

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 22 (1949)  
**Heft:** IV  
  
**Artikel:** Zur Theorie der Multipolstrahlung  
**Autor:** Fierz, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112015>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Theorie der Multipolstrahlung.

von M. Fierz, Basel.

(1. IV. 1949.)

*Zusammenfassung.* Es wird in einfacher Weise die Intensität und Charakteristik der niedrigsten, von einer elektromagnetischen Strahlungsquelle ausgesandten Multipolwelle berechnet. Weiter werden allgemeine Formeln für die Korrelationen von  $\gamma$ -Strahlen mit Hilfe der Darstellungstheorie der Drehgruppe hergeleitet.

## Einleitung.

Formeln für die Intensität der durch Kerne ausgesandten  $\gamma$ -Strahlung sind mit Hilfe des Tröpfchenmodells abgeleitet worden<sup>1)</sup>. Sie entsprechen recht gut der Erfahrung<sup>2)</sup>. Entsprechende Formeln hat BERESTETZKY<sup>3)</sup> für eine beliebige Multipolquelle angegeben. Im ersten Teile dieser Arbeit legen wir eine Methode dar, die in einfacher Weise die Intensität und Charakteristik der Multipolstrahlung niedrigster Ordnung zu berechnen gestattet, die eine elektromagnetische Strahlungsquelle ausstrahlen kann. Es zeigt sich, dass die magnetische und die elektrische Strahlung auch im allgemeinen Falle dem schiefen und dem symmetrischen Teil eines gewissen Tensors entspricht.

Wenn man die Formeln für ein bestimmtes Kernmodell anwenden will, müssen natürlich die Multipolmomente durch entsprechende Matrixelemente ersetzt werden.

In den folgenden Abschnitten werden Fragen, die mit der Korrelation nacheinander ausgestrahlter  $\gamma$ -Quanten zusammenhängen, behandelt. Diese Fragen sind für Dipol- und Quadrupolstrahlung vor allem von D. R. HAMILTON<sup>4)</sup> ausführlich untersucht worden. Er konnte seine Formeln so weit auswerten, dass sie leicht mit der Erfahrung verglichen werden können. C. N. YANG<sup>5)</sup> hat darauf hingewiesen, dass sich derartige Probleme allgemein gruppentheoretisch behandeln lassen. Er beschränkt sich jedoch auf allgemeine Aussagen, ohne auf Einzelheiten näher einzugehen.

Wir leiten in dieser Arbeit Formeln ab, die für Korrelationen bei beliebiger Multipolordnung gültig sind.

Es ist auch berücksichtigt, dass im allgemeinen elektrische und magnetische Strahlung kohärent auftritt. Weiter wird der Fall behandelt, dass bei solchen Prozessen Korrelationen zwischen  $\gamma$ -Quanten und Konversionselektronen auftreten.

Zur Herleitung der Formeln bedienen wir uns der gruppentheoretischen Methode.

### 1. Klassische Theorie der Multipolstrahlung.

Wir betrachten die Ausstrahlung, die durch eine periodisch veränderliche Stromdichte

$$\vec{j}(x) e^{-i\omega t} + \text{konjg.}$$

zustande kommt. Rechnet man in GAUSS'schen Einheiten und eicht man die Potentiale so, dass

$$\text{div } \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0$$

dann wird das Strahlungsfeld in der Wellenzone durch das Vektorpotential

$$\mathfrak{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \cdot \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{x}') e^{-i(\vec{k}\vec{x}')} d\tau' = \frac{1}{rc} e^{ikr-i\omega t} \vec{J} \quad (1,1)$$

beschrieben. Die Meinung ist dabei die, dass stets der konjugiert komplexe Term zu addieren sei.  $\vec{k}$  hat den Betrag  $\omega/c$ , seine Richtung ist diejenige von  $\vec{x}$ .

Wir wollen nun das Integral  $\vec{J}$  in (1,1) nach Multipolmomenten entwickeln. Das ist sinnvoll, wenn die Wellenlänge der Strahlung gross gegen die Ausdehnung der Strahlungsquelle ist.

