

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 22 (1949)
Heft: III

Artikel: Classification invariante des termes de la matrice S
Autor: Houriet, A. / Kind, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112007>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Classification invariante des termes de la matrice S

par A. Houriet et A. Kind.

(18. III. 1949.)

Pour éliminer les divergences que la théorie des perturbations introduit dès le second ordre, il est utile de décomposer les termes de chaque ordre en classes invariantes pour une transformation de LORENTZ. C'est le but de ce travail, qui repose sur la théorie des graphes.

La méthode proposée est générale. Cependant nous l'exposerons sur un exemple particulier. Soient deux ensembles de particules de spin 0, les premières chargées et de masse \varkappa , les secondes neutres et de masse μ . Elles sont décrites par les champs scalaires $u^+(x)$ et $u(x)$, respectivement $\varphi(x)$. Ce sont des fonctions d'espace-temps : $x = (\vec{x}, t)$. Si les deux champs ne sont pas couplés, l'équation de SCHROEDINGER est stationnaire et s'écrit

$$H_0 F_0 = E_0 F_0$$

où H_0 est l'hamiltonien du système total et E_0 son énergie. Le vecteur énergie-impulsion de chaque particule est constant. Le système n'évolue pas.

Introduisons un hamiltonien d'interaction $\varepsilon H'$, ε désigne la constante de couplage. Le système est devenu évolutif. L'état au temps t différera de l'état initial. Cette évolution obéit à l'équation

$$i \frac{\partial}{\partial t} F(t) = \varepsilon H'(t) F(t) \quad \text{avec } F(t) = e^{-i E_0 t} F_0 \quad (1)$$

où $H'(t)$ désigne l'hamiltonien dépendant du temps.

Si l'on intègre l'équation différentielle (1) par rapport au temps, on la transforme en une équation intégrale. L'état du système au temps t s'exprimera à partir de l'état initial par une matrice d'évolution $S(t, -\infty) = S(t)$ que l'on obtient en développant la solution suivant les puissances de ε .

$$F(t) = S(t) F(-\infty) \quad \text{avec} \quad (2)$$

$$S(t) = 1 + S_1(t) + S_2(t) + \dots \quad (3)$$

$$S_m(t) = (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt_m \int_{-\infty}^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_{-\infty}^{t_1} dt_1 \quad H'(t_m) H'(t_{m-1}) \cdots H'(t_1) \quad (4)$$

Il est commode d'introduire ici les fonctions

$$\begin{aligned}\theta^+(j \cdot i) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t_j < t_i \\ 1 & \text{si } t_j > t_i \end{cases} \\ \theta^-(j \cdot i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t_j < t_i \\ 0 & \text{si } t_j > t_i \end{cases}\end{aligned}\quad (5)$$

telles que

$$\theta^+(j \cdot i) + \theta^-(j \cdot i) = 1 \quad (6)$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}S_m(t) &= (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt_m \int_{-\infty}^t dt_{m-1} \cdots \int_{-\infty}^t dt_1 \theta^+(m \cdot m-1) \theta^+(m-1 \cdot m-2) \\ &\quad \cdots \theta^+(2 \cdot 1) H'(t_m) \cdots H'(t_1)\end{aligned}\quad (7)$$

Précisons le terme de couplage que nous adoptons :

$$H'(t) = \int (dx)^3 u^+(x) u(x) \varphi(x) \quad (8)$$

L'intégrale s'étend à tout l'espace tridimensionnel. Les champs $u^+(x)$, $u(x)$ et $\varphi(x)$ développés suivant un système complet d'ondes planes s'écrivent

$$\begin{aligned}u^+(x) &= \frac{1}{(2V_u)^{1/2}} \sum_k \frac{1}{k_0^{1/2}} \{a_k^+ e^{-i(kx)} + b_k^- e^{i(kx)}\} \\ u(x) &= \frac{1}{(2V_u)^{1/2}} \sum_k \frac{1}{k_0^{1/2}} \{a_k^- e^{i(kx)} + b_k^+ e^{-i(kx)}\} \\ \varphi(x) &= \frac{1}{(2V_\varphi)^{1/2}} \sum_n \frac{1}{n_0^{1/2}} \{c_n^- e^{i(nx)} + c_n^+ e^{-i(nx)}\}\end{aligned}\quad (9)$$

