnung im Ortsraum.

Wir gehen mit dem in § 3 begründeten Ansatz für die Wechselwirkung

$$e H_1 \equiv e \int d^3 x\, h(x) = -\int j_\mu(x)\, A_\mu(x)\, d^3 x \tag{35}$$

wo

$$j_\mu(x) = i\, e \left(\bar{\psi}\,(x)\, \gamma^\mu\, \psi\,(x) \right)$$

in das Schema von § 2 ein. Für die Selbstenergie setzen wir ein

$$e^2 W = e^2 \int d^3 x w(x) \tag{33'}$$

mit $w(x) = -\frac{1}{4} \int d^4 x' \left(\bar{\psi}\,(0)\, \gamma^\sigma [\bar{S}\,(01)\, D_1\,(01) + S_1(01)\, \bar{D}\,(01)] \gamma^\sigma \psi(1) \right)$
$+$ conj.

NB. Auch hier gerät man in Schwierigkeiten, wenn man statt (33′) direkt eine formale Massenrenormalisation

$$w'\,(x) = \delta m \left(\bar{\psi}\,(x)\; \psi\,(x) \right)$$

mit divergentem δm ansetzt. Vgl. dazu [8]).

Für die Felder gelten die Vertauschungsrelationen

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\, \delta_{\mu\nu}\, D\,(x - x') \tag{36}$$

$$\{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} = -i\, S\,(x - x');\; \{ \psi, \psi' \} = \{ \bar{\psi}, \bar{\psi}' \} = 0 \tag{36'}$$

Dabei bedeutet, wie früher, $[A, B]$ den Kommutator, $\{A, B\}$ den Antikommutator. Ausserdem brauchen wir die Vakuumerwartungswerte:

$$(\{ A_\mu(x), A_\nu(x') \})_{\text{Vac}} = \delta_{\mu\nu}\, D_1\,(x - x') \tag{37}$$

$$([\psi\,(x), \bar{\psi}\,(x')])_{\text{Vac}} = -\, S_1\,(x - x') \tag{37'}$$

Aus $\dot{S} = -i H_1$ folgt

$$S = -\frac{i}{2} \int d^4 x'\, \varepsilon\,(01)\, h\,(1)$$

wobei wir die Integrationskonstante anders gewählt haben als in § 3, was für diesen Zweck günstiger ist. Damit:

$$\mathfrak{H}_2 = -\int d^3 x\, w(x) - \frac{i}{4}\int d^3 x \int d^4 x'\, \varepsilon(01)\, [h(0), h(1)]$$

Für T gilt: $\dot{T} = -i\,\mathfrak{H}_2$. Wir zerlegen es in zwei Anteile, wovon der eine nur $w(x)$, der andere nur $h(x)$ enthält:

$$\dot{T}_1 = -\frac{i}{2}[H_1, S]:\ T_1 = -\frac{1}{8}\int d^4 x' \int d^4 x''\, \varepsilon(01)\, \varepsilon(12)\, [h(1), h(2)]$$

$$\dot{T}_2 = +i\,W:\ T_2 = +\frac{i}{2}\int d^4 x'\, \varepsilon(01)\, w(1).$$

$\mathfrak{H}_4$ zerfällt dadurch ebenfalls in zwei Teile:

a) Terme ohne w: $\mathfrak{H}_4' = \frac{1}{8}\left[[[H_1, S], S], S\right] + \frac{1}{4}[[H_1, S], T_1]$

b) Terme mit w: $\mathfrak{H}_4'' = -\frac{1}{4}[[W, S], S] - \frac{1}{2}[W, T_1] + \frac{1}{4}[[H_1, S], T_2]$

Dabei ist ein Term $[W, T_2]$ weggelassen, da er nur eine Selbstenergie 4. Ordnung darstellt und zu unserem Problem keinen Beitrag liefert.

$\hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4'$, $\hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4''$ können durch Anwendung der Jacobischen Identität, Umnumerierung der Variablen und Zusammenfassung der auftretenden Produkte dreier ε geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\, \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4' &= \frac{i}{32}\int d^4 x \int d^4 x' \int d^4 x'' \int d^4 x''' \left[[[h(0), h(1)], h(2)], h(3)\right] \\ &\quad \times \varepsilon(01)\, \varepsilon(02)\, \varepsilon(23) \\ 2\pi\, \hat{\underline{\mathfrak{H}}}_4'' &= -\frac{1}{4}\int d^4 x \int d^4 x'' \int d^4 x''' \, [[w(0), h(2)], h(3)]\, \varepsilon(02)\, \varepsilon(23) \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

NB. Die Zusammenfassung der Produkte dreier ε ist wegen (31) materiell identisch mit der Zusammenfassung von Energienennern an entsprechender Stelle im Impulsraumformalismus; ausserdem ist sie jedoch auch formal analog. Dies beruht auf Folgendem. Die exakte Identität

$$\text{(a)} \qquad \varepsilon(ik)\, \varepsilon(il) \equiv 1 + \varepsilon(ik)\, \varepsilon(kl) - \varepsilon(il)\, \varepsilon(kl)$$

reduziert sich stets auf

$$\text{(b)} \qquad \varepsilon(ik)\, \varepsilon(il) \xrightarrow{=} \varepsilon(ik)\, \varepsilon(kl) - \varepsilon(il)\, \varepsilon(kl)$$

da die Eins im Integral wegen $\int d^4 x \cdot h(x) = 2\pi \, \underline{\mathfrak{H}}_1 = 0$ keinen Beitrag gibt. (b) ist aber identisch mit der Energienennerzusammenfassung

$$\frac{1}{E_i - E_k}\,\frac{1}{E_i - E_l} = \frac{1}{E_i - E_k}\,\frac{1}{E_k - E_l} - \frac{1}{E_i - E_l}\,\frac{1}{E_k - E_l}$$

In die Formel (38) haben wir die Ausdrücke (35), (33′) einzusetzen und mit Hilfe von

$$[j_\mu A_\mu, j'_\nu A'_\nu] = \frac{1}{2}\{j_\mu, j'_\nu\}[A_\mu, A'_\nu] + \frac{1}{2}[j_\mu, j'_\nu]\{A_\mu, A'_\nu\} \tag{39}$$

und den Gleichungen (36) die Kommutatoren auszuführen, und schliesslich vom Ganzen die „Einteilchenterme" zu bilden, unter Verwendung von (37). Diese Operationen entsprechen genau dem Aufsuchen aller Zwischenzustände im Impulsraum, sind aber bedeutend kürzer als jenes. Hierin liegt — neben der evidenten Lorentzinvarianz — der Hauptvorteil des Ortsraumformalismus gegenüber demjenigen im Impulsraum.

