Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 22 (1949)
Heft: IV

Artikel: Beitrag zur Messung von Erschütterungen
Autor: Weber, Max
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-112010

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beitrag zur Messung von Erschütterungen

von **Max Weber.**

(22. III. 1949.)

Zusammenfassung: Die allgemeinste für die Erschütterungsmesstechnik in Betracht zu ziehende Bewegung wird theoretisch untersucht. Es werden die theoretischen Grundlagen zum Bau eines Erschütterungsmessers mit einfachster Frequenzkennlinie gegeben und die Messgenauigkeit untersucht. Ferner wird dargelegt, wie eine einwandfreie Eichung und Messung durchzuführen ist. Es wird ein Beschleunigungsmesser gebaut und im Sinne der entwickelten Theorie vollständig ausgemessen. Die erreichten Empfindlichkeiten sind für die praktischen Bedürfnisse ausreichend.

Summary: The most general vibration is considered theoretically. The theoretical basis for the construction of a vibration meter with simple frequency characteristic is given, and accuracy of measurement is determined. Indications are given, how to carry out calibration and measurement. An accelerometer has been constructed, and calibrated in accordance with the above-mentioned theory, sensitivity attained being sufficient for practical purposes.

I. Theoretische Grundlagen.

§ 1. *Allgemeines über Erschütterungsmesser.*

Erschütterungen sind kleine Verrückungen. Sie können, wie z. B. in Fahrzeugen, auch einer beliebigen Bewegung überlagert sein. Daher sind zu ihrer Beschreibung im allgemeinen drei Koordinatensysteme, d. h. das Absolutsystem S_1 und zwei Relativsysteme S_2 und S_3 notwendig.

Ein Erschütterungsmesser, auch Schwingungsmesser oder Seismograph genannt, besteht aus einem starren Rahmen oder Gehäuse, in dem ein mechanisches System so befestigt ist, dass es kleine Bewegungen um eine stabile Gleichgewichtslage ausführen kann. Der starre Teil des Erschütterungsmessers heisst „Gestell", der bewegliche „Gehänge".

Unter der Vielzahl der möglichen Gehänge interessieren besonders diejenigen, deren Massenelemente sich, wenigstens näherungsweise, auf geradlinigen Bahnen bewegen. (Lineare Vergrösserung.)

*

§ 2. *Die Beschleunigung, mit der ein beliebiges Massenelement des Gehänges belastet wird.*

Bewegt sich das Gestell, so wird sich das Gehänge infolge der veränderlichen Belastungen $\mathfrak{b}$ durch die Zentrifugalbeschleunigungen $-\ddot{\mathfrak{p}}_1$ und die Schwerebeschleunigung $\mathfrak{g}$ relativ zum Gestell bewegen. (Die Coriolis-Kraft ergibt für eine geführte Bewegung keinen Anteil zur Bewegungsgleichung.) Es genügt im vorliegenden Fall, anzunehmen, die Belastung sei unabhängig von den kleinen Auslenkungen des Gehänges aus seiner Ruhelage. Die Belastung $\mathfrak{b}$ eines beliebigen Massenelementes dm des Gehänges ist daher so zu berechnen, wie wenn das Element in seiner Ruhelage, bezeichnet durch den Punkt P, festgehalten würde.

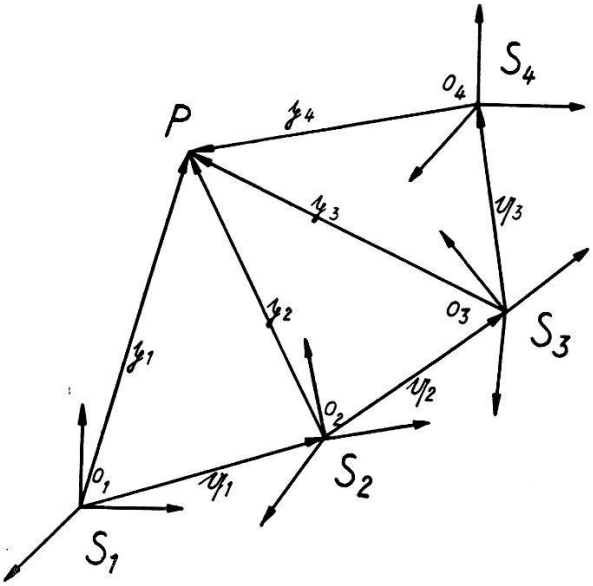

Fig. 1.

Darstellung der eingeführten Koordinatensysteme und Vektoren. Es bedeuten: O_j Ursprung des Systems S_j; $\mathfrak{p}_j$ Ortsvektor des Punktes P im System S_j; $\mathfrak{q}_j$ Ortsvektor des Ursprungs O_{j+1} im System S_j. ($j = 1, 2, 3, 4$).

Die eingeführten rechtwinkligen Koordinatensysteme S_1, S_2 und S_3, ein viertes, später noch einzuführendes System S_4 mit eingeschlossen, sowie die zur Beschreibung der Lage des Punktes P und der Koordinatenzentren O_j notwendigen Vektoren $\mathfrak{p}_j$ und $\mathfrak{q}_j$ sind in Fig. 1 dargestellt. Die Bedeutung der zur Beschreibung der Drehungen der Systeme gegeneinander notwendigen $\sphericalangle$ — Koordinaten ψ_1; φ_1; χ_1 und ψ_2; φ_2; χ_2 geht aus Fig. 2 hervor. (Lit. 4.)

Die Komponenten von $\mathfrak{q}_j$ im System S_j sind ξ_j; η_j; ζ_j

Die Komponenten von $\mathfrak{p}_j$ im System S_j sind x_j; y_j; z_j.

Für die Berechnung von $\mathfrak{b}$ werden die folgenden Begriffe und Bezeichnungen verwendet. Sind die beiden rechtwinkligen Systeme S und S' mit gleichen Einheiten auf den Achsen und der Vektor $\mathfrak{v}$ mit den Komponenten x; y; z im System S und den Komponenten x';

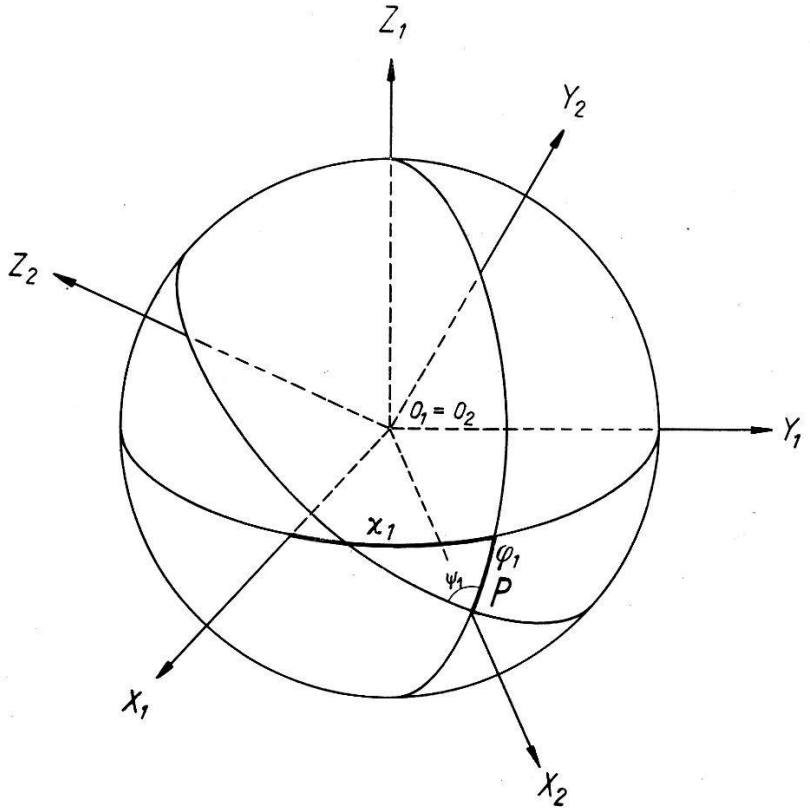

Fig. 2.

Zur Beschreibung der Drehung des Systems S_2 in bezug auf das System S_1. Analog wie S_2 zu S_1 wird mit Hilfe der $\sphericalangle$-Koordinaten ψ_2; φ_2; χ_2 die Drehung des Systems S_3 in bezug auf das System S_2 festgelegt.

y'; z' im System S' vorgegeben, so bestehen die Gleichungen (Transformationsformeln):

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ y' &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z \\ z' &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

oder zusammengefasst

$$\mathfrak{v}(S') = \mathfrak{A}\,\mathfrak{v}(S),$$

wobei $\mathfrak{A} = (a_{jk})$ die orthogonale Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bedeutet. Die Gleichung

$$\mathfrak{v}(S) = \mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{v}(S')$$

stellt in abgekürzter Schreibweise die nach x; y; z aufgelösten Gleichungen (1) dar, wobei $\mathfrak{A}^{-1}$ die zu $\mathfrak{A}$ inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bedeutet, d. h.

$$\mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Sind $\mathfrak{B} = (b_{jk})$ und $\mathfrak{P} = (p_{jk})$ analoge Matrizen, so bedeutet das Produkt $\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ die Matrix mit den Elementen

$$p_{jk} = a_{j1}\, b_{1k} + a_{j2}\, b_{2k} + a_{j3}\, b_{3k}.$$

Die Elemente der durch $\mathfrak{P}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ definierten Matrix $\mathfrak{P}' = (p'_{jk})$ erhält man aus der Gleichung

$$p'_{jk} = a_{jk} + b_{jk}.$$

Mit $d^n/dt^n\,\mathfrak{A}$ soll die Matrix $(d^n/dt^n\, a_{jk})$ bezeichnet werden.

Die Beschleunigung $\mathfrak{b}$ ergibt sich aus der Gleichung:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{g} - \ddot{\mathfrak{p}}_1 \qquad \left[\ddot{\mathfrak{p}}_1 = \frac{d^2}{dt^2}\,\mathfrak{p}_1; \quad t = \text{Zeit}\right]. \tag{2}$$

Stellt die orthogonale Matrix $\mathfrak{F}$ die Drehung des Systems S_2 gegenüber dem System S_1 und die orthogonale Matrix $\mathfrak{C}$ die Drehung des Systems S_3 gegenüber dem System S_2 dar, so erhält man $\ddot{\mathfrak{p}}_1(S_1)$ durch folgende Operationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 + \mathfrak{p}_3 \\ \mathfrak{p}_1(S_1) &= \mathfrak{q}_1(S_1) + \mathfrak{F}^{-1}\,\mathfrak{q}_2(S_2) + \mathfrak{F}^{-1}\,\mathfrak{C}^{-1}\,\mathfrak{p}_3(S_3) \\ \ddot{\mathfrak{p}}_1(S_1) &= \ddot{\mathfrak{q}}_1(S_1) + \frac{d^2}{dt^2}\left[\mathfrak{F}^{-1}\,\mathfrak{q}_2(S_2)\right] + \frac{d^2}{dt^2}\,\mathfrak{F}^{-1}\,\mathfrak{C}^{-1}\,\mathfrak{p}_3(S_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Damit ergibt sich für $\mathfrak{b}(S_3)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(S_3) &= \mathfrak{C}\mathfrak{F}\left[\mathfrak{g}(S_1) - \ddot{\mathfrak{p}}_1(S_1)\right] \\ \mathfrak{b}(S_3) &= \mathfrak{C}\left\{\mathfrak{F}\left[\mathfrak{g}(S_1) - \ddot{\mathfrak{q}}_1(S_1)\right] - \mathfrak{R}\,\mathfrak{q}_2(S_2) - 2\,\mathfrak{R}_1\dot{\mathfrak{q}}_2(S_2) - \ddot{\mathfrak{q}}_2(S_2)\right\} \\ &\quad - \left[\mathfrak{C}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{C}^{-1} + 2\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{R}_1\frac{d}{dt}\,\mathfrak{C}^{-1} + \mathfrak{Q}\right]\mathfrak{p}_3(S_3) \end{aligned} \tag{4}$$

mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{Q} = (Q_{jk}) = \mathfrak{C}\,\frac{d^2}{dt^2}\,\mathfrak{C}^{-1}; \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{F}\,\frac{d^2}{dt^2}\,\mathfrak{F}^{-1}; \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{F}\,\frac{d}{dt}\,\mathfrak{F}^{-1};$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2\cos\chi_2 & \cos\varphi_2\sin\chi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\psi_2\sin\varphi_2\cos\chi_2 - \cos\psi_2\sin\chi_2; & \sin\psi_2\sin\varphi_2\sin\chi_2 + \cos\psi_2\cos\chi_2; & \sin\psi_2\cos\varphi_2 \\ \cos\psi_2\sin\varphi_2\cos\chi_2 + \sin\psi_2\sin\chi_2; & \cos\psi_2\sin\varphi_2\sin\chi_2 - \sin\psi_2\cos\chi_2; & \cos\psi_2\cos\varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente von $\mathfrak{Q} = (Q_{jk})$ sind in einer Arbeit von F. GASSMANN (Lit. 4) veröffentlicht. Sie haben folgende Werte:

$$Q_{11} = -\dot{\chi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2,$$

$$Q_{12} = -\ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \sin \psi_2 + \ddot{\varphi}_2 \sin \psi_2 + 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_2 + 2\,\dot{\varphi}_2\,\dot{\psi}_2 \cos \psi_2,$$

$$Q_{13} = \ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \psi_2 + \ddot{\varphi}_2 \cos \psi_2 + 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\psi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 - 2\,\dot{\varphi}_2\,\dot{\psi}_2 \sin \psi_2,$$

$$Q_{21} = \ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \sin \psi_2 - \ddot{\varphi}_2 \sin \psi_2 - 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \cos \psi_2,$$

$$Q_{22} = -\dot{\chi}_2^2 (\sin^2 \varphi_2 \sin^2 \psi_2 + \cos^2 \psi_2) - \dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \psi_2 - \dot{\psi}_2^2 + 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 + 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\psi}_2 \sin \varphi_2,$$

$$Q_{23} = \ddot{\chi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\chi}_2^2 \cos^2 \varphi_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 - \ddot{\psi}_2 + 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \cos^2 \psi_2,$$

$$Q_{31} = -\ddot{\chi}_2 \cos \varphi_2 \sin \psi_2 - \dot{\chi}_2^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \psi_2 - \ddot{\varphi}_2 \cos \psi_2 + 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \sin \psi_2,$$

$$Q_{32} = -\ddot{\chi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\chi}_2^2 \cos^2 \dot{\varphi}_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 + \ddot{\psi}_2 - 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \sin^2 \psi_2,$$

$$Q_{33} = -\dot{\chi}_2^2 (\sin^2 \varphi_2 \cos^2 \psi_2 + \sin^2 \psi_2) - \dot{\varphi}_2^2 \cos^2 \psi_2 - \dot{\psi}_2^2 - 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \cos \psi_2 \sin \psi_2 + 2\,\dot{\chi}_2\,\dot{\psi}_2 \sin \varphi_2.$$

Ersetzt man in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Q}$ die Winkel ψ_2; φ_2; χ_2 durch ψ_1; φ_1; χ_1, so erhält man $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{R}$. Ferner ist

$$\mathfrak{R}_1 = \begin{pmatrix} 0; & \dot{\varphi}_1 \sin \psi_1 - \dot{\chi}_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1; & \dot{\varphi}_1 \cos \psi_1 + \dot{\chi}_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_1 \\ -\dot{\varphi}_1 \sin \psi_1 + \dot{\chi}_1 \cos \psi_1 \cos \varphi_1; & 0; & -\dot{\psi}_1 + \dot{\chi}_1 \sin \varphi_1 \\ -\dot{\varphi}_1 \cos \psi_1 - \dot{\chi}_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_1; & \dot{\psi}_1 - \dot{\chi}_1 \sin \varphi_1; & 0 \end{pmatrix}.$$

Im allgemeinen wird der Erschütterungsmesser im System S_3 eine beliebige Lage innehaben und somit das System S_3 nicht mehr das dem Gehänge am besten angepasste Bezugssystem darstellen. Daher wird ein viertes Koordinatensystem S_4 eingeführt, das mit dem System S_3 starr verbunden ist. Beschreibt man die Drehung des Systems S_4 in bezug auf das System S_3 mit Hilfe der Matrix

$$\mathfrak{Y} = (c_{jk}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \cos \gamma_3 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich für die Belastung $\mathfrak{b}(S_4)$

$$\mathfrak{b}\,(S_4) = \mathfrak{Y}\,\mathfrak{b}\,(S_3). \tag{5}$$

Dabei hat man in $\mathfrak{b}(S_3)$ (Gleichung (4)) für $\mathfrak{p}_3(S_3)$ den Ausdruck $\mathfrak{q}_3(S_3) + \mathfrak{Y}^{-1}\,\mathfrak{p}_4(S_4)$ zu setzen.

Ordnet man $\mathfrak{b}(S_4)$ nach den Komponenten von $\mathfrak{p}_4(S_4)$ so erhält man

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}\,(S_4) = {} & \mathfrak{e}_{4x}\,(Q_1'' - x_4\,Q_{11}'' - y_4\,Q_{12}'' - z_4\,Q_{13}'') \\ & + \mathfrak{e}_{4y}\,(Q_2'' - x_4\,Q_{21}'' - y_4\,Q_{22}'' - z_4\,Q_{23}'') \\ & + \mathfrak{e}_{4z}\,(Q_3'' - x_4\,Q_{31}'' - y_4\,Q_{32}'' - z_4\,Q_{33}''),\end{aligned} \tag{6}$$

wobei die $\mathfrak{e}_{4x}$; $\mathfrak{e}_{4y}$; $\mathfrak{e}_{4z}$ die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen von S_4, die Q_j'' die Translations- und Schwereanteile und die Q_{jk}'' die Rotationsanteile von $\mathfrak{b}$ darstellen.

§ 3. *Erschütterungsmesser mit einem Freiheitsgrad.*

Ist die Rückstellkraft proportional der Auslenkung und die Dämpfung proportional der Geschwindigkeit, so erhält man (Lit. 5) als Indikatorgleichung des Erschütterungsmessers mit einem Freiheitsgrad:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = \sum_{j=1}^{3} V_j'\,Q_j'' + \sum_{j,k}^{1,2,3} V_{jk}'\,Q_{jk}''. \tag{7}$$

(s = Indikatorausschlag; D = Dämpfungsfaktor; $\nu_0/2\,\pi$ = reduzierte Eigenfrequenz; V_j' und V_{jk}' sind die Übertragungsfaktoren des Erschütterungsmessers, bezogen auf das System S_4; die Q_j'' und Q_{jk}'' sind der Gleichung (6) zu entnehmen.)

Ist das System S_2 mit dem System S_1 identisch, so geht die Gleichung (7) über in

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = \sum_{j=1}^{3} V_j'\,Q_j' + \sum_{j,k}^{1,2,3} V_{jk}'\,Q_{jk}', \tag{8}$$

und ist das System S_4 mit dem System S_3 und das System S_2 mit dem System S_1 identisch, so reduzieren sich die Grössen Q_j' und Q_{jk}' auf Q_j und Q_{jk} und die Indikatorgleichung wird

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = \sum_{j=1}^{3} V_j\,Q_j + \sum_{j,k}^{1,2,3} V_{jk}\,Q_{jk}. \tag{9}$$

(V_j; V_{jk} = Übertragungsfaktoren, bezogen auf S_3)

Zwischen den Grössen V_j; V_{jk}; Q_j; Q_{jk} und V_j'; V_{jk}'; Q_j'; Q_{jk}' bestehen mit $\tau_1 = \xi_3$; $\tau_2 = \eta_3$ und $\tau_3 = \zeta_3$ die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} Q_j &= \sum_k c_{kj} Q_j' + \sum_{k,l,m} c_{lj} c_{mk} \tau_k Q_{lm}', \\ Q_{jk} &= \sum_{l,m} c_{lj} c_{mk} Q_{lm}', \\ V_k' &= \sum_j c_{kj} V_j, \\ V_{jk} &= \sum_{l,m} c_{lj} c_{mk} (\tau_k V_j + V_{jk}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ein Erschütterungsmesser soll in bezug auf ein gegebenes System S_n ein Grundtypus genannt werden, wenn von den zwölf Übertragungsfaktoren, bezogen auf S_n, ein einziger von Null verschieden ist. Es gibt drei Arten von Grundtypen. Beispielsweise auf S_3 bezogen, liegt der erste, zweite oder dritte Grundtypus vor, je nachdem ein V_j, ein V_{jk} $(j \neq k)$ oder ein V_{jj} von Null verschieden ist.

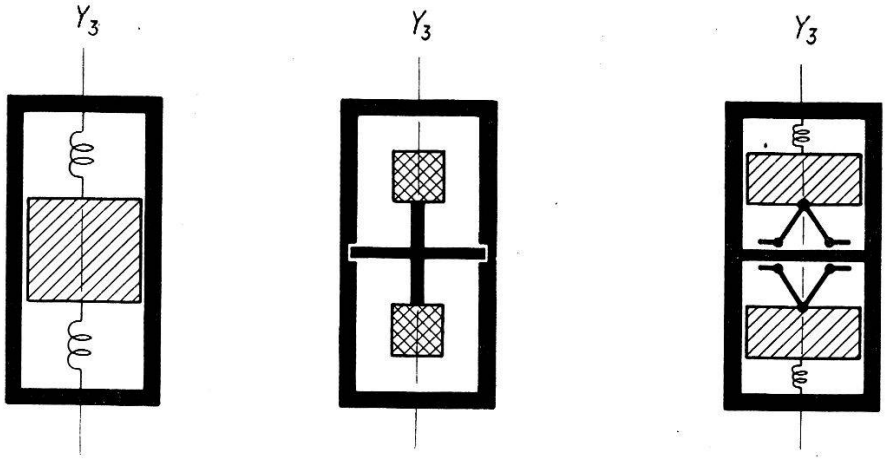

Fig. 3.
Die drei Grundtypen von Erschütterungsmessern.

Beispiele: Die Arbeitsrichtung der Erschütterungsmesser sei parallel zur y_3-Achse.

1. Grundtypus: $V_2 \neq 0$.

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Alle Lagekoordinaten Null, ausser η_2:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = -V_2 \ddot{\eta}_2. \tag{11}$$

2. Grundtypus: $V_{21} \neq 0$.

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Alle Lagekoordinaten Null, ausser χ_2:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = +V_{21} \ddot{\chi}_2. \tag{12}$$

3. Grundtypus: $V_{11} \neq 0$.

Beispiel einer Bewegungsgleichung: Alle Lagekoordinaten Null, ausser χ_2:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s = -V_{11}\dot{\chi}_2^2. \tag{13}$$

Um über die Wirkungsweise von Erschütterungsmessern Aufschluss zu erlangen, betrachte man z. B. Gleichung (11). Mit der Annahme, η_2 sei harmonisch, also $\eta_2 = \eta_0 e^{i\omega t}$ $(i = \sqrt{-1})$ (allgemeinere Funktionen durch Zusammensetzung nach Fourier) erhält man als stationäre Lösung von Gleichung (11)

$$s = s_0 e^{i(\omega t - \vartheta)}$$

$$s_0(\omega) = V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega); \quad W(\omega) = \frac{1}{+\sqrt{(\nu_0^2 - \omega^2)^2 + D^2\omega^2}}; \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{D\omega}{\nu_0^2 - \omega^2}; \qquad 0 < \vartheta < \pi.$$

Ist $\omega \ll \nu_0$ und $D = o$, so ergibt sich aus Gleichung (14) für den Indikatorausschlag s:

$$s \cong \frac{V_2}{\nu_0^2}\eta_0 \omega^2 e^{i\omega t} \cong -\frac{V_2}{\nu_0^2}\ddot{\eta}_2, \tag{15}$$

d. h. der Erschütterungsmesser ist ein idealer *Beschleunigungsmesser*.

Zweifellos stellt Gleichung (15) die erstrebte Lösung dar. Dagegen sind in praxi die beiden Bedingungen $\omega \ll \nu_0$ und $D = 0$ oft nicht realisierbar.