Wir entwickeln  $e^{-i(\vec{k}\vec{x}')}$  in eine Potenzreihe:

$$e^{-i(\vec{k}\vec{x}')} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-i\vec{k}\vec{x}')^{l-1}}{(l-1)!} \quad (1,2)$$

Entsprechend wird nun  $\vec{J} = \sum_{l=1}^{\infty} \vec{J}^{(l)}$ . Die Komponente  $J_n^{(l)}$  ist durch

$$J_n^{(l)} = \frac{(-i)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{n_1} \dots \sum_{n_{l-1}} k_{n_1} \dots k_{n_{l-1}} \int x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} j_n(\vec{x}) d\tau \quad (1,3)$$

gegeben.

Den Integranden spalte man nun in einen in den Indices  $n_1 \dots n$  symmetrischen Teil und einen, der im Indexpaar  $n_{l-1}, n$  schief ist.

$$x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} \dot{j}_n = \frac{1}{l} \sum_{(n_1 \dots n)} x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} \dot{j}_n + \frac{1}{l} \sum_{(n_1 \dots n_{l-1})} x_{n_1} \dots x_{n_{l-2}} (x_{n_{l-1}} \dot{j}_n - x_n \dot{j}_{n_{l-1}}) \quad (1,4)$$

Hier bedeutet  $\sum_{(n_1 \dots n_l)}$  die Summe über die zyklischen Permutationen der angeschriebenen Indices. Der symmetrische Teil entspricht der elektrischen, der schiefe Teil der magnetischen Multipolstrahlung.

Den symmetrischen Teil formen wir mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung  $\text{div } \vec{j} + \dot{\varrho} = 0$  um:

$$\frac{1}{l} \int x_{n_1} \dots x_n \dot{\varrho} d\tau = -\frac{1}{l} \int x_{n_1} \dots x_n \text{div } \vec{j} d\tau = \frac{1}{l} \sum_{(n_1 \dots n)} \int x_{n_1} \dots x_{n_{l-1}} \vec{j}_n d\tau$$

Somit ist derjenige Teil von  $\vec{J}^{(l)}$ , der der elektrischen Multipolstrahlung entspricht:

$$\vec{J}_E^{(l)} = \frac{(-i)^{l-1}}{l!} \int (\vec{k} \vec{x})^{l-1} \vec{x} \dot{\varrho} d\tau \quad (1,5)$$

Interessiert man sich nun lediglich für die Multipolstrahlung niedrigster Ordnung, die eine Strahlungsquelle ausstrahlt, so kann man auch die Entwicklung

$$e^{-i(\vec{k} \vec{x})} \sim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_m \frac{4\pi}{l-1} \frac{2^{l-1} (l-1)!}{(2l-2)!} (-ikr)^{l-1} Y_{l-1,m}(\theta, \Phi) Y_{l-1,m}^*(\vartheta, \varphi) \quad (1,6)$$

betrachten, die man erhält, wenn man in der bekannten Entwicklung nach Kugelwellen die BESSELFunktionen nach  $kr$  entwickelt und jeweils nur den 1. Term beibehält. Hier sind  $\theta, \Phi$  die Polwinkel von  $\vec{k}$ ;  $\vartheta, \varphi$  diejenigen von  $\vec{x}$ .  $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$  sind die normierten Kugelfunktionen. Da dies später wesentlich sein wird, wollen wir hier schon anmerken, dass die Vorzeichen der Funktionen so ge-

wählt sein sollen, dass  $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^*$  ist. Indem man nun (1,5) und (1,6) vergleicht, ergibt sich

$$\vec{J}_E^{(l)} \sim \frac{4\pi(l-1)!}{l(2l-1)!} (-2ik)^{l-1} \sum_m Y_{l-1,m}(\theta, \Phi) \int \dot{\varrho}(\vec{x}) \vec{x} Y_{l-1,m}^*(\vartheta, \varphi) r^{l-1} d\tau \quad (1,7)$$

Diese Formel ist nur richtig, wenn man die Strahlung höherer Ordnung, die ein Multipol der Ordnung  $l$  ausstrahlt, vernachlässigt.

Die Ladungsdichte  $\varrho$  entwickle man nach Kugelfunktionen:

$$\varrho(\vec{x}) = \sum_{l,m} \varrho_{l,m}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

Mit dieser Entwicklung erhält man für das Potential  $\Phi$  in der Nahezone  $r \ll \lambda$ :

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \Phi) \int \varrho_{l,m}(r') r'^{l+2} dr'$$

Die Integrale

$$Q_{l,m} = \int \varrho_{l,m}(r) r^{l+2} dr \quad (1,8)$$

nennen wir deshalb die Multipolmomente.