Anschliessend kann durch erneutes Umnumerieren der Variablen und Zusammenfassung von ε-Produkten die Formel, wieder analog dem entsprechenden Schritt im Impulsraum, weiter vereinfacht werden. Zum Schlusse erhalten wir so eine Formel, die sich von (34) nur um Terme unterscheidet, welche die Photonselbstenergie enthalten, die wir ja hier im Gegensatz zu § 4 nicht subtrahiert haben. Da diese aber, wie bereits erwähnt, aus Gründen der Eichinvarianz verschwinden resp. zu Null limitiert werden muss, was das in § 8 zugrunde gelegte Regularisierungsverfahren auch erreicht, so ist dieser Unterschied ohne Bedeutung.

§ 7. Auswertung der Formel (34).

Die Formel (34) enthält, so wie sie da steht, noch Unbestimmtheiten, da die Ausdrücke im Integranden singulär sind und je nach Art der Zusammenfassung der Terme sich ein anderes Resultat ergeben kann. In diesem Paragraphen werden wir die Auswertung formal nach einem bestimmten Verfahren durchführen, und erst in § 8 uns mit der Frage nach Rechtfertigung dieser Rechnung befassen.

Zunächst kann man zeigen, dass der Term (V) in (34) verschwindet. Unter Beachtung der Relation

$$-\varepsilon(13)\,\overline{D}(12)\,S(23) = \varepsilon(13)\,D(12)\,\overline{S}(23) + 2\,\overline{D}(12)\,\overline{S}(23)$$

kann man ihn nämlich schreiben

$$+\frac{1}{4}\int d^4x\int d^4x'\int d^4x''\int d^4x'''\{\varepsilon(13)\,D(12)+2\,\overline{D}(12)\}$$
$$\times\left(\overline{\psi}(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\overline{S}(01)\,\gamma^\sigma\psi(1)\right)<\gamma^\sigma\overline{S}(23)\,\gamma^\nu S_1(32)>A_\nu(3)\,. \quad (40)$$

Nun ist — vgl. [3]) und [7]) —

$$\delta j_\mu(x)=\int d^4x'<\gamma^\mu\overline{S}(01)\,\gamma^\nu S_1(10)>A_\nu(1)$$

der durch das Feld $A_\nu(x)$ induzierte Vakuumpolarisationsstrom, und dieser verschwindet in Anwendung auf die Schrödingerfunktion, falls $\Box A_\nu=0$, was im wesentlichen identisch ist mit dem Verschwinden der Photonselbstenergie. (40) wird also:

$$+\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4x'\int d^4x''\,\overline{D}(12)\left(\overline{\psi}(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\,\overline{S}(01)\,\gamma^\sigma\psi(1)\right)\delta j_\sigma(2)$$
$$+\frac{1}{4}\int d^4x\int d^4x'\int d^4x'''\,\varepsilon(13)\left(\overline{\psi}(0)\,\gamma^\mu A_\mu(0)\overline{S}(01)\,\gamma^\sigma\psi(1)\right)A_\nu(3)\delta j'_{\sigma\nu}(3) \quad (41)$$

wo

$$\delta j_\sigma(2)=\int d^4x'''<\gamma^\sigma\overline{S}(23)\,\gamma^\nu S_1(32)>A_\nu(3)$$
$$\delta j'_{\sigma\nu}(3)=\int d^4x''<\gamma^\sigma\overline{S}(23)\,\gamma^\nu S_1(32)>D(12)$$

resp. den vom realen und virtuellen Photonfeld induzierten Vakuumpolarisationsstrom darstellen; da beide keine Quellen haben: $\Box A_\mu=0$, $\Box D=0$, verschwinden δj_σ, $\delta j'_{\sigma\nu}$ in Anwendung auf die Schrödingerfunktion, und damit fällt (V) weg.

Zur Diskussion der übrigen Terme in (34) schreiben wir alle in die Form:

$$2\pi\,\hat{\mathfrak{H}}_4=\int d^4x\int d^4x'\int d^4x''\int d^4x'''\left(\overline{\psi}(0)\,A_\mu(1)\,K_{\mu\nu}(0123)\,A_\nu(2)\,\psi(3)\right) \quad (42)$$

wo

$$K_{\mu\nu}(0123)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{12}\int d^4q\int d^4\varkappa\int d^4\varkappa'\int d^4q'\,k_{\mu\nu}(q,\varkappa,\varkappa',q')$$
$$\times\,\delta^4(q+\varkappa-\varkappa'-q')\,e^{ixq}\,e^{ix'\varkappa}\,e^{-ix''\varkappa'}\,e^{-ix'''q'} \quad (43)$$

Das Matrixelement von $\hat{\mathfrak{H}}_4$ für den Comptoneffekt wird damit:

$$(p_0,\varkappa_0\,|\,\hat{\mathfrak{H}}_4\,|\,p_1,\varkappa_1)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\frac{1}{2\sqrt{|\vec{\varkappa}_0|\,|\vec{\varkappa}_1|}}\left(\overline{u}(\vec{p}_1)[e_1^\mu k_{\mu\nu}(p_0,-\varkappa_1,-\varkappa_0,p_1)\,e_0^\nu\right.$$
$$\left.+\,e_0^\mu k_{\mu\nu}(p_0,\varkappa_0,\varkappa_1,p_1)\,e_1^\nu]\,u(\vec{p}_0)\right)\delta^4(p_0+\varkappa_0-p_1-\varkappa_1) \quad (44)$$

wobei: p_0, p_1 die Viererimpulse von Anfangs- resp. Endelektron
$\varkappa_0, \varkappa_1$ die Viererimpulse von Anfangs- resp. Endphoton
e_0, e_1 deren Polarisations(vierer-)vektoren bedeuten.

NB. Wegen der Eichinvarianz der Formel brauchen die Polarisationsvektoren e_i nicht transversal zu sein; sie müssen nur die Gleichungen erfüllen: $(e_i e_i) = 1$, $(e_i \varkappa_i) = 0$. Sie sind also um ein Multiplum von $\varkappa_i$ unbestimmt, entsprechend der Unbestimmtheit der Eichung der Potentiale.