Bei der Dimensionierung des Beschleunigungsmessers frägt es sich daher, wie gross ν_0 sein muss, und welcher Dämpfungsfaktor D noch zulässig ist, damit bei vorgegebener oberer Schranke ω_b von ω (allgemein durch Filter realisierbar, siehe § 9) die maximale Amplitudenüberhöhung den Betrag von m_b% und die maximale Phasenverschiebung den Betrag von ϑ_b^0 nicht überschreitet.

m_b (lineare Verzerrung) sei durch folgende Gleichung definiert:

$$1 + \frac{m_b}{100} = \frac{W(\omega)}{W(0)}.$$

Aus Gleichung (14) erhält man damit als Bedingung für ν_0:

$$\frac{1}{\nu_0} \leqq \frac{1}{\omega_b}\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_b}{100}\right)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta_b}}}, \tag{16}$$

und für D:

$$D \leqq \frac{\nu_0^2 - \omega^2}{\omega}\,|\operatorname{tg}\vartheta_b|. \tag{17}$$

Ist $\omega \gg \nu_0$ und $D \simeq 0$, so ergibt sich aus der Gleichung (14) für den Indikatorausschlag s:

$$s \simeq V_2 \, \eta_0 \, e^{i\omega t} \simeq V_2 \, \eta_2 \, , \tag{18}$$

d. h. der Erschütterungsmesser arbeitet als idealer *Amplitudenmesser*.

Die Dimensionierung des Amplitudenmessers ist analog wie die des Beschleunigungsmessers. Bezeichnet man mit ω_a die untere Schranke von ω, mit m_a die maximale Amplitudenüberhöhung und mit ϑ_a die maximale Phasenverschiebung, so ergibt sich für ν_0

$$\nu_0 \leqq \omega_a \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_a}{100}\right)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_a}}} \, , \tag{19}$$

und für D

$$D \leqq \left| \frac{\nu_0^2 - \omega^2}{\omega} \operatorname{tg} \vartheta_a \right| . \tag{20}$$

Als Mass für nicht lineare Verzerrungen werde der *Klirrfaktor* eingeführt. Vorgegeben sei ein Übertragungsglied (Erschütterungsmesser, Schütteltisch, Verstärker), das die harmonische Funktion $a \sin \omega t$ in die periodische Funktion

$$a_0 + a_1 \sin(\omega t - \vartheta_1) + a_2 \sin(2\,\omega t - \vartheta_2) + \cdots$$
$$= \sum_0^\infty a_n \sin(n\,\omega t - \vartheta_n)$$

überführt. Als Klirrfaktor Γ dieses Übertragungsgliedes bezeichnet man (Lit. 19) die dimensionslose Grösse:

$$\Gamma = \frac{1}{|a_1|} \sqrt{\sum_2^\infty a_n^2} \, . \tag{21}$$

Beim Erschütterungsmesser sind nichtlineare Terme praktisch nur in der Rückstellkraft zu erwarten. Bleibt diese symmetrisch, so nimmt die Bewegungsgleichung folgende Form an:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s + \varepsilon_1 s^3 = V_2 \, \eta_0 \, \omega^2 \sin \omega t \, . \tag{22}$$

Zur Entwicklung der Lösung nach bekanntem Schema sei für die erste Näherung s_1 gesetzt und dafür $\varepsilon_1 = 0$ angenommen. In Gleichung (22) eingesetzt ergibt dies:

$$\ddot{s}_1 + D\dot{s}_1 + \nu_0^2 s_1 = V_2 \, \eta_0 \, \omega^2 \sin \omega t$$

und für s_1 erhält man:

$$s_1 = V_2 \, \eta_0 \, \omega^2 \, W(\omega) \sin(\omega t - \vartheta) \, .$$

Damit geht Gleichung (22) für die zweite Näherung über in:

$$\ddot{s}_2 + D\dot{s}_2 + \nu_0^2 s_2 + \varepsilon_1 s_{\mathrm{I}}^3 = V_2 \eta_0 \omega^2 \sin \omega t,$$

und für s_2 findet man:

$$s_2 = s_1 - \varepsilon_1 (V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega))^3 \left\{ \frac{3}{4} W(\omega) \sin(\omega t - 2\vartheta) - \frac{W(3\omega)}{4} \sin(3\omega t - 3\vartheta - \vartheta_1) \right\}. \tag{23}$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens ist es möglich, beliebig viele Glieder der Fourierreihe zu bestimmen.

Aus Gleichung (23) bestimmt man den Klirrfaktor Γ_s in erster Näherung zu:

$$\Gamma_s = \frac{\varepsilon_1 (V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega))^2 W(3\omega)}{4 \sqrt{1 - \frac{3}{2} \varepsilon_1 (V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega))^2 W(\omega) \cos \vartheta)}}. \tag{24}$$

Es sei noch beigefügt, dass, wie aus Gleichung (23) zu ersehen ist, mit der Bildung von „Obertönen" auch eine zusätzliche lineare Verzerrung verbunden ist.

Löst man ferner die Gleichung (24) nach $\eta_0 \omega^2$ auf, so erhält man die, bei vorgegebenem Klirrfaktor Γ_s, noch zulässige Beschleunigungsamplitude $\eta_0 \omega^2$:

$$(\eta_0 \omega^2)^2 = \frac{4 \Gamma_s}{\varepsilon_1 W^2(3\omega) [V_2 W(\omega)]^2} \cdot \left\{ -3 \Gamma_s W(\omega) \cos \vartheta + \sqrt{(3 \Gamma_s W(\omega) \cos \vartheta)^2 + W^2(3\omega)} \right\}.$$

Berücksichtigt man einen quadratischen Ergänzungsterm zur Rückstellkraft, so lautet die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + \nu_0^2 s + \varepsilon_2 s^2 = V_2 \eta_0 \omega^2 \sin \omega t.$$

Man berechnet den Klirrfaktor Γ_u analog dem Klirrfaktor Γ_s und erhält in erster Näherung:

$$\Gamma_u = \frac{1}{2} \varepsilon_2 V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega) W(2\omega).$$

Eine zusätzliche lineare Verzerrung entsteht in diesem Fall nicht. Dagegen wird der Schwingungsmittelpunkt angenähert um den Betrag $-\varepsilon_2 [V_2 \eta_0 \omega^2 W(\omega)]^2 / 2 \nu_0^2$ verlagert.

Ferner erhält man bei vorgegebenem Klirrfaktor Γ_u für die zulässige Beschleunigungsamplitude $\eta_0 \omega^2$:

$$\eta_0 \omega^2 = \frac{2 \Gamma_u}{\varepsilon_2 V_2 W(\omega) W(2\omega)}.$$

§ 4. *Der prismatische Stab ohne Einzelmasse als Erschütterungsmesser.*

Für einen Stab von konstantem Querschnitt q ergibt der Ansatz $l \cdot F_0(x_4)\, e^{i\omega t}$ für die Störung (allgemeinere Funktionen siehe § 3), eingeführt in die Differentialgleichung der Querschwingungen

$$\frac{\delta^2 w}{\partial t^2} + D\frac{\partial w}{\partial t} + H\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} = F_0(r)\, e^{i\omega t} \begin{pmatrix} w_1 = l\,w \\ x_4 = l\,r \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$H = \dfrac{EJ}{l^4 \varrho q}$; E = Elastizitätsmodul; J = Trägheitsmoment des Querschnittes; ϱ = Dichte; l = Stablänge; x_4 = Stabachse; w_1 = Ausschlag.

mit den Randbedingungen

$$r = 0: \quad w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

$$r = 1: \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} = 0$$

die Lösung (Lit. 13):

$$w\,(r, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n\, U_n(r)}{\nu_n^2 - \omega^2 - i\,D(\nu_n - \omega)}\,. \tag{26}$$

Dabei ist

$$\nu_n^2 - i\,D\nu_n - H\lambda_n = 0 \text{ oder } H\lambda_n = N_n^2 \text{ und } K_n = \int_0^1 F_0(r)\, u_n(r)\, dr,$$

(λ_n = Eigenwerte; u_n = normierte Eigenfunktionen).

Ist ω klein gegenüber ν_1, also auch gegenüber $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n$ (Beschleunigungsmesser), so geht Gleichung (26) über in

$$w_1(r, t) \cong e^{i\omega t}\, \frac{K_1\, u_1(r)}{N_1{}^2 - \omega^2 + i\,D\,\omega} = e^{i(\omega t - \vartheta)} \cdot \frac{K_1\, u_1(r)}{\sqrt{(N_1{}^2 - \omega^2)^2 + D^2\,\omega^2}}, \tag{27}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{D\,\omega}{N_1{}^2 - \omega^2}\,.$$

Soll der Stab als Erschütterungsmesser verwendet werden, so muss aus seinem Biegungszustand ein Indikator $s(t)$ hergestellt werden. Man gewinnt diesen, indem man der Funktion w_1 durch eine geeignete, physikalisch realisierbare Operation eine von r unabhängige Funktion $s(t)$ zuordnet. Nach Gleichung (27) wird dies erreicht, indem man der Funktion $u_1(r)$ eine Konstante Φ zuordnet, ($\Phi = u_1(1)$; $\Phi = \int_0^1 u_1(r)\, dr$ sind Beispiele solcher Zuordnungen) und

$$s(t) = \frac{K_1\, \Phi}{\sqrt{(N_1{}^2 - \omega^2)^2 + D^2\,\omega^2}}$$

setzt. Nach § 3 Gleichung (14) genügt s der Indikatorgleichung

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = \Phi K_1 e^{i\omega t}.$$

Zur Ermittlung des Klirrfaktors Γ_1 bedarf die Differentialgleichung (25) einer Erweiterung, d. h. in ihrer Herleitung ist für die Krümmung, an Stelle der ersten die zweite Näherung zu verwenden.

Damit lautet die Differentialgleichung der Bewegung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\frac{\partial w}{\partial t} + H\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} - \frac{3}{2}H\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right] = F_0(r)\, e^{i\omega t}.$$

Betrachtet man den nichtlinearen Term als Störungsglied, so ergibt sich für Γ_1 in erster Näherung mit Hilfe der Störungsrechnung

$$\Gamma_1 = \frac{\bar{K}_1}{K_1}\cdot\frac{\sqrt{(N_1^2-\omega^2)^2 + D^2\omega^2}}{\sqrt{(N_1^2-(3\omega)^2)^2 + D^2(3\omega)^2}},$$

$$\bar{K}_1 = \frac{3}{2}H e^{-3i\omega t}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial r}\right)^2\right] u_1\, dr.$$

Verwendet man einen piezoelektrischen Stab als Beschleunigungsmesser und S_4 als Bezugssystem (System S_2 identisch S_1) und lässt die Stabachse ($x_4 = 0$ bis $x_4 = l$) mit der x_4-Achse und die Schwingungsebene mit der (x_4; y_4)-Ebene zusammenfallen, so gibt von $\mathfrak{b}(S_4)$ nur die y_4-Komponente zu einer EMK Anlass, eine Tatsache, die aus Symmetriegründen zu erwarten ist und durch das Experiment bestätigt wird (siehe § 10).

Für die mit l multiplizierte rechte Seite von Gleichung (25) ist die y_4-Komponente von $\mathfrak{b}(S_4)$ einzusetzen, daher gilt

$$l\cdot F(r,t) = Q_2' - l\,r\,Q_{21}' = Q_2' - x_4 Q_{21}'.$$

Setzt man

$$Q_2'(t) = \sum_k a_k e^{i\omega_k t} \quad \text{und} \quad Q_{21}'(t) = \sum_k b_k e^{i\omega_k t},$$

so geht die Indikatorgleichung für den Stab über in

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = V_2' Q_2'(t) + V_{21}' Q_{21}'(t)\, r = \Phi\sum_k B_k e^{i\omega_k t}.$$

$$\left(V_2' = \frac{\Phi}{l}\int_0^1 u_1(r)\, dr;\ V_{21}' = -\Phi\int_0^1 r\, u_1(r)\, dr.\right)$$

Das System S_4 soll aus dem System S_3 durch eine Parallelverschiebung in Richtung der x_3-Achse um den Betrag $\tau_1 = -l/5$ hervorgehen. Es ist also $\tau_2 = \tau_3 = 0$ und $\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$. Nach den Transfor-

mationsformeln (10) wird dann $V_{21} = 0$ und $V_2 = V_2'$, so dass sich die Indikatorgleichung auf

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = V_2 Q_2(t)$$

reduziert.

Der Stab ist demnach für alle Störungsfrequenzen ω_k, die klein gegenüber N_1 sind, ein Beschleunigungsmesser vom ersten Grundtypus, d. h. auf der Stabachse existiert ein ausgezeichneter Punkt (neutraler Punkt) mit der Eigenschaft, dass alle Rotationen, um eine beliebige Achse durch den neutralen Punkt (ausgenommen der Schwereanteil), keinen Beitrag zur EMK geben.