Unserer Näherung entsprechend, hat man in (1,7) nur den Term

$$\varrho^{(l)} = \sum_{m'} \varrho_{l,m'}(r) Y_{l,m'}(\vartheta, \varphi)$$

zu berücksichtigen. Setzt man das ein und integriert über die Winkel, so erhält man für das Integral in (1,7)

$$\sum_{m'} \tilde{c}_{m,m'}^{(l)} Q_{l,m'} \quad (1,9)$$

Die  $\tilde{c}_{m,m'}^{(l)}$  sind bekannte Koeffizienten. Insbesondere gilt

$$\sum_m \tilde{c}_{m,m'}^{(l)} Y_{l-1,m}(\theta, \Phi) = \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l-1}} \text{grad} [r^l Y_{l,m'}(\theta, \Phi)] \quad (1,10)$$

(Siehe hiezu H. BETHE, Handbuch der Physik 24/1, 2. Aufl., S. 555ff). Indem wir das beachten, erhalten wir einen Ausdruck für  $\vec{J}_E^{(l)}$  und damit für  $\mathfrak{A}$ . Die elektrische Feldstärke ist gleich der transversalen Komponente von  $-\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}$ .

Daher sind die Komponenten von  $\mathfrak{E}$  in den Richtungen  $\theta$  und  $\Phi$  (meridionale und azimutale Komponente)

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_{\theta}^{(l)} \\ \mathfrak{E}_{\Phi}^{(l)} \end{pmatrix} = -\frac{e^{ikr}}{r c^2} \cdot 8 \pi \frac{(l-1)!}{(2l+1)!} \left( \frac{2k}{i} \right)^{l-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \Phi} \end{pmatrix} \sum_m Y_{l,m}(\theta, \Phi) \ddot{Q}_{l,m} \quad (1,11)$$

Natürlich ist  $\ddot{Q}_{l,m} = -\omega^2 Q_{l,m}$ .

Um die magnetische Strahlung zu erhalten, führen wir die Dichte des magnetischen Momentes ein:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} [\vec{x} \vec{j}] \quad (1,12)$$

Diese entwickle man nach Kugelfunktionen:

$$\vec{\mu} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_m \vec{\mu}_{l-1,m}(r) Y_{l-1,m}(\vartheta, \varphi)$$

Die  $\vec{\mu}_{l-1,m}$  haben nun auf Grund gruppentheoretischer Sätze die Form

$$\vec{\mu}_{l-1,m} = \sum_{m'} \vec{c}_{m,m'}^{(l)} \mu_{l,m'}(r)$$

Wenn man die entsprechende Rechnung macht, wie für die elektrische Strahlung, so findet man leicht, dass hier  $\mathfrak{H}$  an Stelle von  $\mathfrak{E}$  tritt und dass die magnetischen Multipolmomente sich zu

$$M_{l,m} = \frac{2l}{l+1} \int \mu_{l,m}(r) r^{l+1} dr \quad (1,13)$$

ergeben. Der Faktor  $\frac{l}{l+1}$  rührt davon her, dass in der Summe in (1,4), die dem magnetischen Multipolmoment entspricht, nur  $l-1$  Summanden auftreten. Der Faktor 2 rührt von der Definition (1,12) her.

Die gesamte Ausstrahlung erhält man, wenn man  $\frac{c}{4\pi} \mathfrak{E}^2$  über die Kugeloberfläche integriert. Nun ist

$$\int \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{l,m} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{l,m} \right|^2 \right\} d\Omega = l(l+1)$$

Darum ist die pro Sekunde und im Zeitmittel ausgestrahlte Energie

$$S_E^{(l)} = 8 \pi c \left( \frac{\omega}{c} \right)^{2l+2} \frac{2^{2l} l!^2 (l+1)}{(2l+1)! l} \sum_m |Q_{l,m}|^2 \quad (1,14)$$

Für die magnetische Strahlung hat man die  $Q_{l,m}$  durch die  $M_{l,m}$  zu ersetzen.