Die Bestimmung von $k_{\mu\nu}$ verläuft etwas verschieden bei den „regulären" Termen I und II einerseits und bei den „ε-behafteten" Termen III und IV anderseits.

a) *Reguläre Terme:* Für I erhält man sofort:

$$k^{\mathrm{I}}_{\mu\nu} = +\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_\sigma \int d^4k\,\gamma^\sigma[i\gamma(q-k)-m]\gamma^\mu[i\gamma(q+\varkappa-k)-m]\gamma^\nu$$
$$\times[i\gamma(q'-k)-m]\gamma^\sigma$$
$$\times\left\{\frac{\delta(k^2)}{[(q-k)^2+m^2][(q+\varkappa-k)^2+m^2][(q'-k)^2+m^2]} + \frac{\delta((q-k)^2+m^2)}{k^2[(q+\varkappa-k)^2+m^2][(q'-k)^2+m^2]}\right.$$
$$\left. + \frac{\delta((q+\varkappa-k)^2+m^2)}{k^2[(q-k)^2+m^2][(q'-k)^2+m^2]} + \frac{\delta((q'-k)^2+m^2)}{k^2[(q-k)^2+m^2][(q+\varkappa-k)^2+m^2]}\right\}. \qquad (45)$$

(Skalarprodukte von Vierervektoren schreiben wir hier als gewöhnliche Produkte: $a^\nu b_\nu \equiv ab$; insbesondere $a_\nu a^\nu \equiv a^2$).

Der Ausdruck in geschweifter Klammer kann auf folgende Weise zusammengefasst werden[3]):

$$k^{\mathrm{I}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_\sigma \int d^4k\,\gamma^\sigma[i\gamma(q-k)-m]\gamma^\mu[i\gamma(q+\varkappa-k)-m]\gamma^\nu$$
$$\times[i\gamma(q'-k)-m]\gamma^\sigma \int_0^1 du\cdot u^2 \int_0^1 dv\cdot v \int_0^1 dw\,\delta'''(k^2-2[qk+\varkappa k-q\varkappa]u$$
$$+2[\varkappa k-\varkappa q]uv+2[q'k-qk]uvw). \qquad (46)$$

Ganz ähnlich findet man für II:

$$k^{\mathrm{II}}_{\mu\nu} = +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_\sigma \int d^4k\,\gamma^\mu[i\gamma(q+\varkappa)-m]\gamma^\sigma[i\gamma(q+\varkappa-k)-m]\gamma^\nu$$
$$\times[i\gamma(q'-k)-m]\gamma^\sigma\frac{1}{(q+\varkappa)^2+m^2} \qquad (45)$$
$$\times\left\{\frac{\delta(k)^2}{[(q-k)^2+m^2][(q'-k)^2+m^2]} + \frac{\delta((q-k)^2+m^2)}{k^2[(q'-k)^2+m^2]} + \frac{\delta((q'-k)^2+m^2)}{k^2[(q-k)^2+m^2]}\right\}$$

und daraus

$$k^{\mathrm{II}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sum_\sigma \int d^4k\,\gamma^\mu[i\gamma(q+\varkappa)-m]\gamma^\sigma[i\gamma(q+\varkappa-k)-m]\gamma^\nu$$
$$\times[i\gamma(q'-k)-m]\gamma^\sigma\frac{1}{-2(q\varkappa)}\int_0^1 du\cdot u\int_0^1 dv\,\delta''(k^2-2kq'u$$
$$+2[q\varkappa-k\varkappa']uv). \qquad (46')$$

Durch eine Verschiebung des Ursprungs im k-Raum bewirken wir die quadratische Ergänzung des Ausdrucks im Argument der δ'''- resp. δ''-Funktion:

in (46): (47) $k' = k - (q + \varkappa)\, u + \varkappa\, u\, v + (q - q')\, u\, v\, w$

in (46'): (47') $k' = k - q'\, u - \varkappa'\, u\, v$

worauf wir die Integration über k' ausführen können, indem wir für die δ-Funktion ihre Fourierdarstellung einsetzen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\, d\omega; \quad \delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, e^{i\omega x}\, d\omega;$$

$$\delta''(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 e^{i\omega x}\, d\omega; \text{ usw.}$$

Daraus erhält man unter Verwendung der Fresnelschen Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\,x \cdot e^{\pm\, i\omega x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\,|\omega|}} \left(1 \pm i\, \frac{\omega}{|\omega|}\right)$$

leicht die Formeln

$$\int d^4 k\, \delta''(k^2 + A) = + \frac{\pi}{A}\,; \quad \int d^4 k\, \delta'''(k^2 + A) = -\frac{\pi}{A^2} \tag{48}$$

und durch partielle Integration nach ω:

$$\left.\begin{aligned} \int d^4 k\, k_\mu k_\nu\, \delta''(k^2 + A) &= -\frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} \left\{ \int d^4 k\, \delta'(k^2 + A) + \pi \right\} \\ \int d^4 k\, k_\mu k_\nu\, \delta'''(k^2 + A) &= -\frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} \int d^4 k\, \delta''(k^2 + A) \end{aligned}\right\} \tag{48'}$$

während Integrale mit einer ungeraden Anzahl k_μ im Integranden aus Symmetriegründen verschwinden.

b) *Die ε-behafteten Terme:* Um sie in ähnlicher Form wie die regulären zusammenfassen zu können, benötigen wir eine Umformung des in allen vorkommenden Operators

$$\varLambda(02) \equiv -\frac{1}{8} \int d^4 x'\, \overline{S}(01)\, \gamma^\sigma [D_1(12)\, S(12) + D(12)\, S_1(12)]\, \gamma^\sigma \cdot \varepsilon(02) \tag{49}$$

Dieser kann zunächst auf die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} \varLambda(02) = &+ \frac{1}{4} \int d^4 x'\, \overline{S}(01)\, \gamma^\sigma [D_1(12)\, \overline{S}(12) + \overline{D}(12)\, S_1(12)]\, \gamma^\sigma + \\ &+ \frac{1}{8} \int d^4 x'\, S(01)\, \gamma^\sigma [D_1(12)\, \overline{S}(12) + \overline{D}(12)\, S_1(12)]\, \gamma^\sigma \cdot \varepsilon(02) \end{aligned}$$

Durch Fourieranalyse und analoge Zusammenfassung wie unter a) erhält man dafür leicht:

$$\begin{aligned}\Lambda(02) = &-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^7 \int d^4k' \int d^4p \int_0^1 du \left[2(p^2+m^2)(1-u) - 2m(1+u)\right. \\ &\times \left.(i\gamma p - m)\right]\left[\frac{1}{p^2+m^2} - i\pi\,\varepsilon(02)\,\varepsilon(p)\,\delta(p^2+m^2)\right] \\ &\times \delta'\left(k'^2 + m^2u^2 + (p^2+m^2)(u-u^2)\right) e^{ip(x-x'')}\end{aligned}$$