Für den Amplitudenmesser ist die Dimensionierung analog dem Beschleunigungsmesser. Jedoch ist hier der Messbereich grundsätzlich beidseitig durch Resonanzstellen begrenzt.

Eine rohe Abschätzung des maximalen Messbereiches ergibt mit $\nu_1 = 0{,}4\ \nu_2$ und $\nu_2 = 0{,}59\ \nu_3$ (Lit. 14), z. B. für $\bar{\nu}_1 = 8$ Hz; $\bar{\nu}_2 = 20$ Hz und $\bar{\nu}_3 = 33{,}5$ Hz. Allein diese Zahlen zeigen zur Genüge, dass ein piezoelektrischer Stab ohne Einzelmasse als Amplitudenmesser wenig geeignet ist. Es lassen sich jedoch, wie aus verschiedenen Arbeiten, insbesondere aus einer Arbeit von F. Gassmann (Lit. 6) zu entnehmen ist, diese Resonanzstellen, unter zu Hilfenahme einer Einzelmasse am freien Ende derart auseinanderziehen, dass sich praktisch brauchbare Messbereiche ergeben.

§ 5. *Der prismatische Stab mit Einzelmasse als Erschütterungsmesser.*

Mit S_4 als Bezugssystem (S_2 identisch S_1), der x_4-Achse als Stabachse ($x_4 = 0$ bis $x_4 = l$), der $(x_4;\ y_4)$-Ebene als Schwingungsebene und der Einzelmasse M am Stabende $x_4 = l$, ergibt sich für praktisch ungedämpfte Querschwingungen des Stabes (kleine Dämpfungsfaktoren sind ohne merklichen Einfluss auf die lineare Verzerrung; siehe auch § 4), die Differentialgleichung (Lit. 12)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + H\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} = F(r, t), \tag{28}$$

mit den Randbedingungen

$$r = 0:\ w = 0;\ \frac{\partial w}{\partial r} = 0\,,$$

$$r = 1:\ \left.\begin{aligned} L_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= H\,G_1(t)\,, \\ L_2 \frac{\partial^3 w}{\partial r\,\partial t^2} + H\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= H\,G_2(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

und den Abkürzungen

$$G_1(t) = \frac{M l^3}{EJ}\left[\frac{1}{l} Q_2'(t) - Q_{21}'(t)\right]$$
$$G_2(t) = \frac{l}{EJ}[-\theta_1 Q_{21}'(t) + \theta_2 Q_{12}'(t)] \tag{30}$$

(θ_1; θ_2; θ Trägheitsmomente der Einzelmasse)

$$\theta_1 = \sum_M (x_4 - l)^2\, dm; \quad \theta_2 = \sum_M y_4^2\, dm; \quad \theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$M_1 = \frac{L_1}{H} = \frac{M l^3}{EJ}; \quad M_2 = \frac{L_2}{H} = \frac{\theta l}{JE}.$$

Der Ansatz $w = u_n . e^{i \nu_n t}$ ergibt für die Eigenfunktionen u_n die Differentialgleichung

$$u_n'''' - \alpha_n^4 u_n = 0 \quad \left(\alpha_n^4 = H \nu_n^2;\ \frac{d^4 u_n}{d r^4} = u_n''''\right) \tag{31}$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} r = 0:&\ u_n = 0;\ u_n' = 0, \\ r = 1:&\ u_n'' = L_2 \alpha_n^4 u_n';\ u_n''' = -L_1 \alpha_n^4 u_n\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Bildet man mit Hilfe der Gleichung (31) die Gleichung:

$$u_j'''' u_k - u_j u_k'''' = (\alpha_j^4 - \alpha_k^4)\, u_j u_k \quad (\alpha_j \neq \alpha_k)$$

und integriert dieselbe von 0 bis 1 unter Berücksichtigung der Randbedingungen (32) und der Identität

$$f_1'''' f_2 - f_1 f_2'''' = \frac{d}{dr}(f_1''' f_2 - f_1'' f_2' + f_1' f_2'' - f_1 f_2'''), \tag{33}$$

so erhält man

$$\int_0^1 u_j(r)\, u_k(r)\, dr + L_1 u_j(1)\, u_k(1) + L_2 u_j'(1)\, u_k'(1) = 0\,. \tag{34}$$

Verwendet man den Operator $\mathcal{S}$ (Stieltjessches Integral):

$$\mathcal{S} f(r)\, u_k(r)\, dr = \int_0^1 f(r)\, u_k(r)\, dr + L_1 f(1)\, u_k(1) + L_2 f'(1)\, u_k'(1), \tag{35}$$

so lautet die sogenannte „belastete Orthogonalität" (Lit. 16) zwischen den Eigenfunktionen (Gleichung (34)):

$$\mathcal{S}\, u_j(r)\, u_k(r)\, dr = 0 \quad (j \neq k) \tag{36}$$

und entsprechend die Bedingung zur Normierung der Eigenfunktionen

$$\mathcal{S} u_k^2(r)\, dr = 1. \tag{37}$$

Ferner sei

$$F_n(t) = \int_0^1 F(r,t)\, u_n(r)\, dr + H G_1(t)\, u_n(1) + H G_2(t)\, u_n'(1). \tag{38}$$

Als Lösungsansatz dient eine Entwicklung nach Eigenfunktionen

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\, u_n(r). \tag{39}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{C}_n(t)\, u_n(r). \tag{40}$$

$\mathcal{S}$ angewendet auf (39) und (40) führt unter Berücksichtigung von (36) und (37) auf die Gleichungen

$$C_n(t) = \mathcal{S} w(r,t)\, u_n(r)\, dr, \tag{41}$$

$$\ddot{C}_n(t) = \mathcal{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(r,t) \cdot u_n(r)\, dr. \tag{42}$$

Mit den Gleichungen (28), (29), (35) und (38) bildet man den Ausdruck

$$\mathcal{S} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} u_n\, dr + H \int_0^1 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} u_n\, dr + \left(-H \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + H \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_n'\right)_{r=1} = F_n(t). \tag{43}$$

Das Integral

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} u_n\, dr$$

geht mit Hilfe der Identität (33) über in

$$\int_0^1 w\, u_n''''\, dr + \left[\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} u_n - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_n' + \frac{\partial w}{\partial r} u_n'' - w\, u_n'''\right]_0^1$$

und durch Einsetzen der Randbedingungen für $r = 0$ und $r = 1$ und unter Berücksichtigung der Gleichung (31) für $u_n''''(r)$ in

$$\int_0^1 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} u_n\, dr = \alpha_n^4 \int_0^1 w\, u_n\, dr + \left[\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} u_n - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} u_n'\right]_{r=1} + \alpha_n^4 \left[L_2 \frac{\partial w}{\partial r} u_n' - L_1 w\, u_n\right]_{r=1}.$$

Dies in die Gleichung (43) eingeführt, ergibt mit den Gleichungen (41), (42)

$$\ddot{C}_n + H\,\alpha_n^4\,C_n = F_n(t)\,. \tag{44}$$

Setzt man die harmonischen Störungen

$$F(r,t) = F_1(r)\,e^{i\omega t};\; H\,G_1(t) = g_1\,e^{i\omega t};\; H\,G_2(t) = g_2\,e^{i\omega t};\; F_n(t) = K_n\,e^{i\omega t};$$

$$K_n = \int_0^1 F_1(r)\,u_n\,d\,r + g_1\,u_n(1) + g_2\,u_n'(1)$$

an, so ergibt sich für die stationäre Lösung:

$$w\,(r,t) = e^{i\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n\,u_n(r)}{\nu_n^2 - \omega^2}\,. \tag{45}$$

Damit kann man die Dimensionierung (ausgenommen Klirrfaktor) unter der Bedingung, dass das Massenträgheitsmoment der Einzelmasse in bezug auf die $(x_4;\, z_4)$-Ebene zu vernachlässigen ist (siehe Gleichung (30)), analog wie im § 4 zu Ende führen und gelangt so zu einem Beschleunigungsmesser des ersten Grundtypus.

§ 6. *Der dreieckförmig zugespitzte Stab als Erschütterungsmesser.*

Die Ausdehnung des Stabes in Richtung der Querschwingungen sei konstant und seine Form, in derselben Richtung betrachtet, entspreche einem gleichschenkligen Dreieck. Mit q als Querschnitt und J als Flächenträgheitsmoment ergibt sich, das gleiche Bezugssystem wie im § 5 vorausgesetzt, für die Differentialgleichung der Querschwingungen (Lit. 8):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\,\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{E}{l^4\,\varrho\,q(r)}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[J(r)\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] = F(r,t) \tag{46}$$

mit den Randbedingungen:

$$r = 0:\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0;\; \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} = 0;\; r = 1:\; w = 0;\; \frac{\partial w}{\partial r} = 0\,.$$

Ergibt das Stabprofil die Gleichungen $q(r) = q_0 r$ (q_0 = konstant) und $J = J_0\,r$ (J_0 = konstant), so führt der Lösungsansatz $w = u(r)\,.\,e^{i\omega t}$ die Gleichung (46) für die Störung $F\,(r,\,t) = F_0(r)\,e^{i\omega t}$ über in

$$-\,(\omega^2 - i\,\omega\,D)\,u + \frac{E\,J_0}{l^4\,\varrho\,q_0\,r}\,(r\,u'')'' = F_0(r)\,. \tag{47}$$

Mit

$$v(r) = u(r) + \frac{F_0(r)}{w^2 - i\,\omega\,D};\;\; \sigma = \frac{l^4\,\varrho\,q_0}{E\,J_0}\,(\omega^2 - i\,\omega\,D);\;\; F(r) = a_0 + a_1\,r \tag{48}$$

(siehe Gleichung (6)) erhält man aus Gleichung (47)

$$r\,v'''' + 2\,v''' - \sigma\,r\,v = 0 \tag{49}$$

mit den Randbedingungen

$$r = 0:\ v'' = 0;\ v''' = 0;\ r = 1:\ v = \frac{a_0 + a_1}{\omega^2 - i\,\omega\,D};\ v' = \frac{a_0}{\omega^2 - i\,\omega\,D}.$$

Zur Lösung von (49) dient der Reihenansatz $v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,r^n$. Berücksichtigt man vorerst nur die beiden Randbedingungen für $r = 0$, so ergibt dies

$$\begin{aligned} v = A_0 &\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n\,r^{4n}}{\prod_{j=1}^{n} 4\,j\,(4j-1)^2\,(4j-2)}\right] \\ + A_1 &\left[r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^n\,r^{4n+1}}{\prod_{j=1}^{n} (4\,j+1)\,(4\,j)^2\,(4\,j-1)}\right]. \end{aligned} \tag{50}$$

Als Näherung $\bar{v}$ sollen die ersten vier Glieder der Reihenentwicklung für v genommen werden.

$$\bar{v} = A_0 + A_1\,r + \frac{A_0}{72}\,\sigma\,r^4 + \frac{A_1}{240}\,\sigma\,r^5. \tag{51}$$

Zur Berechnung von A_0 und A_1 benützt man die beiden Randbedingungen für $r = 1$. Diese ergeben

$$\left(1 + \frac{\sigma}{72}\right) A_0 + \left(1 + \frac{\sigma}{240}\right) A_1 = \frac{a_0 + a_1}{\bar{\omega}^2},$$

$$\frac{\sigma}{18}\,A_0 + \left(1 + \frac{\sigma}{48}\right) A_1 = \frac{a_1}{\bar{\omega}^2},$$

$$\bar{\omega}^2 = w^2 - i\,\omega\,D.$$

Für die Determinante Δ_0 dieses Gleichungssystems ergibt sich

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\sigma}{72} & 1 + \frac{\sigma}{240} \\ \frac{\sigma}{18} & 1 + \frac{\sigma}{48} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sigma}{48} + \frac{\sigma^2}{17280}, \tag{52}$$

und für A_0 und A_1 erhält man

$$\bar{\omega}^2\,\Delta_0\,A_0 = \left(1 + \frac{\sigma}{48}\right) a_0 + \frac{\sigma}{60}\,a_1,$$

$$\bar{\omega}^2\,\Delta_0\,A_1 = -\frac{\sigma}{18}\,a_0 + \left(1 - \frac{\sigma}{24}\right) a_1. \tag{53}$$

*

Damit nimmt unter Berücksichtigung von (48), (51), (52), (53) und $H_0 = \frac{\overline{\omega}^2}{\sigma} = \frac{E J_0}{l^4 \varrho q_0}$ die Näherungslösung folgende Form an:

$$w \cong \frac{e^{i\omega t}}{6 H_0 \Delta_0} \left\{ \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sigma}{720}\right) a_0 + \frac{1}{10} a_1 - \left[\frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{8}\left(1 + \frac{\sigma}{360}\right) a_1\right] r \right.$$
$$\left. + \frac{1}{12}\left[\left(1 + \frac{\sigma}{48}\right) a_0 + \frac{\sigma}{60} a_1\right] r^4 + \frac{1}{40}\left[-\frac{\sigma}{18} a_0 + \left(1 - \frac{\sigma}{24}\right) a_1\right] r^5 . \right. \tag{54}$$

Aus $\Delta_0 = 0$ ergibt sich für die tiefste Resonanzstelle

$$\sigma_1 \cong 57{,}036 \, [\text{exakt } \sigma_1 = 51{,}20; \text{ (Lit. 20)}].$$

Damit kann man die Dimensionierung (ausgenommen Klirrfaktor) analog wie im § 6 zu Ende führen und erhält einen Beschleunigungsmesser des ersten Grundtypus.