## 2. Charakteristik einer Multipolquelle in der Quantenmechanik.

Wir betrachten einen Atomkern in einem Zustande mit den Drehimpulsquantenzahlen  $j_1, m_1$ . Durch Ausstrahlung eines Lichtquants, das einer  $2^j$ -Pol-Strahlung entspricht, gehe der Kern in den Zustand mit den Quantenzahlen  $j_2, m_2$  über. Das Lichtquant hat den Drehimpuls  $j^6$ . Aus dem Drehimpulssatz folgt weiter, dass

$$m_1 = m_2 + m \quad (2,1)$$

gelten muss. Hier ist  $m$  der Drehimpuls des Lichtquants um die  $z$ -Achse. Das diesem Übergang zugeordnete Matrixelement nennen wir  $Q_{j,m}$ . Dann wird der Endzustand, in welchem ein Lichtquant und der Atomkern im Zustande  $\psi_{j_2}$  vorhanden ist, durch den Ausdruck

$$\sum_m Q_{j,m} Y_{j,m} \psi_{j_2, m_1 - m} \quad (2,2)$$

charakterisiert. Der Drehimpuls dieses Endzustandes muss der gleiche sein, wie derjenige des Anfangszustandes  $\psi_{j_1, m_1}$ , weshalb sich (2,2) bei Drehungen des Koordinatensystems so transformieren muss, wie die Eigenfunktion  $\psi_{j_1, m_1}$ . Daher verhalten sich die Matrixelemente  $Q_{j,m}$  so wie die Koeffizienten der CLEBSCH-GORDAN-schen Reihe der Produktdarstellung  $\vartheta_j \times \vartheta_{j_2}$  der Drehgruppe<sup>7</sup>).

Falls man sich für die Charakteristik der Strahlung interessiert, so hat man den Erwartungswert von (2,2) bezüglich der Koordinaten des Atomkerns zu bilden. Da die Funktionen  $\psi_{j_2, m_2}$  mit verschiedenen  $m_2$  orthogonal sind, addieren sich die Beiträge mit verschiedenen  $m$  inkohärent. Dies entspricht auch der Rotations-symmetrie des Problems um die  $z$ -Achse.

Beobachtet man die Strahlung in der Richtung  $\vartheta, \varphi$  und im

Polarisationszustände  $a_\vartheta, a_\varphi$  ( $|a_\vartheta|^2 + |a_\varphi|^2 = 1$ ), dann findet man für die Intensität:

$$J(\vartheta, \vec{a}) \sim \sum_m \left| \left( a_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + a_\varphi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{j,m}(\vartheta, \varphi) Q_{j,m}(j_1 m_1) + \left( a_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - a_\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) Y_{j-1,m}(\vartheta, \varphi) M_{j-1,m}(j_1 m_1) \right|^2 \quad (2,3)$$

Hier ist berücksichtigt, dass neben der elektrischen Multipolstrahlung der Ordnung  $j$  noch eine magnetische Strahlung der Ordnung  $j-1$  auftreten kann, die zur elektrischen Strahlung kohärent ist.

Die Änderung der Parität des Zustandes des Atomkerns ist stets  $(-1)^j$ .

Falls entweder  $j_1 = j + j_2$  oder  $j_2 = j + j_1$  ist, so tritt keine magnetische Strahlung auf; die  $M_{j-1,m}$  verschwinden. Die  $Q_{j,m}$  sind dann, bis auf einen gemeinsamen von  $m$  unabhängigen Faktor, wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} j_1 &= j + j_2 \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) &\sim \binom{j_1 + m_1}{j + m}^{1/2} \binom{j_1 - m_1}{j - m}^{1/2} \\ j_2 &= j_1 + j \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) &\sim (-1)^m \binom{j + j_1 + m_1 - m}{j - m}^{1/2} \binom{j + j_1 - m_1 + m}{j + m}^{1/2} \end{aligned} \quad (2,4)$$

$\left[ \binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}; \text{ falls im Nenner ein Argument negativ wird, verschwindet der Binomialkoeffizient per definitionem.} \right]$

Ein Spezialfall, der in (2,4) nicht enthalten ist, ist der Übergang  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}, j = 1$ . Hier sind die  $Q_{j,m}$  wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} Q_{1,0}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= Q_{1,0}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 1 \\ Q_{1,1}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= Q_{1,-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2,5)$$

Wenn hingegen  $j_1 = j + j_2 - 1$  oder  $j_2 = j + j_1 - 1$  ist, tritt eine magnetische Strahlung der Ordnung  $j-1$  auf. Die  $M_{j-1,m}$  sind wiederum durch (2,4) bzw. (2,5) gegeben, wobei natürlich  $j$  durch