Wenn man darin im Term mit $\delta(p^2+m^2)$ überall $p^2+m^2 \to 0$ ersetzt, so kann man in ihm die p-Integration durchführen und erhält

$$-\frac{1}{2}\,\varepsilon(02)\,S(02) = \overline{S}(02),$$

was wir nun mit seiner Integraldarstellung wieder zurücktransformieren. Das ergibt schliesslich:

$$\begin{aligned}\Lambda(02) = &-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^7 \int d^4k' \int d^4p \int_0^1 du\,(1-u)\,\delta'\left(k'^2 + m^2u^2\right. \\ &+ \left.(p^2+m^2)(u-u^2)\right) e^{ip(x-x'')} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{m}{(2\pi)^7} \int d^4k' \int d^4p \int_0^1 du\,(1-u^2)\,u \int_0^1 dv\,(i\gamma p - m) \\ &\times \delta''\left(k'^2 + m^2u^2 + (p^2+m^2)(u-u^2)\right) e^{ip(x-x'')} \qquad (50)\end{aligned}$$

Mit (50) ist noch ein zweiter Beweis für die Lorentzinvarianz der ε-behafteten Terme gebracht, und ferner können wir nun sofort deren $k_{\mu\nu}$ analog zu dem der regulären Terme aufschreiben. Dabei erkennt man, dass sich die divergenten Terme, d. h. diejenigen, welche δ' enthalten, in regulären und ε-behafteten Termen gegenseitig wegheben. Dies beruht wesentlich auf folgende Identität, die man leicht durch partielle Integration gewinnt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 du\,(1-u)\,\delta'(k^2+A) = &\int_0^1 du \cdot u\,\delta'(k^2+A) \\ &- \int_0^1 du \cdot u\,(1-u)\,\frac{dA}{du}\,\delta''(k^2+A). \qquad (51)\end{aligned}$$

Die einzigen Divergenzen, welche unsere Formel für $k_{\mu\nu}$ noch enthält, rühren von Polen im Integranden der u, v, w-Integration her. Diese stammen von der Ultrarotkatastrophe; dies sieht man am einfachsten daran, dass sie verschwinden, wenn man entsprechend einer Bemerkung in § 4 dem Photon formal eine kleine Masse μ erteilt, d. h. den Wirkungsquerschnitt $d\sigma''(\mu)$ des Doppelcomptoneffektes addiert.

Unter Berücksichtigung dessen erhält man aus den Formeln (46) bis (50) den vollständigen Ausdruck für den Kern $k_{\mu\nu}$ von $\hat{\mathfrak{H}}_4(\mu)$ unter Einschluss des Doppelcomptoneffektes für ein Zusatzphoton mit Energie $< \mu$:

$$k_{\mu\nu}(q, \varkappa, \varkappa', q'; \mu) =$$

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l} +\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^1 du \cdot u^2 \int\limits_0^1 dv \cdot v \\ \int\limits_0^1 dw \cdot \left(\frac{1}{m^2 u^2 + \mu^2 + 2 q \varkappa u (1-u)(1-v) - 2 \varkappa \varkappa' u^2 v^2 w (1-w)}\right)^2 \\ \times \gamma^\sigma [i\gamma(q - (q+\varkappa) u + \varkappa u v + (q-q') u v w) - m] \gamma^\mu \\ \times [i\gamma(q + \varkappa - (q+\varkappa) u + \varkappa u v + (q-q') u v w) - m] \gamma^\nu \\ \times [i\gamma(q' - (q+\varkappa) u + \varkappa u v + (q-q') u v w) - m] \gamma^\sigma \end{array}\right.$$

$$\text{I}'\left\{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^1 du \cdot u^2 \int\limits_0^1 dv \cdot v \\ \int\limits_0^1 dw \frac{1}{m^2 u^2 + 2 q \varkappa u (1-u)(1-v) - 2 \varkappa \varkappa' u^2 v^2 w (1-w)} \\ \times \{\gamma^\sigma \gamma^\varrho \gamma^\mu \gamma^\varrho \gamma^\nu [i\gamma(q' - (q+\varkappa) u + \varkappa u v + (q-q') u v w) - m] \gamma^\sigma + \\ + \gamma^\sigma \gamma^\varrho \gamma^\mu [i\gamma(q + \varkappa - (q+\varkappa) u + \varkappa u v + (q-q') u v w) - m] \gamma^\nu \gamma^\varrho \gamma^\sigma + \\ + \gamma^\sigma [i\gamma(q - (q+\varkappa) u + \varkappa u v + (q-q') u v w) - m] \gamma^\mu \gamma^\varrho \gamma^\nu \gamma^\varrho \gamma^\sigma\} \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^1 du \cdot u \int\limits_0^1 dv \frac{1}{m^2 u^2 + 2 q \varkappa (u-u^2) v} \gamma^\mu \frac{i\gamma(q+\varkappa) - m}{-2 q \varkappa} \gamma^\sigma \\ \times [i\gamma(q + \varkappa - (q+\varkappa) u + \varkappa' u (1-v)) - m] \gamma^\nu \\ \times [i\gamma(q - q u - \varkappa' u v) - m] \gamma^\sigma \end{array}\right.$$

$$\text{III.} \quad -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^1 du \cdot u (1-u^2) \int\limits_0^1 dv \frac{m}{m^2 u^2 + 2 q \varkappa (u-u^2) v} \gamma^\mu \gamma^\nu$$

$$
\text{IV.}\left\{
\begin{aligned}
&+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\gamma^\mu\frac{i\gamma(q+\varkappa)-m}{-2q\varkappa}\gamma^\nu\left\{-1+\int_0^1 du\cdot u(1-u)\frac{2m^2}{m^2u^2+\mu^2}+\right.\\
&+\int_0^1 du\cdot u(1-u)\frac{2m^2}{m^2u^2+2q\varkappa(u-u^2)}\\
&-\int_0^1 du\cdot u(1-u)^2\frac{2q\varkappa}{m^2u^2+2q\varkappa(u-u^2)}\\
&+\int_0^1 du\cdot u^2(1-u)(1-u^2)\int_0^1 dv\cdot v\frac{4m^2(q\varkappa)}{[m^2u^2+2q\varkappa(u-u^2)v]^2}\\
&-\int_0^1 du\cdot u^3(1-u^2)\int_0^1 dv\cdot v\frac{4(q\varkappa)^2}{[m^2u^2+2q\varkappa(u-u^2)v]^2}\\
&\left.+\int_0^1 du\cdot u^2(1-u)\int_0^1 dv\cdot v\frac{4(q\varkappa)}{m^2u^2+2q\varkappa(u-u^2)v}\right\}
\end{aligned}\right. \tag{52}
$$

+ das hermitisch Konjugierte, in welchem die Substitution $q \longleftrightarrow q'$, $\varkappa \longleftrightarrow \varkappa'$ gemacht wird.