§ 7. *Erschütterungsmesser vom zweiten und dritten Grundtypus.*

Die §§ 4, 5 und 6 zeigen, dass ein Stab von konstantem Querschnitt mit oder ohne Einzelmasse und ein Stab von variablem Querschnitt ohne Einzelmasse einem Erschütterungsmesser des ersten Grundtypus entsprechen.

Sind die Systeme S_2 und S_1 einerseits S_3 und S_4 andererseits identisch, die Längsachse des Stabes z. B. parallel zur x_3-Achse, und liegt seine Schwingungsebene z. B. in der (x_3, y_3)-Ebene, so lautet die Indikatorgleichung:

$$\ddot{s} + D\dot{s} + N_1^2 s = V_2 Q_2 + x_3 V_{21} Q_{21} + y_3 V_{22} Q_{22} .$$

Mit Hilfe von zwei Erschütterungsmessern des ersten Grundtypus, die eine geeignete gegenseitige Lage innehaben und in einer Differenzschaltung vereinigt sind, ist es möglich einen Erschütterungsmesser des zweiten oder dritten Grundtypus zu konstruieren. Eine Differenzschaltung entsteht, wenn man entweder die piezoelektrischen Stäbe entgegengesetzt orientiert (bei gleicher Belastung entgegengesetzt polarisiert) und sie in Reihe schaltet, oder sie gleich orientiert und Minuspol mit Minuspol verbindet und die EMK an den beiden Pluspolen abnimmt. Mathematisch bedeutet entgegengesetzte Orientierung eine Änderung des Vorzeichens der Störung.

Für die Erschütterungsmesser E_1, E_2 und E_3 in Fig. 4 lauten die Indikatorgleichungen:

$$\ddot{s}_1 + D\dot{s}_1 + N_1^2 s_1 = V_2 Q_2 + \bar{x}_3 V_{21} Q_{21} + \bar{y}_3 V_{22} Q_{22}\,, \tag{55}$$

$$\ddot{s}_2 + D\dot{s}_2 + N_1^2 s_2 = -V_2 Q_2 - \bar{x}_3 V_{21} Q_{21} + \bar{y}_3 V_{22} Q_{22}\,, \tag{56}$$

$$\ddot{s}_3 + D\dot{s}_3 + N_1^2 s_3 = -V_2 Q_2 + \bar{x}_3 V_{21} Q_{21} - \bar{y}_3 V_{22} Q_{22}\,. \tag{57}$$

Addiert man die Gleichungen (55), (56), so ergibt dies:

$$(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2) + D(\dot{s}_1 + \dot{s}_2) + N_1^2 (s_1 + s_2) = 2\,\bar{y}_3 V_{22} Q_{22}\,.$$

Die Kombination von E_1 und E_2 ist somit ein Erschütterungsmesser des zweiten Grundtypus.

Aus den Gleichungen (55), (57) folgt:

$$(\ddot{s}_1 + \ddot{s}_3) + D(\dot{s}_1 + \dot{s}_3) + N_1^2 (s_1 + s_3) = 2\,\bar{x}_3 V_{21} Q_{21},$$

was einem Erschütterungsmesser des dritten Grundtypus entspricht.

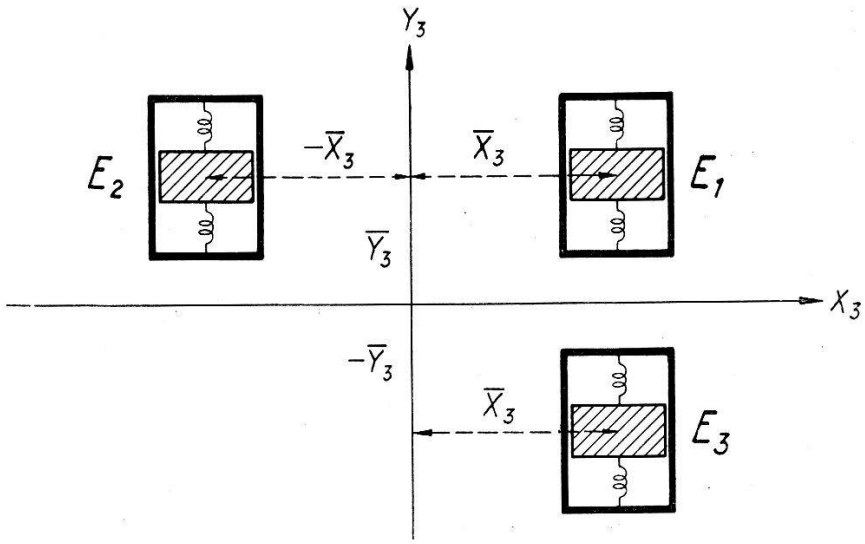

Fig. 4.

E_1, E_2 und E_3 sind Erschütterungsmesser des ersten Grundtypus mit der Arbeitsrichtung y_3. Die Kombination von E_1 und E_2 ergibt bei entgegengesetzter Orientierung und Serieschaltung einen Erschütterungsmesser des zweiten Grundtypus. Die Kombination von E_1 und E_3 ergibt unter denselben Voraussetzungen einen Erschütterungsmesser des drittes Grundtypus.

Zu bemerken ist noch, dass die Resultate auch dann keine Änderung erfahren, wenn man die Schwingungsebene und mit ihr die Längsachse des Stabes parallel zu sich selbst verschiebt. Für einen Erschütterungsmesser des zweiten oder dritten Grundtypus gibt es ∞^2 verschiedene adäquate Bezugssysteme, während es für einen Erschütterungsmesser des ersten Grundtypus genau ein adäquates Bezugssystem gibt.

II. Aufbau und Prüfung eines Erschütterungsmessers.

§ 8. *Die dynamischen Eicheinrichtungen.*

Aus den §§ 3 und 4 geht hervor, dass zur vollständigen Eichung eines Erschütterungsmessers eine Einrichtung, die innerhalb seines Messbereiches beliebige harmonische Translations- und Rotationsbewegungen erzeugt, ausreichend ist.

In der Literatur sind mehrere Konstruktionen mit horizontaler oder vertikaler Arbeitsrichtung für Translationsbewegungen (Schütteltische, Lit. 1, 7, 17, 21) beschrieben. Diese Schütteltische sind vorwiegend für Prüflinge von mehreren kg oder gar Tonnen (mechanisch registrierende Seismographen) gebaut und ihr Messbereich liegt in der Regel zwischen einigen Zehntels- und ca. 100 Hz.

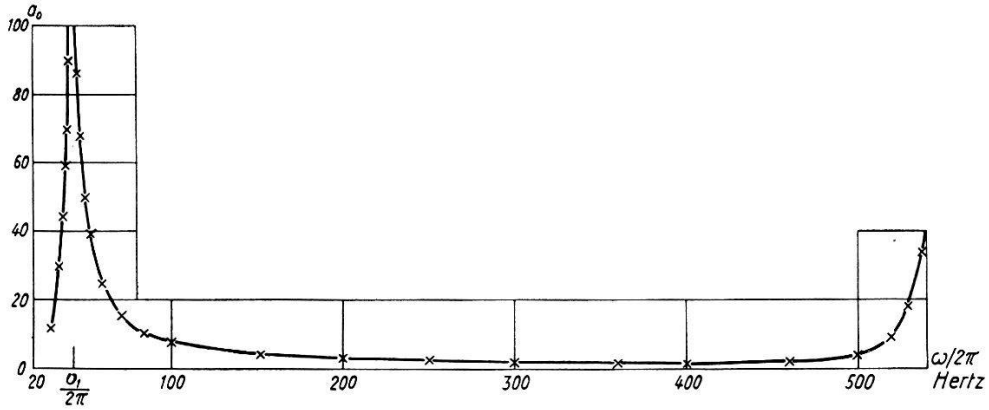

Fig. 5.
Resonanzkurve des beidseitig eingespannten Doppelstabes mit Zusatzmasse, aufgenommen mit konstanter Antriebskraft. ν_1 = tiefste Eigenfrequenz; a_0 = Amplitude.

Für den nun in Betracht zu ziehenden piezoelektrischen Erschütterungsmesser mit einem Messbereich von ca. 1 bis 400 Hz und einem Gewicht, das je nach Aufbau und Zubehör (eingebauter Vorverstärker) 200 bis 500 g beträgt, sei nachstehend eine einfache und zweckdienliche Einrichtung zur Eichung beschrieben.

Die Schwierigkeiten beim Bau des Schütteltisches sind die praktische Durchbildung des Schwingers und seine Einspannung.

Für den Aufbau des Schwingers eignet sich besonders Anticorodal, das in dynamischer Hinsicht mit Stahl vergleichbar, aber bedeutend einfacher zu bearbeiten ist.

Zur Dimensionierung des Schwingers sind die Überlegungen und teilweise auch die Resultate der §§ 4 und 5 ohne Einschränkung zu übernehmen.

Berücksichtigt man noch die Tatsache, dass es praktisch (Material) nicht möglich ist, die tiefste Eigenfrequenz des Schwingers

oberhalb 200 Hz zu legen, so bleibt als einzige Möglichkeit noch die Verlegung der tiefsten Eigenfrequenz an die untere Grenze und der nächst höhern Eigenfrequenz an die obere Grenze des Messbereiches offen.

Im vorliegenden Fall erfüllt ein beidseitig eingespannter und in der Mitte mit einer Zusatzmasse versehener (gleichzeitig Träger des Prüflings und der Antriebsspule) Doppelstab (siehe die schon zitierte Arbeit von F. Gassmann sowie Lit. 9) die gestellten Anforderungen weitgehend. (Siehe Fig. 5 und Fig. 6.)

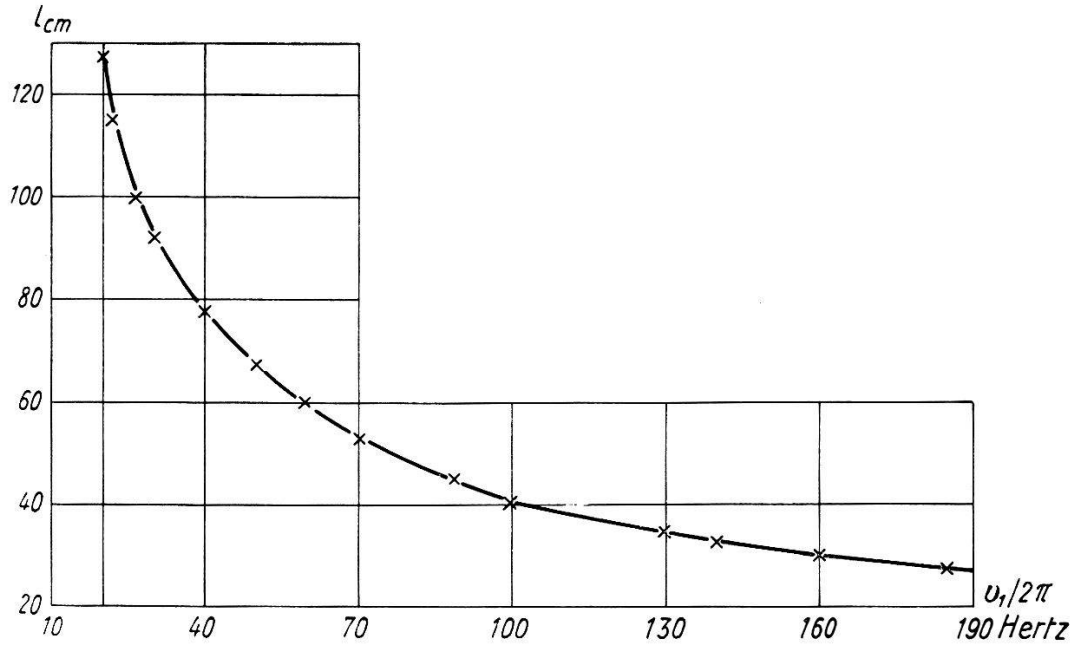

Fig. 6.
Die Länge des Doppelstabes mit Zusatzmasse als Funktion der tiefsten reduzierten Eigenfrequenz.