$j - 1$  zu ersetzen ist. Weiter tritt eine elektrische Multipolstrahlung auf. Es gilt:

$$\begin{aligned} j_1 &= j + j_2 - 1 \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) &\sim \binom{j_1 + m_1}{j + m - 1}^{1/2} \binom{j_1 - m_1 + 1}{j - m}^{1/2} \sqrt{(j + m)(j_1 + 1 - m_1)} \\ &- \binom{j_1 + m_1 + 1}{j + m}^{1/2} \binom{j_1 - m_1}{j - m - 1}^{1/2} \sqrt{(j - m)(j_1 + m_1 + 1)} \end{aligned} \quad (2,6)$$

$$\begin{aligned} j_2 &= j + j_1 - 1 \\ Q_{j,m}(j_1, m_1) &\sim (-1)^m \left[ \binom{j_1 + j + m_1 - m - 1}{j - m}^{1/2} \binom{j_1 + j - m_1 + m - 1}{j + m - 1}^{1/2} \right. \\ &\quad \cdot \sqrt{(j_1 + m_1)(j + m)} \\ &\quad \left. - \binom{j_1 + j + m_1 - m - 1}{j - m - 1}^{1/2} \binom{j_1 + j - m_1 + m - 1}{j + m}^{1/2} \sqrt{(j_1 - m_1)(j - m)} \right] \end{aligned} \quad (2,7)$$

Diese Ausdrücke für  $Q_{j,m}$ ,  $M_{j-1,m}$  sind in die Formel (3,3) einzusetzen. Dabei ist das Verhältnis von Phase und Intensität der elektrischen und magnetischen Strahlung durch einen komplexen Faktor zu berücksichtigen. Dieser kann aus einem Modell für die Strahlungsquelle berechnet werden, oder man kann gegebenenfalls versuchen, ihn aus der Erfahrung zu bestimmen.

### 3. Korrelation nacheinander emittierter $\gamma$ -Quanten.

Wir betrachten zwei hintereinander folgende Emissionsprozesse eines Atomkerns, bei welchen dieser von seinem Anfangszustand mit dem Impulsmoment  $j_1$  in den einen Zwischenzustand mit dem Impulsmoment  $j_2$  und hierauf in den Endzustand mit dem Impulsmoment  $j_3$  übergeht. Dabei werden zwei Lichtquanten ausgestrahlt, die in den Richtungen  $\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi'$  beobachtet werden, und zwar unter den Polarisationsrichtungen  $\vec{a}, \vec{a}'$ .

Wir interessieren uns für die Korrelation von Richtung und Polarisation der ausgestrahlten Lichtquanten, falls im Anfangszustand keine Richtung bevorzugt ist, d. h. alle  $m_1$  gleich wahrscheinlich sind. Auf Grund des Drehimpulssatzes erhält man für die Korrelationsfunktion  $W(\theta, \vec{a}, \vec{a}')$  —  $\theta$  ist hier der Winkel zwischen den Richtungen  $\vartheta, \varphi; \vartheta', \varphi'$ , — Ausdrücke folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} W(\theta, \vec{a}, \vec{a}') &= \sum_{m_1} \sum_{m'} \left| \left( a_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + a_{\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( a'_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta'} + a'_{\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right) \right. \\ &\quad \left. \sum_m Y_{j,m}(\vartheta, \varphi) Y_{j',m'-m}(\vartheta', \varphi') Q_{j,m}(j_1, m_1) Q_{j',m'-m}(j_2, m_1 - m) \right|^2 \end{aligned} \quad (3,1)$$

Diese Formel gilt, falls z. B.  $j_1 = j_2 + j$ ;  $j_2 = j_3 + j'$  angenommen wird. Die  $Q_{j,m}$ ;  $Q_{j',m'}$  sind dann wiederum durch (2,4) gegeben. Dass der Ausdruck (3,1) nur von  $\theta$  abhängt, ist eine Folge der Struktur der  $Q_{j,m}$  und entspricht einem verallgemeinerten Additionstheorem von Kugelfunktionen. Dadurch kommt die Symmetrie des Problems zum Ausdruck.

Es ist daher zweckmässig,  $\vartheta = 0$ ,  $\varphi = \varphi' = 0$  zu setzen.