Die Terme I und I′ stammen aus I von (34), II aus II, III und IV aus III, IV, V und den Termen mit $k'_\mu k'_\nu\, \delta''(k'^2 + A)$ aus II.

Die Tatsache, dass hier im Gegensatz zur Impulsraumrechnung in § 4 nach Renormalisation der Masse keine Divergenzen mehr auftreten, rührt daher, dass wir die Vakuumpolarisationsterme (34, V) unter Berufung auf die Eichinvarianz resp. eine geeignete Limitierungsvorschrift (§ 8) weggelassen haben. Eine formale Rechnung hätte uns statt dessen wie in § 4 eine unendliche Ladungsrenormalisation geliefert. Wenn die Theorie nun überhaupt vernünftig ist, müssen wir erwarten, dass ausser der von der Vakuumpolarisation herrührenden (unendlichen) keine weiteren (endlichen) Ladungsrenormalisationen auftreten, d. h. dass unser Matrixelement (52) im extrem unrelativistischen Grenzfall verschwindet. Eine nicht schwierige Rechnung zeigt, dass dies in der Tat erfüllt ist.

NB. Dabei ist der Zusatzterm $+\pi$ in (48′) wesentlich. Seine wahre Begründung erhält dieser jedoch erst in § 8 vom Standpunkt der Regularisierung.

§ 8. Regularisierung.

Die einzelnen Glieder jeden Terms von (34) divergieren i. A. quadratisch, und erst die Zusammenfassung derselben mit den Parametern u, v, w, verbunden mit der speziellen Variablentransformation (47) reduziert die Divergenzen jeden Terms auf bloss logarithmische (charakterisiert durch das Auftreten der Funktion δ'). Diese heben sich dann, wie gezeigt, aus den einzelnen Termen gegenseitig weg. Führt man die Zusammenfassung anders durch, insbesondere mit einer von (47) verschiedenen Schiebung der einzelnen Glieder gegeneinander, so treten (divergente oder konvergente) Zusatzterme auf, die unser Resultat (52) wesentlich ändern. Es ist also nötig, für unser spezielles Vorgehen bei der Auswertung von (34) eine Begründung zu geben. Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten.

1. Erstens wäre denkbar, einfach zu postulieren, dass alle quantenelektrodynamischen Formeln analog zu unserem Vorgehen mit den u, v, w-Parametern zusammenzufassen seien. In der Tat führt dieses Verfahren in allen bisher behandelten Fällen zu sinnvollen Resultaten (vgl. [3])). Indessen ist diese Vorschrift doch ziemlich undurchsichtig, und es ist auch nicht sicher, dass sie für Probleme höherer Ordnung immer noch durchführbar bleibt.

2. Zweitens kann man eine in sich konsistente Limitierungsvorschrift rein mathematischer Natur erlassen, die unter Wahrung von Eich- und Lorentzinvarianz den auftretenden unbestimmten Symbolen einen eindeutigen Sinn beilegt, wie das Rivier und Stückelberg[9]) und Pauli und Villars[7]) tun. So erfolgreich diese Verfahren sind — besonders [7]), wo die speziellen Eigenschaften der Limitierung wieder herausfallen —, so haftet ihnen doch ein sehr unbefriedigender ad hoc-Charakter an, so dass sie immer nur für einen beschränkten Problemkreis formuliert werden können und für neue Aufgaben erweitert werden müssen. Insbesondere führt das Pauli-Villars-Verfahren in unserem Falle nur bei Hinzunahme von Zusatzvorschriften darüber, welche Funktionen zu regularisieren seien und welche nicht, zum Ziel.

3. Das befriedigendste Verfahren scheint uns deshalb zu sein, dass man ausser den reell vorhandenen Teilchen noch andere, schwere Teilchen ankoppelt, wobei besondere Relationen zwischen den Kopplungskonstanten das Konvergieren der auftretenden Ausdrücke garantieren, und am Schlusse die Massen M_i der Hilfsfelder als gross gegen die der realen Felder betrachtet und der Grenzübergang $M_i \rightarrow \infty$ durchgeführt wird[10]). Dabei sind uns diese Hilfsfelder hier nicht physikalische Realität, sondern bloss Mittel

zur Formulierung einer Limitierungsvorschrift, die, im Gegensatz zu 1. und 2. für jedes Problem ohne neue Zusatzvorschriften definiert ist.

Diese Auffassung der Sachlage erlaubt uns, einfach neben den Elektronen noch schwere geladene Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen, neben den Photonen schwere Vektormesonen anzukoppeln und die Bedingungen zu formulieren, welche die Konvergenz erzwingen, ohne uns darum zu kümmern, dass diese vielleicht mit reellen Kopplungskonstanten bei diesen Feldtypen gar nicht erfüllbar sind.

Koppeln wir zunächst N schwere Elektronfelder an, so haben wir zu ersetzen

$$j_\mu(x; m) \rightarrow \sum_{i=0}^{N} c_i j_\mu^{(i)}(x; M_i) \quad \text{wo} \quad c_0 = 1, M_0 = m \text{ ist.}$$

Man rechnet leicht nach, dass die einzigen Modifikationen, die in (34) dadurch erwachsen, die Vakuumpolarisationsterme (V) betreffen, die dadurch gerade die regularisierte Form, die ihnen in [7]) gegeben wurde, erhalten. Dort wird gezeigt, dass durch geeignete Bedingungen zwischen den c_i und den M_i die Vakuumpolarisation formal eichinvariant wird und also für eine Lichtwelle verschwindet. Dies rechtfertigt also das Weglassen dieser Terme in § 3 und § 7 auch formal.