Für den Antrieb ist dasselbe Prinzip wie beim elektrodynamischen Lautsprecher (Lit. 19) angemessen.

Der dafür gebaute RC-Generator ist in drei Frequenzbereiche unterteilt, nämlich (Lit. 15):

0,9—5 Hz; 3,8—30 Hz und 25—2000 Hz.

Der maximale Klirrfaktor des letzten Bereiches ist $< 1\%$.

Der Kraftverstärker besteht aus einer Gegentaktend- und einer Phasenkehrstufe. Er ist zweifach gegengekoppelt und hat eine maximale Ausgangsleistung von 17 Watt. Der Klirrfaktor ist bis zu einer Ausgangsleistung von 7 Watt $< 1{,}5\%$.

Zur Registrierung der Tischbewegungen (Tisch = Zusatzmasse) dient ein mechanisch-optisches und ein elektrisch-optisches Vergrösserungssystem (Tauchspule).

Die aus einem linearen Glühfaden, einem Hohlspiegel und einer Zylinderlinse bestehende einfache Optik ergibt eine Strichbreite von ca. $^2/_{10}$ mm und lässt Registriergeschwindigkeiten bis zu 3 m/sec zu.

Die Ausmessung des Schütteltisches wurde wie folgt durchgeführt:

1. Statische Ausmessung des mechanisch-optischen Vergrösserungssystems mit Hilfe einer kontrollierten Messuhr. In Übereinstimmung mit der Theorie ergab sich eine 131fache Vergrösserung $\pm$ 0,5%. (Vergrösserung = Quotient aus Lichtzeigerausschlag und Tischauslenkung.)

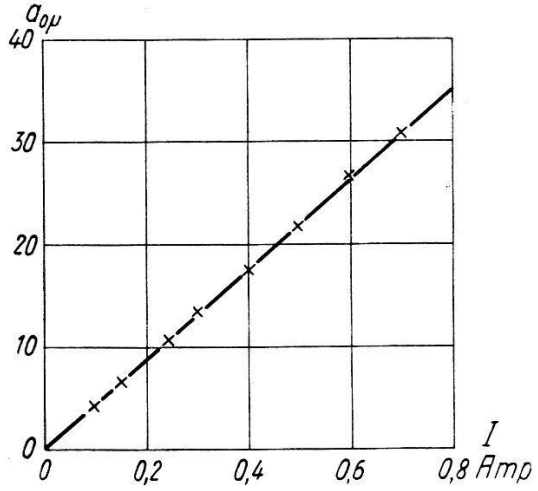

Fig. 7.
Die Amplitude des Doppelstabes in Funktion des Tauchspulenstromes.

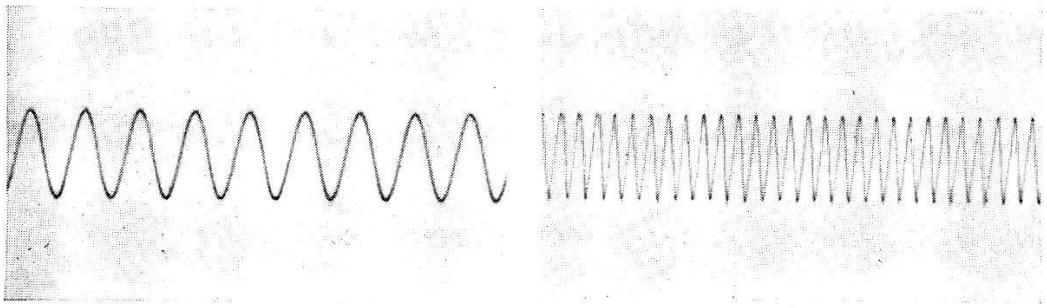

Fig. 8.
Zwei Registrierproben von Tischschwingungen, aufgenommen bei 45 und 500 Hz.

2. Dynamische Vergleichsmessung der beiden Vergrösserungssysteme. Fig. 9 zeigt das Resultat. Daraus ist ersichtlich, dass das mechanisch-optische Vergrösserungssystem oberhalb 60 Hz nicht mehr brauchbar ist, was auf das „Rattern" der Kugellager zurückzuführen ist. Die Vergrösserung des elektrisch-optischen Vergrösserungssystemes ist 500fach $\pm$ 2%, gemessen bei 10 Hz.

3. Messung der Tischamplitude in Funktion des Tauchspulenstromes (siehe Fig. 7).

4. Kontrolle der vertikalen Tischbewegung auf Neigungsschwingungen.

5. Messung der Stablänge in Funktion der tiefsten Eigenfrequenz (siehe Fig. 6).

Die tiefste Frequenz, die vom Kraftverstärker noch einwandfrei verstärkt wird, ist 25 Hz. Diese Grenze ist nur mit Hilfe eines be-

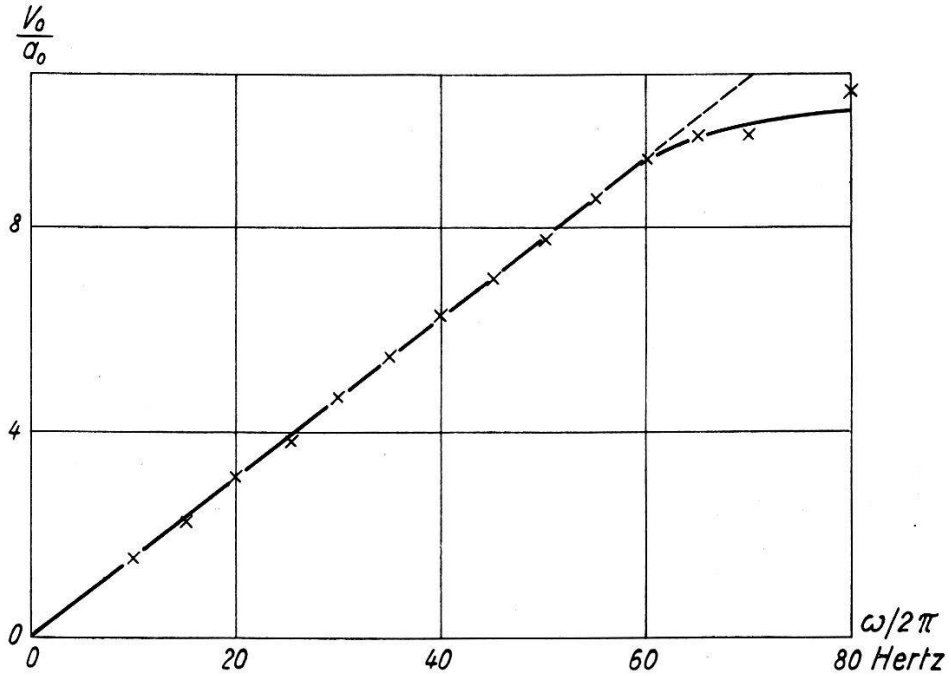

Fig. 9.

Zur dynamischen Vergleichsmessung der beiden Vergrösserungssysteme. Es bedeuten: ω = Frequenz der Tischbewegung; v_0 = Geschwindigkeitsamplitude und a_0 = Amplitude des Tisches.

deutend grösseren Aufwandes an Material noch merklich zu unterschreiten. Eine zweckmässige Lösung wäre daher ein rein mechanischer Antrieb.

Eine andere Lösung besteht darin, dass man die Zusatzmasse des Schwingers vergrössert und diesen jeweils durch kurzes Anstossen mit der Hand in seiner tiefsten Eigenfrequenz (die höheren Eigenfrequenzen werden nach verhältnismässig wenig Grundschwingungen unmerklich) erregt. Aus einer solchen Abklingkurve kann, infolge der kleinen Dämpfungsfaktoren (innere und äussere Dämpfung, eingeschlossen der Energieabfluss über die Einspannstellen, siehe Fig. 5) stets ein Teilstück, das mehrere Schwingungen enthält, herausgegriffen und als harmonische Schwingung betrachtet werden.

Über die Rotationseicheinrichtung vermittelt Fig. 10 ein schematisches Bild. Die tiefste Eigenfrequenz der Einrichtung liegt bei 45 Hz und brauchbar ist diese bis ca. 60 Hz (Kugellager). Für die Kontrollregistrierungen dient ein auf der Drehachse angebrachter Hohlspiegel. Der Erschütterungsmesser E kann dabei längs der y_3-Achse verschoben werden. Da es sich hier nur noch um die Bestimmung der Übertragungsfaktoren und des neutralen Punktes handelt (siehe § 4), ist dieser relativ kleine Messbereich ausreichend.

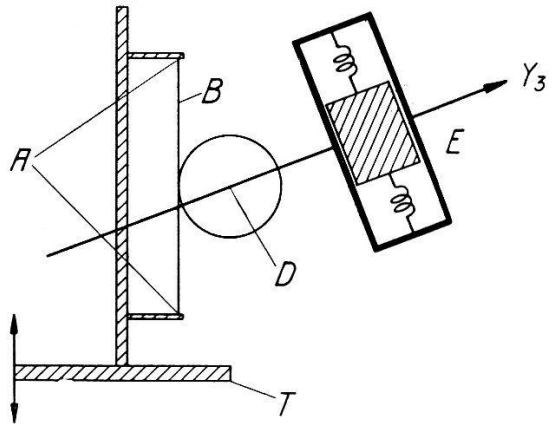

Fig. 10.

Schematisches Bild der Rotationseicheinrichtung. Es bedeuten: T = Translationsschütteltisch; A = Einspannstellen des Stahldrahtes; B = Stahldraht; D = Drehachse des Tisches; E = Erschütterungsmesser.

Um mit einer Eicheinrichtung einwandfrei arbeiten zu können, ist es notwendig, dass die zulässigen Tischbewegungen gross sind im Vergleich zum mittleren Erschütterungsstörpegel (z. B. Verkehrserschütterungen der Stadt, Vorlesungspausen usw.). Für die beschriebene Eicheinrichtung, die sich in der Werkstatt des Instituts für Geophysik (ETH., Hauptgebäude, Keller) befindet, ist dieses Verhältnis, abgesehen von einigen Ausnahmen, befriedigend.

§ 9. *Messverstärker und Filter.*

Die Leistung eines Erschütterungsmessers mit elektrischem Indikator, als Spannungsquelle aufgefasst, genügt zur Aussteuerung eines Registriergerätes (ausgenommen hochempfindliche Galvanometer und niederohmige Erschütterungsmesser, Lit. 25, 26) nicht. Die notwendige Anpassung ist daher mit einem Messverstärker vorzunehmen. Im vorliegenden Fall wurde ein zweistufiger Gegentaktverstärker mit Eintakteingang (Prinzipschema Lit. 3) gebaut. Die Spannungsverstärkung ist 3000fach bei einer Ausgangsimpedanz von 10 kΩ — und einem Störpegel von — 70 dB, bezogen auf die

maximale Ausgangsleistung. Der Klirrfaktor ist $< 1{,}5\%$. Die Frequenzkennlinie ist aus Fig. 11 ersichtlich.

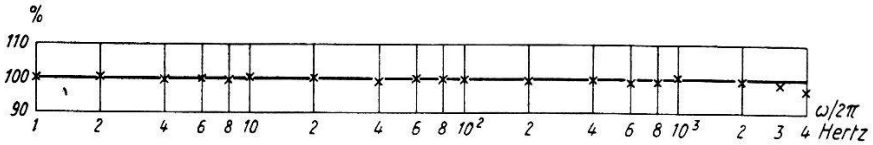

Fig. 11.
Die Frequenzkennlinie des Messverstärkers. (Verstärkung bei 200 Hz = 100%.)