Weiter wollen wir die Polarisation durch zirkular polarisierte Komponenten beschreiben:

$$p_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm \frac{1}{i} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right); \quad a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\vartheta} \pm i a_{\varphi})$$

$$a_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + a_{\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = a_+ p_+ + a_- p_-$$

$$a_{\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - a_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = i (a_+ p_+ - a_- p_-) \quad (3,2)$$

$$\text{Nun gilt } (p_+ Y_{j,m})_{\vartheta=\varphi=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 1 \\ \left( \frac{2j+1}{8\pi j(j+1)} \right)^{1/2} & \text{für } m = 1 \end{cases}$$

$$(p_- Y_{j,m})_{\vartheta=\varphi=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq -1 \\ \left( \frac{2j+1}{8\pi j(j+1)} \right)^{1/2} & \text{für } m = -1 \end{cases} \quad (3,3)$$

Damit erhält man für die Korrelationsfunktion (N. B.  $\theta = \vartheta'$ ) im allgemeinsten Falle

$$W(\vartheta', \vec{a}, \vec{a}') =$$

$$\sum_{m_1} \sum_{m'} \left| \left[ a_+ Q_{j,1}(j_1, m_1) + i a_+ \sqrt{\frac{(2j-1)(j+1)}{(2j+1)(j-1)}} \cdot M_{j-1,1}(j_1, m_1) \right] \right.$$

$$\cdot [(a'_+ p'_+ + a'_- p'_-) Y_{j',m'-1} Q_{j',m'-1}(j_2, m_1 - 1)$$

$$+ i (a'_+ p'_+ - a'_- p'_-) \cdot Y_{j'-1,m'-1} M_{j'-1,m'-1}(j_2, m_1 - 1)]$$

$$- \left[ a_- Q_{j,-1}(j_1, m_1) - i a_- \sqrt{\frac{(2j-1)(j+1)}{(2j+1)(j-1)}} \cdot M_{j-1,-1}(j_1, m_1) \right]$$

$$\cdot [(a'_+ p'_+ + a'_- p'_-) Y_{j',m'+1} Q_{j',m'+1}(j_2, m_1 + 1)$$

$$+ i (a'_+ p'_+ - a'_- p'_-) Y_{j'-1,m'+1} M_{j'-1,m'+1}(j_2, m_1 + 1)] \Big|^2 \quad (3,4)$$

Auch hier sind, je nach den Gleichungen, die zwischen  $j_1, j_2, j_3, j, j'$  bestehen, die Multipolmomente durch (2,4) bis (2,7) gegeben. Wieder ist dem Verhältnis zwischen den elektrischen und magnetischen Momenten mit Hilfe komplexer Faktoren Rechnung zu tragen.

Leider scheint es unmöglich zu sein, die in den Formeln (2,3) und (3,4) auftretenden Summen allgemein auszuführen. Die Ergebnisse von Hamilton sind in dieser Hinsicht jedenfalls nicht ermutigend.

#### 4. Richtungsverteilung von Konversionselektronen.

Für weiche  $\gamma$ -Strahlen, die ein Kern emittiert, kann die Konversion der Strahlung in Elektronen beträchtlich sein. Man kann auch die Charakteristik der Konversionselektronen angeben. Die hierfür massgebenden Formeln sind aus zwei Gründen einfacher als im Falle der Strahlungscharakteristik. Hier treten nämlich die Kugelfunktionen selber auf und nicht ihre Ableitungen. Da man zudem die Polarisierung der Elektronen, d. h. ihre Spinorientierung, nicht beobachtet, so addieren sich die magnetischen und die elektrischen Übergänge inkohärent.

Das sieht man wohl am einfachsten wie folgt ein:

Wir betrachten die Emission eines  $K$ -Elektrons. Die beiden  $K$ -Elektronen bilden einen Singulett-Zustand. Bei elektrischer Konversion bildet das herausgeworfene Elektron mit dem verbleibenden  $K$ -Elektron einen Singulett-Zustand, bei magnetischer Konversion bilden jedoch diese Teilchen einen Triplett-Zustand. Diese beiden Zustände sind jedoch bei Summation über die Spinrichtungen orthogonal und addieren sich somit inkohärent. Man kann deshalb elektrische und magnetische Übergänge in diesem Falle getrennt betrachten. Die zugehörigen Elektronenintensitäten sind jeweils zu addieren.