Koppeln wir hingegen N schwere Vektormesonfelder neben dem Photonfeld an, so ergibt eine einfache Rechnung nach dem Verfahren von § 6 ein Resultat, das aus (34) dadurch hervorgeht, dass man überall statt D_1 resp. $\overline{D}$ schreibt:

$$\tilde{D}_1(x) \equiv \sum_{i=0}^{N} c_i \Delta_1(x; M_i) \text{ resp. } \tilde{\overline{D}} \equiv \sum_{i=0}^{N} c_i \overline{\Delta}(x; M_i) \text{ wo } c_0 = 1, M_0 = 0.$$

Man rechnet nun leicht nach, dass die Bedingungen

$$\text{(A)} \qquad \sum_{i=0}^{N} c_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{N} c_i M_i^2 = 0, \qquad \sum_{i=0}^{N} c_i M_i^4 = 0$$

genügen, um zu garantieren, dass jedes Glied von (34) einzeln konvergiert; die schwächeren Bedingungen

$$\text{(B)} \qquad \sum_{i=0}^{N} c_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{N} c_i M_i^2 = 0$$

garantieren nur, dass höchstens logarithmisch divergente Integrale auftreten. Dies genügt indessen für unsere Zwecke vollauf; denn eine konvergente Differenz zweier nur logarithmisch divergenter Integrale ist invariant gegenüber Schiebungen der Integrationsvariablen, so dass die oben durchgeführte spezielle Zusammenfassung der Glieder jeden Terms mit der speziellen Schiebung (47), falls sie sich mit den abgeänderten D-Funktionen noch durchführen lässt, genau so gerechtfertigt ist wie jede andere. Sie ist hingegen dadurch ausgezeichnet, dass nach Durchführung des Grenzüberganges $M_i \to \infty$ $(i \neq 0)$ in der Schlussformel keine Zusatzterme auftreten.

Um das zu zeigen, versuchen wir, alle Umformungen von § 7 neu durchzuführen, wenn D durch $\tilde{D}$ ersetzt ist. Man erkennt sofort, dass dies in der Tat möglich ist und dass dadurch einfach jede der auftretenden Funktionen

$$\delta'(k^2 + A); \qquad \delta''(k^2 + A); \qquad \delta'''(k^2 + A)$$

ersetzt wird durch resp.

$$\sum_{i=0}^{N} c_i \, \delta'\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right); \quad \sum_{i=0}^{N} c_i \, \delta''\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right);$$
$$\sum_{i=0}^{N} c_i \, \delta'''\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right)$$

Alle übrigen Schlüsse bleiben unverändert, mit zwei Ausnahmen: a) In der zweiten Formel (48′) fällt der Zusatzterm $+\pi$ wegen $\sum\limits_{i=0}^{N} c_i = 0$ weg:

$$\sum_{i=0}^{N} c_i \int d^4 k \, k_\mu k_\nu \, \delta''\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{i=0}^{N} c_i \int d^4 k \, \delta'\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right). \qquad (48'')$$

b) In (51) tritt ein neuer Zusatzterm auf:

$$\sum_{i=0}^{N} c_i \int_0^1 du \, (1-u) \, \delta'\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{N} c_i \int_0^1 du \cdot u \, \delta'\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right)$$
$$- \sum_{i=0}^{N} c_i \int_0^1 du \cdot u (1-u) \left[\frac{dA}{du} - M_i^2\right] \delta''\left(k^2 + A + M_i^2 (1-u)\right). \qquad (51')$$

Der Zusatzterm

$$- \sum_{i=0}^{N} c_i M_i^2 \int d^4 k \int_0^1 du \cdot u(1-u)\, \delta''\big(k^2 + A + M_i^2(1-u)\big)$$

$$= -\pi \sum_{i=0}^{N} c_i \int_0^1 du \cdot u(1-u) \frac{M_i^2}{A + M_i^2(1-u)}$$

liefert in der Grenze $M_i \to \infty$ $(i \neq 0)$:

$$-\pi \sum_{i=1}^{N} c_i \int_0^1 du \cdot u = + \frac{\pi}{2}$$

und da (34) III und (34) IV je einen solchen liefern, so kommt im Ganzen wieder der Zusatzterm $+\pi$, wie ohne Regularisierung, nun aber besser begründet.

Wir verbleiben also mit einer zu (52) analogen Formel in der jedoch die Brüche $\frac{1}{F(u,v,w)}$ unter den Parameterintegralen ersetzt werden durch:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{c_i}{F(u,v,w) + M_i^2(1-u)}$$

Da nun keines der auftretenden $\frac{1}{F(u,v,w)}$ bei $u = 1$ eine Singularität hat, geht für $M_i \to \infty$ $(i \neq 0)$ jeder Zusatzterm $(i \neq 0)$ einzeln gegen Null, und es ergibt sich genau die Formel (52), die damit vom Standpunkt unserer Regularisierungsmethode gerechtfertigt ist.

Hätten wir statt der u, v, w-Zusammenfassung einen anderen Weg zur Auswertung von (34) gewählt, der ohne Regularisierung eine mit (52) nicht-äquivalente Endformel liefert, so würden durch die Regularisierung gerade solche Zusatzterme hereingebracht, dass (52) wiederhergestellt würde (vgl. [7])). Die Stärke und Auszeichnung der u, v, w-Zusammenfassung liegt eben darin, dass sie keine Zusatzterme von der Regularisierung erhält und deshalb schon ohne diese zum richtigen Resultat führt (abgesehen eventuell von endlichen Ladungsrenormalisationen; dass der Zusatzterm in (48') ohne Regularisierung zum richtigen Resultat führt, dürfte kaum mehr als Zufall bedeuten).

NB. 1. Die Anwendung der hier verwendeten Regularisierungsmethode auf den Selbstenergieoperator (33) ist identisch mit der Limitierung desselben nach Villars und Pauli[7]) und bringt ihn auf die Form const. $\int d^3 x\, \overline{\psi}(x)\, \psi(x)$, wie in § 5 erwähnt wurde.

2. Die Tatsache, dass die hier gewählte Limitierungsvorschrift mit Hilfsfeldern im Gegensatz etwa zu den rein mathematischen Vorschriften [7]) und [9]) die Formel (52) so normiert, dass keine Ladungsrenormalisation mehr auftritt, deutet vielleicht darauf hin, dass solche Hilfsfelder doch mehr als eine bloss formale Bedeutung haben.

§ 9. **Ultrarotterme; unrelativistischer Grenzfall.**

1. Die Ultrarotterme sind in (52) ziemlich komplex in die u, v, w-Integration eingebaut, und es besteht keine einfache Möglichkeit, sie mit dem Doppelcomptoneffekt (29) zu vergleichen. Wir haben deshalb auch im Vorhergehenden einfach die Vorschrift, dem Photon eine kleine Masse μ zu erteilen, aus der Impulsraumdiskussion übernommen. Nun können wir aber die Impulsraumformel von § 4 als eine andere Form der Auswertung von (34) ansehen, die jedoch nicht der Regularisierung von § 8 genügt. Wir haben infolgedessen keine Garantie, dass die Ausrechnung von (30) dasselbe liefert wie (52). Da es sich aber bei den Ultrarottermen nur um das Verhalten des Integranden in der Umgebung eines nicht-integrablen Pols im Impulsraum handelt, auf das die Regularisierung keinen Einfluss hat, können wir sie trotz der allgemeinen Nichtäquivalenz von (30) und (52) an Hand von (30) diskutieren, wie das in § 4 geschehen ist, und von da die Vorschrift übernehmen, dass man $d\sigma_6(\mu) = d\sigma_6 + d\sigma''(\mu)$ erhält, wenn man in $\mathfrak{H}_4$ dem Photon formal die Masse μ erteilt. Damit ist unser obiges Vorgehen gerechtfertigt.