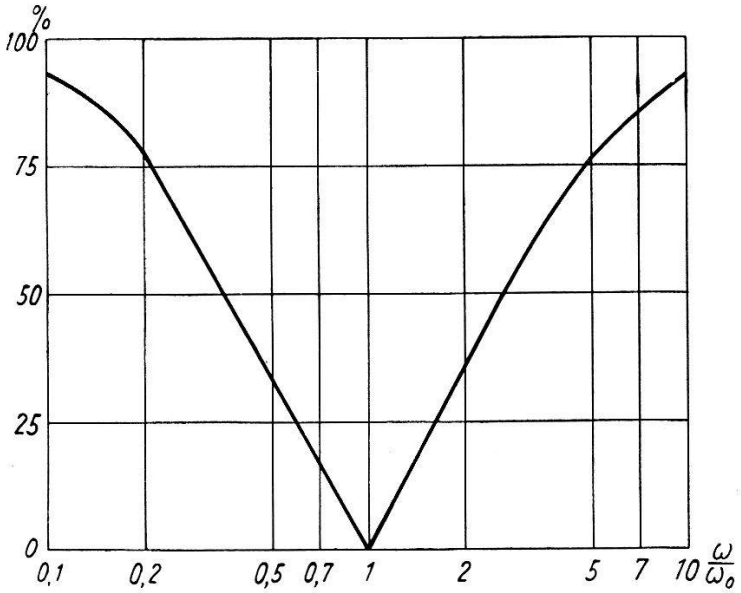

Fig. 12a.
Frequenzkennlinie (ohne Abschlusswiderstand) des Filters.
(Durchlass für $\omega/\omega_0 \to \infty = 100\%$.)

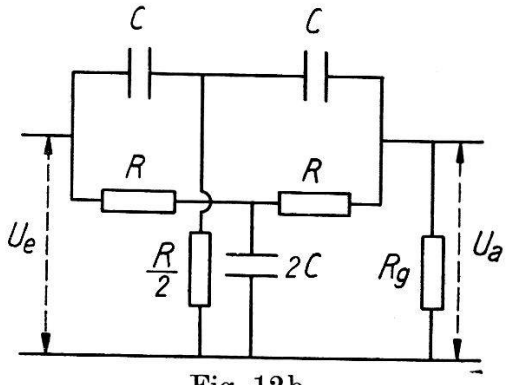

Fig. 12b.
Grundsätzliches Schaltschema des Filters.

Fig. 12 zeigt das grundsätzliche Schaltschema des Filters (Lit. 23), das zur Realisierung der im § 3 erwähnten Schranken ω_a und ω_b benützt werden kann. Für U_a/U_e erhält man, als Resultat einer längeren Rechnung, mit $x = 1/\omega C$

$$\frac{U_a}{U_e} = \left(1 - \frac{4\,i\,R\,x}{R^2 - x^2} - \frac{1}{R_g}\,\frac{2\,i\,R\,x\,(R - i\,x}{R^2 - x^2}\right)^{-1}.$$

Ein gutes Hoch- oder Tiefpassfilter (durch Kombination Bandpass) entsteht nun, wenn zwei solche Filter mit ω_0 und $4/5\,\omega_0$ in einer Rückkopplungsschaltung, wie sie in Fig. 13 dargestellt ist, eingegliedert werden. Fig. 14 zeigt z. B. die gemessene Frequenzkennlinie eines Hochpassfilters.

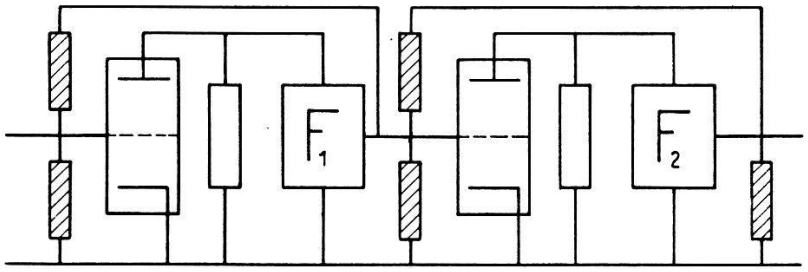

Fig. 13.
Grundsätzliches Schaltschema eines Hoch- oder Tiefpassfilters.

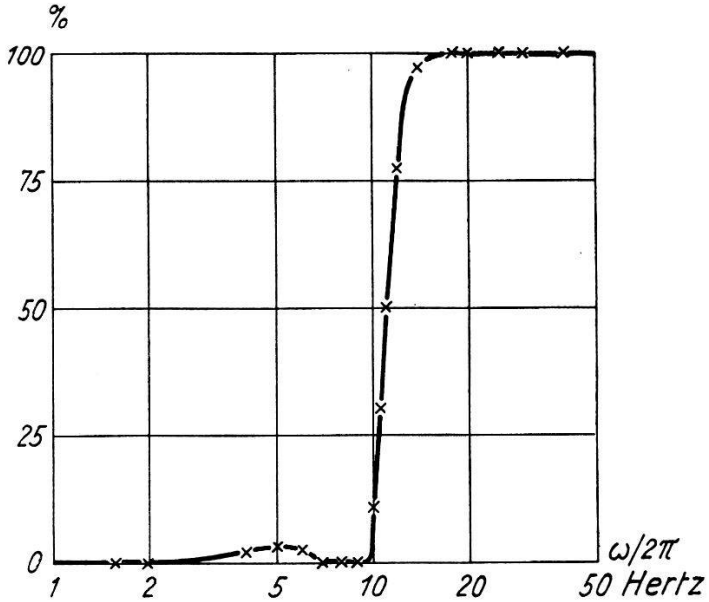

Fig. 14.
Gemessene Frequenzkennlinie eines Hochpassfilters.
(Durchlass bei 200 Hz = 100%.)

§ 10. *Der Kristallbieger als piezoelektrischer Beschleunigungsmesser.*

Über die Herstellung und Behandlung von Seignettesalz- und Quarzbeschleunigungsmessern sowie über deren Empfindlichkeiten (Empfindlichkeit = Beschleunigung in mm/sec² pro mm Zeigerausschlag) mit grosser Zusatzmasse, findet man in der Literatur zwei ausführliche Arbeiten von A. Herrmann (Lit. 10, 11). Die Seignetteelektrika, Ammonium- und Kaliumphosphat (Lit. 2), sind in jenen Arbeiten nicht besprochen. Die Empfindlichkeiten dieser Phosphate dürften jedoch, wie eine rohe Abschätzung zeigt, von

derselben Grössenordnung wie diejenige von Quarz sein. VALASEK (Lit. 24), später SCHULWAS-SOROKIN (Lit. 22) untersuchten die Temperaturabhängigkeit des Piezomoduls δ_{14} und der Dielektrizitätskonstanten ε von Seignettesalz, während W. LÜDY (Lit. 18) in einer Arbeit über das dynamisch-elastische Verhalten von Seignetteelektrika berichtet. (Weitere Zitate sind in den erwähnten Arbeiten zu finden.)

Die nachstehend beschriebene Eichung und Prüfung wurde an einem Beschleunigungsmesser aus Seignettesalz durchgeführt. Der Beschleunigungsmesser besteht aus einem dreieckförmigen Bieger und ist zusammen mit einer Vorstufe (Impedanztransformation), bestehend aus einer Raytheon-Miniaturelektrometertriode und den dazu gehörenden Batterien, in einem zylindrischen Gehäuse von

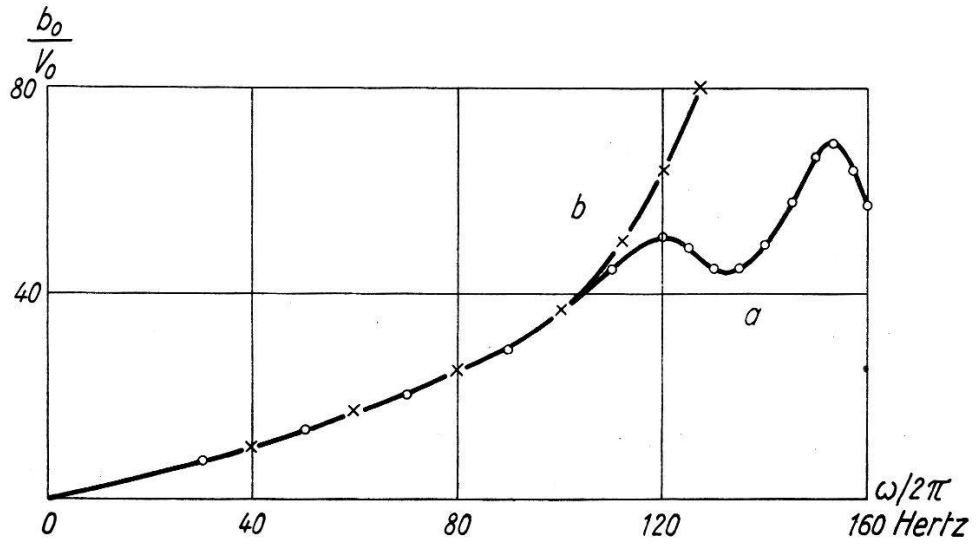

Fig. 15.

Prüfung der Einspannung eines Biegers mit Zusatzmasse (40 g). Kurve *a:* Bieger vermittelst Gummiunterlagen festgeklemmt; Kurve *b:* Derselbe Bieger mit Pasta festgeklebt; v_0 = Geschwindigkeitsamplitude des Tisches; b_0 = registrierte Beschleunigungsamplitude.

8,5 cm Durchmesser und einer Höhe von 3 cm untergebracht. Die Form des Biegers ist durch die Spaltbarkeit des Kristalls gegeben.

Mit besonderer Sorgfalt wurden die verschiedenen Einspannungsmöglichkeiten in bezug auf ihre Härte untersucht. Fig. 15 zeigt zwei Beispiele. Die Kurven wurden mit demselben Bieger (Zusatzmasse = 40 g) aufgenommen. Geändert wurde nur die Einspannung.

Biegereinspannung zu Kurve *a*: Kristall vermittels zweier Gummiunterlagen festgeklemmt.

Biegereinspannung zu Kurve *b*: Kristall mit Pasta festgeklebt.

Die Kurve *a* zeigt deutlich die Wirkung der Gummiunterlagen. Die Einspannung ist zu weich im Vergleich zur Kristallhärte und

es entstehen zwei gekoppelte Pendel. Die Kurve *b* entspricht qualitativ einem schwach gedämpften Pendel, was auf eine gute Einspannung schliessen lässt.

Fig. 16 zeigt die Translationsempfindlichkeit des Kristallbiegers (Länge = 2,6 cm; Dicke = 2,1 mm) in Funktion der Zusatzmasse M, bezogen auf die Empfindlichkeit ohne Zusatzmasse.

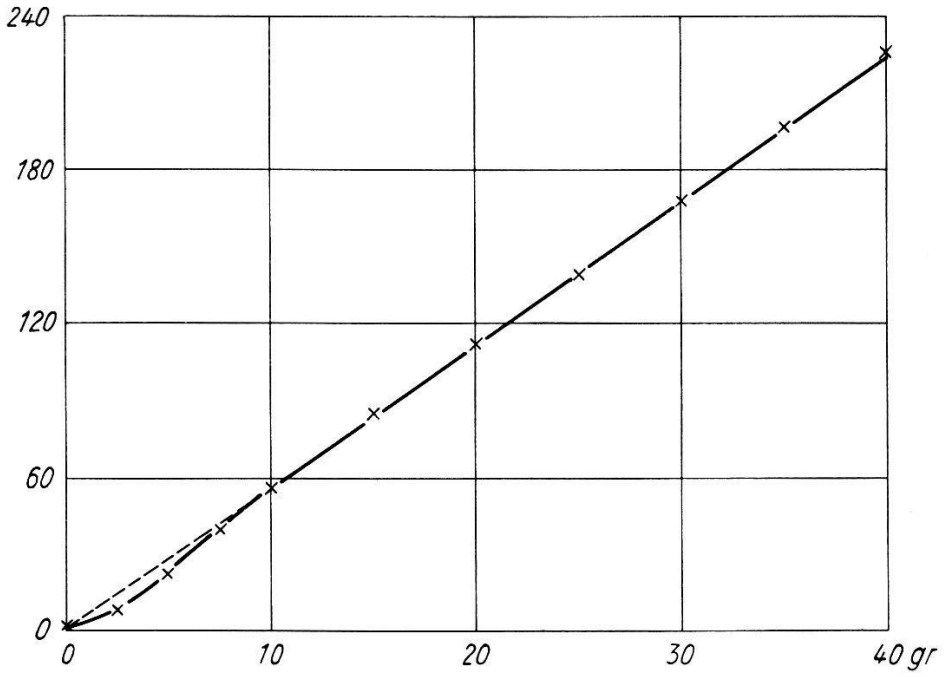

Fig. 16.
Die Translationsempfindlichkeit des Kristallbiegers (Länge = 2,6 cm; Dicke = 2,1 mm) in Funktion der Zusatzmasse M, bezogen auf die Empfindlichkeit ohne Zusatzmasse.