Geht ein Kern im Zustande  $j_1 m_1$  durch Konversion eines  $K$ -Elektrons in den Zustand  $j_2$  über, so ist im Falle elektrischer Strahlung die Charakteristik der Elektronenintensität einfach:

$$J(\vartheta) = \sum_m |Q_{j,m}(j_1, m_1)|^2 \cdot |Y_{j,m}(\vartheta)|^2 \quad (4,1)$$

Für magnetische Übergänge erhält man 3 Terme, die den drei Termen des Triplett-Zustandes entsprechen. Bei einem magnetischen Übergang der Ordnung  $j-1$  wird ein Elektron mit dem Bahndrehimpuls  $j-2$  ausgesandt. Dieser Bahndrehimpuls muss sich mit dem

Spindrehimpuls 1 des Triplets zum Gesamtimpuls  $j-1$  zusammensetzen. Sei  $S_m$  die Spinfunktion ( $m=0,1,-1$ ), dann muss sich

$$\sum_{m'} Y_{j-2, m'} c_{m', m-m'}^{j-1} S_{m-m'} \quad (4,2)$$

wie  $Y_{j-1, m}$  transformieren. Es ist deshalb in diesem Falle

$$J(\vartheta) = \sum_m |M_{j-1, m}|^2 \left\{ |Y_{j-2, m-1}^{(\vartheta)}|^2 \frac{(j+m-1)(j+m-2)}{2} + |Y_{j-2, m}^{(\vartheta)}|^2 ((j-1)^2 - m^2) + |Y_{j-2, m+1}^{(\vartheta)}|^2 \frac{(j-m-1)(j-m-2)}{2} \right\} \quad (4,3)$$

Wenn der Kern zwei Übergänge hintereinander ausführt, wobei beim ersten Übergang an Stelle eines Lichtquants ein Konversions-Elektron ausgesandt wird, dann kann nach der Korrelation des Elektrons mit dem beim zweiten Übergange ausgestrahlten Lichtquant gefragt werden. Man wird zweckmässig die  $z$ -Achse in die Richtung des Elektrons legen. Ist der erste Übergang elektrischer Natur, so erhält man für die Korrelationsfunktion

$$W(\vartheta, \vec{a}) = \sum_{m_1} \sum_{m'} |Q_{j, 0}(j_1, m_1)|^2 \cdot |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'} \cdot Q_{j', m'}(j_2, m_1) + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'} M_{j'-1, m'}(j_2, m_1)|^2 \quad (4,4)$$

Wenn der erste Übergang dagegen magnetischer Natur ist, so gilt

$$W(\vartheta, \vec{a}) = \sum_{m_1} \sum_{m'} \left\{ |M_{j-1, 1}(j_1, m_1)|^2 |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'-1} Q_{j', m'-1}(j_2, m_1-1) + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'-1} M_{j'-1, m'-1}(j_2, m_1-1)|^2 \frac{j(j-1)}{2} + |M_{j-1, 0}(j_1, m_1)|^2 |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'} Q_{j', m'}(j_2, m_1) + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'} M_{j'-1, m'}(j_2, m_1)|^2 (j-1)^2 + |M_{j-1, -1}(j_1, m_1)|^2 |(a_+ p_+ + a_- p_-) Y_{j', m'+1} Q_{j', m'+1}(j_2, m_1+1) + i(a_+ p_+ - a_- p_-) Y_{j'-1, m'+1} M_{j'-1, m'+1}(j_2, m_1+1)|^2 \frac{j(j-1)}{2} \right\} \quad (4,5)$$

Im allgemeinen sind die Ausdrücke (4,4) und 4,5) mit passenden Gewichten zu addieren.

Im Falle, dass das zweite Lichtquant konvertiert wird, kann die Korrelationsfunktion in der entsprechenden Art auch ohne Mühe angegeben werden.

Basel, Seminar für theoretische Physik.

#### LITERATUR.

- <sup>1)</sup> S. FLÜGGE, Annalen d. Phys. **39** (1941) 373.
  - <sup>2)</sup> BERTHELOT, Annales de Chimie et de Physique **19** (1944) 117, 219;  
M. L. WIEDENBECK, Phys. Rev. **69** (1946), 567.
  - <sup>3)</sup> BERESTETCKY, Journ. of Phys. U.S.S.R. **XI**, 85 (1947).
  - <sup>4)</sup> D. R. HAMILTON, Phys. Rev. **58**, 122 (1940); **74**, 782 (1948).
  - <sup>5)</sup> C. N. YANG, Phys. Rev. **74**, 764 (1948).
  - <sup>6)</sup> W. HEITLER, Proc. Camb. Phil. Soc. **32**, 112 (1936).
  - <sup>7)</sup> B. L. VAN DER WAERDEN, Die gruppentheoretische Methode, Berlin 1932.
-