2. Genau dieselbe Überlegung gilt auch, wenn man $d\sigma_6(\mu)$ für kleine Energien berechnen will. Die Entwicklung des Wirkungsquerschnittes nach der Energie $\varkappa$ des einfallenden Photons lautet nämlich im Schwerpunktsystem:

$$d\sigma_6(\mu) = d\sigma_6^{(1)} \cdot \varkappa^2 \log \varkappa + d\sigma_6^{(2)} \cdot \varkappa^2 + o(\varkappa^2)$$

und für sehr kleine $\varkappa$ stellt der erste Term den Hauptanteil dar. Die logarithmische Abhängigkeit von $\varkappa$ kommt dadurch zustande, dass im Limes $\varkappa \to 0$ zwei Pole im Impulsraum zusammenrücken, so dass eine nicht-integrable Singularität entsteht. So wenig wie auf die Ultrarotterme kann deshalb die spezielle Wahl der Auswertungsvorschrift auf diesen Term einen Einfluss haben, und wir dürfen ihn also auf Grund von (30) berechnen, was bedeutend bequemer ist. Die Rechnung ist als solche uninteressant, so dass hier nur das Resultat angegeben sei:

Bedeutet $r_0 = e^2/4\pi m$ den klassischen Elektronenradius, ϑ den Streuwinkel, $d\Omega$ das Raumwinkelelement; übrige Bezeichnungen wie bisher, so ist:

$$d\sigma_6(\mu) = \frac{r_0^2}{137} \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \left(\frac{\varkappa}{m}\right)^2 \Big\{[1+\cos^2\vartheta]\left[2\log\left(\frac{\varkappa}{m}\right) + \frac{8}{3}\log\left(\frac{\mu}{m}\right)\right]$$
$$-\frac{8}{3}[1+\cos^2\vartheta]\cos\vartheta \cdot \log\left(\frac{\mu}{m}\right)$$
$$-\frac{4}{3}[1-\cos^2\vartheta]\cos\vartheta\cdot\log\left(\frac{\varkappa}{m}\right)\Big\}\ ^{12)} \tag{53}$$

3. Um die Diskussion der Ultrarotdivergenzen vollständig zu machen, müssen wir noch in Anlehnung an Jost[9]) (im folgenden zitiert als (J)) die Verhältnisse bei der Emission kleiner Photonen beim Comptoneffekt untersuchen. Das Vorgehen ist genau analog zu dem bei (J), bis auf die Ersetzung der Einelektrontheorie durch Löchertheorie und die Berücksichtigung unserer strahlungstheoretischen Korrekturen:

Man spaltet das Strahlungsfeld im Schwerpunktssystem durch eine Grenzfrequenz μ in einen hochfrequenten (h. f.) ($\varkappa > \mu$) und einen niederfrequenten (n. f.) Anteil. Der Hamiltonoperator $H = H_0 + eH_1$ zerfällt analog:

h. f. $\quad H(\mu) = H_0(\mu) + e\,H_1(\mu)$

n. f. $\quad H'(\mu) = H_0'(\mu) + e\,H_1'(\mu)$

Wenn μ klein ist gegen die Elektronmasse und die Energie des einfallenden Photons, kann man in $H + H'$ alle Terme von der Ordnung μ/m resp. $\mu/\varkappa$ vernachlässigen.

Eine erste kanonische Transformation

$$F \to e^{-U} F\, e^{+U}$$

wo

$$U = -\sum_s \int_{|\varkappa|<\mu} d^3\varkappa\, \vec{\varkappa}\, \mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa}) \int d^3p\, \varphi^*(\vec{p}\,')\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}\,'}\, \varphi(\vec{p}\,')$$

mit

$$\mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa}) = A_s^*(\vec{\varkappa})\, A_s(\vec{\varkappa}) \qquad \text{Photonenzahlen}$$

$$\varphi(\vec{p}\,') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3x\, \psi(\vec{x})\, e^{-i\vec{p}\vec{x}}$$

(im übrigen die alten Bezeichnungen)

führt $\varphi(\vec{p})$ über in

$$\varphi\Big(\vec{p} - \sum_s \int_{|\varkappa|<\mu} d^3\varkappa\, \vec{\varkappa}\, \mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa})\Big),$$

*

wälzt also den Feldimpuls der n. f. Photonen auf das Materiefeld ab. Die Strahlungsfeldamplituden gehen dabei über in

$$A_s(\vec{\varkappa}) \rightarrow A_s(\vec{\varkappa})\, e^{-\vec{\varkappa}\int d^3 p'\, \varphi^*(\vec{p}')\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}'}\, \varphi(\vec{p}')} \tag{54}$$

Im Sinne der obigen Vernachlässigungen dürfen wir den Energie-Impulssatz im n. f. Gebiet vernachlässigen und damit den Exponentialfaktor in (54) weglassen.

Auf den derart vorbereiteten Hamiltonoperator wird nun die von Bloch und Nordsieck[5]) eingeführte kanonische Transformation

$$F \rightarrow e^{-eS}\, F e^{+eS}$$

mit

$$S = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{\sigma,s} \int\limits_{|\varkappa|<\mu} d^3\varkappa \int d^3 p\, \frac{(p e_s)}{(p\varkappa)}\, \frac{A_s(\vec{\varkappa}) - A_s^*(\vec{\varkappa})}{\sqrt{2\,|\vec{\varkappa}|}}\, a_\sigma^*(p)\, a_\sigma(p)$$

ausgeübt. Es ist dies genau unsere frühere S-Transformation, die hier aber nicht im Sinne einer Entwicklung nach Potenzen von e, sondern strahlungstheoretisch exakt, aber unter Vernachlässigung des Impuls-Energie-Satzes im n.f. Gebiet durchgeführt wird. Genau wie bei (J) erhält man damit für den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \tilde{H}_1(\mu) + 0\,(\mu/m,\, \mu/\varkappa) \tag{55}$$

wo

$$\tilde{H}_1(\mu) = H_1(\mu)\cdot K'$$

und

$$\bigl(\mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa}),\, N_\tau(\vec{p})\, |K'|\, \mathfrak{N}_s'(\vec{\varkappa}),\, N_\tau(\vec{p}) - \delta_{\sigma_0 \tau}\, \delta(\vec{p} - \vec{p}_0) +$$
$$+ \delta_{\sigma_1 \tau}\, \delta(\vec{p} - \vec{p}')\bigr) = \bigl(\mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa}), \vec{p}_0(\sigma_0)\, |K|\, \mathfrak{N}_s'(\vec{\varkappa}), \vec{p}_1(\sigma_1)\bigr) \tag{(J) 29}$$

Dabei sind $N_0(\vec{p}) \equiv a_\sigma^*(\vec{p})\, a_\sigma(\vec{p})$ Elektronenzahlen.