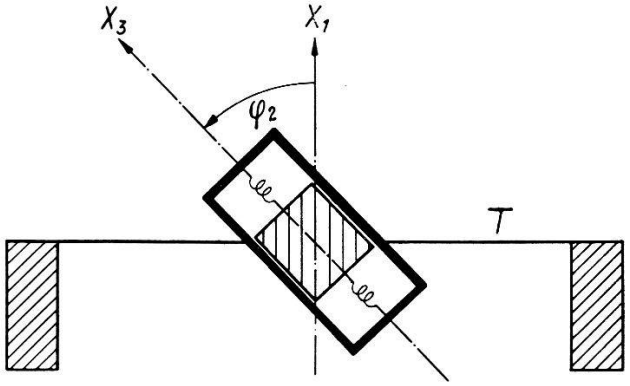

Fig. 17.
Schematisches Bild, wie die Empfindlichkeit in Funktion des Neigungswinkels gemessen wurde. x_3 = Arbeitsrichtung des Kristalls; φ_2 = Neigungswinkel zur Translationsbewegungsrichtung; T = Tischebene.

Dieser Kristallbieger, mit einer Zusatzmasse von 30 g wäre z. B. in der Seismik als Beschleunigungsmesser brauchbar; denn die

Empfindlichkeit beträgt $\sim {}^{6}/_{100}$ mm/sec² pro mm, was z. B. bei 10 Hz einer Bodenamplitude von $\sim {}^{1}/_{6} \cdot 10^{-4}$ mm entspricht.

Für eine exakte Erschütterungsmessung (Beschleunigung) ist ein Messbereich von ca. 1 bis 400 Hz (= obere Schranke) erforderlich, und eine maximale Amplitudenüberhöhung m_b von $\sim 1\%$ und eine maximale Phasenverschiebung ϑ_b von $\sim 6^0$ noch zulässig. Diese Bedingungen erfüllt (Gleichungen (16), (17)) ein praktisch unge-

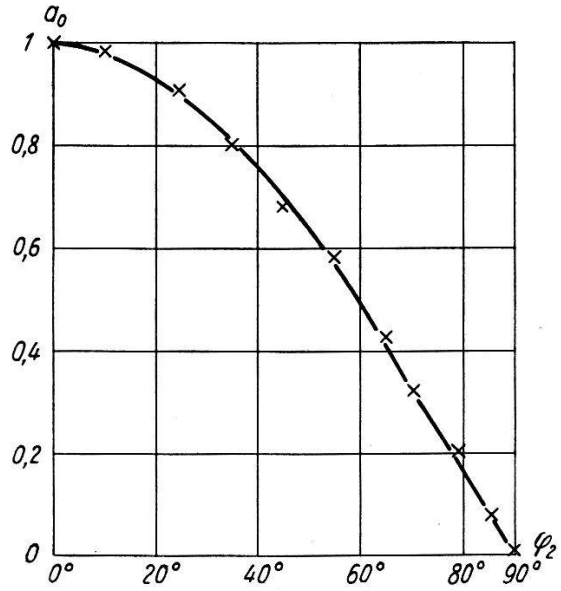

Fig. 18.

Die Empfindlichkeit in Funktion des Neigungswinkels. — = theoretische Kurve + = gemessene Werte.

dämpfter ($D = 0$) Beschleunigungsmesser mit einer Eigenfrequenz von 3500 Hz. Ein Beschleunigungsmesser mit diesen Eigenschaften ergibt sich z. B. aus einem dreieckförmigen Kristallbieger (Gleichung (54)) mit einer Länge von 2,5 cm und einer Dicke von 2 mm.

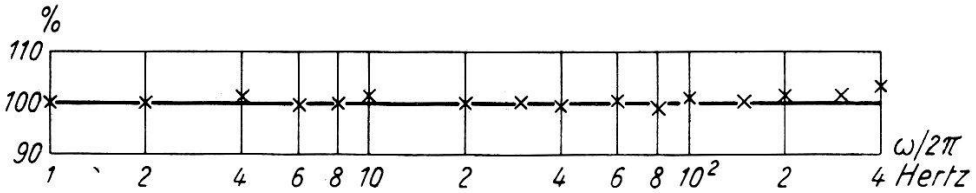

Fig. 19.

Die gemessene Frequenzkennlinie des Beschleunigungsmessers. (Empfindlichkeit bei 200 Hz = 100%.)

(Abklingkurven zeigen, dass diese Kristallbieger praktisch ungedämpft sind.)

Die Prüfung und Eichung dieses Beschleunigungsmessers wurde wie folgt durchgeführt.

1. Die Prüfung der $\sphericalangle$-Abhängigkeit der Empfindlichkeit wurde, wie in Fig. 17 schematisch dargestellt ist, ausgeführt. Fig. 18 zeigt das Ergebnis der Messung.

2. Messung der Translationsempfindlichkeit in Funktion der Frequenz der aufgeprägten Beschleunigung. Fig. 19 zeigt die gemessene Frequenzkennlinie des Beschleunigungsmessers. Die Empfindlichkeit beträgt 5 mm/sec² pro mm $\pm$ 5% und schwankt unter den einzelnen Kristallen bis zu $\pm$ 20%.

3. Bestimmung des neutralen Punktes und Prüfung des Beschleunigungsmessers auf Rotationsempfindlichkeiten.

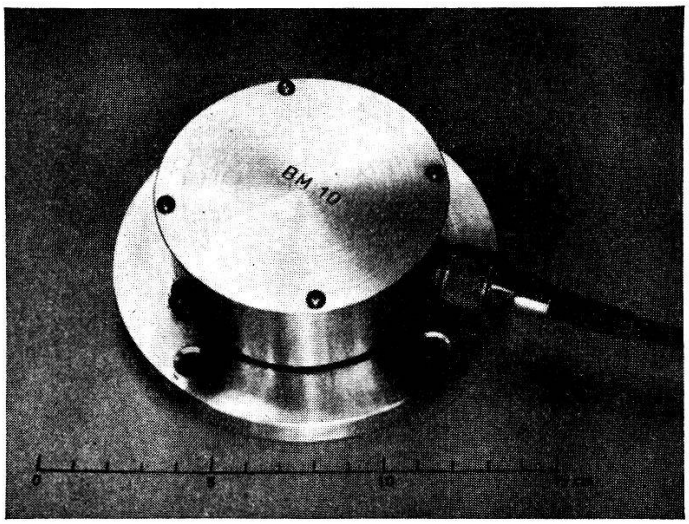

Fig. 20.
Kristallbeschleunigungsmesser mit eingebauter Elektrometertriode.

Erste Lage: Die Längsachse des Kristalls fällt mit der Drehachse D des Tisches zusammen. Es konnte kein messbarer Ausschlag festgestellt werden.

Zweite Lage: Die Längsachse des Kristalls steht $\perp$ auf der Drehachse D und schneidet dieselbe. Die Empfindlichkeit zeigt den erwarteten linearen Verlauf und wird Null, wenn die Einspannstelle $^1/_5 \pm 5\%$ der Kristallänge von der Drehachse entfernt ist (= neutraler Punkt).

Dritte Lage: Die Seitenkanten liegen in einer Ebene, die $\perp$ zur Drehachse ist. Ein messbarer Ausschlag konnte nicht festgestellt werden.

Damit sind die in der Theorie gemachten Voraussetzungen experimentell bestätigt, und die erreichten Empfindlichkeiten sind für die Praxis ausreichend.

Zum Schlusse möchte ich meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. F. GASSMANN, für das grosse Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte sowie für die vielen Anregungen und Diskussionen herzlichst danken. Ebenso bin ich Herrn R. BERGER, Feinmechaniker, der mich bei den experimentellen Arbeiten gewissenhaft unterstützte, zu Dank verpflichtet. Die Seignettesalzbieger wurden von der Firma Torson in Zürich hergestellt.

Zürich, Institut für Geophysik der Eidg. Techn. Hochschule.

Literaturverzeichnis.

1. BERNHARD, R. und KAMMERER, A., Einrichtung der Deutschen Reichsbahn-Gesellschaft zur Eichung von Messgeräten für die Feststellung von mechanischen Bemessungen. Elektrotechn. Zeitschrift 16, III, 33, 257–260.
2. BUSCH, G., Neue Seignette-Elektrika. H.P.A. 11, 1938, 269.
3. DE BRUIN S. L. und DORSMAN, C., Ein Kathodenstrahloszillograph für Untersuchungen im Maschinenbau. Philips Techn. Rundschau 5, 1940, 285.
4. GASSMANN, F., Zur Bestimmung von Bodenbewegungen aus Registrierungen von Schwingungsmessern und Seismographen. Festschrift SIA der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich 1937.
5. GASSMANN, F., Zur Theorie der Schwingungsmesser. Beiträge zur Geophysik, Bd. 52, 1938, 1–19.
6. GASSMANN, F., Über Querschwingungen eines Stabes mit Einzelmasse. Ing. Arch., II. Bd., 1931, 222–227.
7. GASSMANN, F., Ein Schütteltisch und seine Anwendungsmöglichkeiten. Schweiz. Techn. Zeitschrift Nr. 3, 1933.
8. Handbuch der Physik, Bd. VI, 368, 1928 (H. Geiger und K. Scheel).
9. Handbuch der Physik, Bd. VI, 366, 1928 (H. Geiger und K. Scheel).
10. HERRMANN, A., Grundsätzliche Betrachtungen über piezoelektrische Beschleunigungsmesser, Z. f. Geophys., Bd. XV, 1939, 31.
11. HERRMANN, A., Piezoelektrischer Beschleunigungsmesser hoher Empfindlichkeit ohne Verstärker. Veröff. der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena, Heft 34, 1938, 25.
12. HOHENEMSER, R., Praktische Wege zur angenäherten Schwingungsberechnung elastischer Systeme. Ing.-Arch., Bd. I, Heft 3, 1930.
13. HORT, W., Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, Springer, Berlin 1925.
14. HORT, W., Technische Schwingungslehre, Springer, Berlin 1922.
15. KLEMT, A., Archiv für techn. Messen, Juni 1943, Z. 42–5.
16. KNESER, A., Belastete Integralgleichungen. Rend. Circ. mat. Palermo, Bd. 37, 169–197.
17. KÖHLER, H., Ein neuer Schütteltisch zur Eichung und Prüfung hochempfindlicher Erschütterungsmesser. Z. f. techn. Phys., Bd. 22, Nr. 9, 209–215.
18. LÜDY, W., Der Einfluss der Temperatur auf das dynamisch-elastische Verhalten von Seignetteelektrika. Promotionsarbeit Eidg. Techn. Hochsch. Zürich, 1942.

19. Möller, H. G., Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenztechnik, Springer, Berlin 1940.
20. Ono, A., Journ. Soc. Mech. Engin, Tokyo, Bd. 27, 1924, 467–479.
21. Reutlinger, C., Eichanlage für Schwingungsmesser. Gerl. Beitr. Geophys. 24, 206.
22. Schulwas-Sorokin, R. D., Piezoelektrische Eigenschaften von Seignettesalzkristallen. Z. f. Physik 73, 1931, 700.
23. Thiessen, G. J., R-C Filter Circuits, J. of the Acoustical Soc. of America 16, Nr. 4, 1945, 275–279.
24. Valasek, J., Physic. Rev. 17, 1921, 475, 19, 1922, 438, 20, 1922, 639, 23, 1924, 114, 24, 1924, 560.
25. Wenner, Frank, A New Seismometer Equipped for Electromagnetic Damping and Electromagnetic and Optical Magnification. Bureau of Standards Journal of Research. Vol. 2, 1929, 963–999.
26. Wilip, J., On New Precision Seismographs. Publ. Univ. Tortu (Dorpat), 1926.