In (55) ist $H_1(\mu)$ (bis auf Grössen $0\,(\mu/m)$) der Hamiltonoperator der Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld der Masse μ: er ergibt also in der Störungstheorie den Querschnitt $d\sigma(\mu) = d\sigma_4 + d\sigma_6(\mu) + \ldots$

Wieder genau wie (J) erhält man für den Streuquerschnitt eines Prozesses, bei dem neben dem in ein bestimmtes Raumwinkelelement $d\Omega$ gestreuten Photon noch n.f. der Verteilung $\mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa})$ emittiert werden:

$$d\sigma = \Pi\,[\mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa})]\cdot d\sigma_c \tag{56}$$

wo $\Pi\,[\mathfrak{N}_s(\vec{\varkappa})]$ eine Poissonverteilung für die n.f. Photonen
$d\sigma_c$ der störungstheoretisch aus $H_1(\mu)$ berechnete Querschnitt für den Comptoneffekt ist:

$$d\sigma_c = d\sigma_4 + d\sigma_6(\mu) + \ldots$$

Die Unabhängigkeit von μ, innerhalb gewisser Schranken, ergibt sich leicht folgendermassen: Es ist nach (29) der Wirkungsquerschnitt eines Doppelcomptoneffektes, bei welchem neben dem in $d\,\Omega$ gestreuten Photon und beliebigen n.f. Photonen noch ein Photon mit einer Energie $\varkappa' : \mu < \varkappa' < \mu'$ emittiert wird, falls $\mu'/m \ll 1$, $\mu'/\varkappa \ll 1$:

$$d\,\sigma''(\mu, \mu') = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{\mu < |\varkappa'| < \mu'} \frac{d^3\varkappa'}{2\,|\vec{\varkappa}'|}\left\{\frac{p_0}{(p_0\,\varkappa)} - \frac{p_1}{(p_1\,\varkappa)}\right\}^2 \cdot d\,\sigma_4$$

Somit gilt:

$$d\,\sigma_6(\mu) + d\,\sigma''(\mu, \mu') = d\,\sigma_6(\mu') \tag{57}$$

Es ist also tätsächlich das Resultat unabhängig von der Frequenz μ, die das Strahlungsfeld in einen h.f. und einen n.f. Teil spaltet, unter den Bedingungen:

1. $\mu \ll m$, $\mu \ll \varkappa$
2. $e^2 \log\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right) \ll 1$

(wo $\varkappa$ = Energie des einfallenden Photons im Schwerpunktsystem). Die Bedingung 2 drückt aus, dass der Dreifach-Compton-Effekt vernachlässigbar klein sein soll gegen den Doppelcomptoneffekt, was natürlich in allen obigen Überlegungen implizit vorausgesetzt war.

Im übrigen bleiben alle Folgerungen von (J) unverändert erhalten. Insbesondere kann über die Form der Comptonlinie nicht mehr ausgesagt werden, als was schon aus (J) folgt: Innerhalb des n.f. Gebietes ist sie gegeben durch die Funktion S (J 49), ausserhalb kann sie nur durch exakte Berechnung des Doppel-Compton-Querschnittes bis zur Ordnung e^6 berechnet werden.

* * *

Mit der Formel (52) sind wir grundsätzlich in der Lage, die e^6-Korrektur zum Streuquerschnitt des Comptoneffektes auszurechnen. Der rein rechnerischen Schwierigkeiten wegen, die diese Aufgabe bietet, mussten wir die Auswertung jedoch zurückstellen und uns mit der Näherung kleiner Energien (53) begnügen. Wir hoffen indessen, in absehbarer Zeit wenigstens noch den Fall extrem grosser Energien behandeln zu können.

Zum Schlusse möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor W. Pauli, für seine kundige Leitung vielmals danken. Ausserdem bin ich Herrn Dr. R. Jost, der diese Arbeit anregte, für viele wertvolle Ratschläge und anregende Diskussionen zu grossem Dank verpflichtet.

Literatur.

[1]) J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 415 (1948); H. W. Lewis, Phys. Rev. **73**, 173 (1948); S. T. Epstein, Phys. Rev. **73**, 177 (1948); S. Tomonaga, Phys. Rev. **74**, 224 (1948); S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **21**, 183 (1948).

[2]) E. Corinaldesi und R. Jost, HPA **21**, 183 (1948).

[3]) J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948), Phys. Rev. **75**, 651 (1949) und unpublizierte Arbeiten.

[4]) J. French und V. Weisskopf, Phys. Rev. **75**, 1240 (1949).

[5]) F. Bloch und A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 54 (1937).

[6]) R. Jost, Phys. Rev. **72**, 815 (1947).

[7]) W. Pauli und F. Villars, im Druck.

[8]) R. Jost und J. M. Lüttinger, in Vorbereitung.

[9]) D. Rivier und E. C. G. Stückelberg, Phys. Rev. **74**, 218 (1948). D. Rivier, im Druck.

[10]) S. Sakata, Progr. Theor. Phys. **2**, 145 (1947); A. Pais, Phys. Rev. **68**, 227 (1946); J. Rayski, Acta Physica Polonica, IX, 129 (1948).

[11]) Auch D. Feldman und J. Schwinger, B. Am. Phys. Soc., **23**, Nr. 7, 17 (1948) haben gefunden, dass bei diesem Problem sich sämtliche Divergenzen als Renormalisation von Masse und Ladung deuten lassen. Vgl. auch Z. Kôba und G. Takeda, Progr. Theor. Phys. **3**, 202 (1948).

[12]) Diese Formel wurde bereits mitgeteilt im Solvay-Report 1948 sowie Phys. Rev. **75**, 1111 (1948).