avec

$$(k \cdot k) = -\varkappa^2, \quad (n \cdot n) = -\mu^2$$

les a_k^+ , a_k^- , b_k^+ , b_k^- , c_n^+ , c_n^- sont les opérateurs connus de la théorie des champs quantifiés, par exemple

$$a_k^+ F(\dots, N_k, \dots) = \sqrt{N_k + 1} F(\dots, N_k + 1, \dots) \quad (10)$$

$$[a_k^+, a_{k'}^-] = -\delta_{k,k'}$$

Pour simplifier l'écriture, convenons d'écrire $u^+(i)$, $u(i)$, $\varphi(i)$ pour $u^+(x_i)$, $u(x_i)$, $\varphi(x_i)$; $u^+ u \varphi(i)$ pour $u^+(i) u(i) \varphi(i)$. Nous omettons aussi de noter les intégrales spatiales et nous abrégeons les m intégrales sur le temps par une seule sur la variable t' . S_m devient

$$S_m(t) = (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(m \cdot m-1) \cdots \theta^+(2 \cdot 1) u^+ u \varphi(m) \cdots u^+ u \varphi(1) \quad (11)$$

La définition de S_m montre que cette matrice est déterminée par m éléments $u^+ u \varphi(i)$. Chacun d'eux décrit un ensemble d'absorptions et d'émissions localisées en x_i dans l'espace-temps. Ces éléments se suivent dans un ordre opératorielle, qui coïncide avec l'ordre temporel de l'intégration représenté par les fonctions θ^+ . Nous supposons que dans chaque élément $u^+ u \varphi(i)$, tous les opérateurs d'émission sont à gauche des opérateurs d'absorption. Notre but est de trouver tous les termes que l'on obtient à partir de S_m , lorsqu'on y place les opérateurs d'émission à gauche des opérateurs d'absorption.

A cet effet, examinons le produit $u^+(j) u(i)$. Nous pouvons déplacer les opérateurs de telle manière que les opérateurs d'émission soient à gauche de ceux d'absorption. C'est ce que nous appellerons un terme ordonné. Mais cette opération fait apparaître un nouveau terme, qui résulte de la commutation des b_k et des b_k^+ , de sorte qu'on a

$$\underline{u^+(j) u(i)} = u^+(j) u(i)_{\text{ord.}} + \underline{\underline{u^+(j) u(i)}} \quad (12)$$

Le premier terme $u^+(j) u(i)_{\text{ord.}}$ décrit tous les processus qui se passent en x_j indépendamment de ceux qui ont x_i pour siège. Le second terme représente l'émission d'une particule en x_i , suivie de son absorption en x_j . Nous le nommerons terme contracté et contraction le processus qu'il décrit. Il ne contient plus d'opérateurs et vaut:

$$\underline{\underline{u^+(j) u(i)}} \equiv \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{V_u k_0} e^{i(k \cdot x_j - x_i)} \equiv \frac{1}{2} D_u^+(j \cdot i) \quad (13)$$

De même, nous transformons les produits $u(x_j) u^+(x_i)$ et $\varphi(x_j) \varphi(x_i)$ en produits ordonnés auxquels nous ajoutons les termes contractés correspondants

$$\begin{aligned} u(x_j) u^+(x_i) &= u(x_j) u^+(x_i)_{\text{ord.}} + \underline{\underline{u(x_j) u^+(x_i)}} \\ \varphi(x_j) \varphi(x_i) &= \varphi(x_j) \varphi(x_i)_{\text{ord.}} + \underline{\underline{\varphi(x_j) \varphi(x_i)}} \end{aligned} \quad (14)$$

On peut aisément interpréter les contractions que nous venons d'introduire. Chacune représente l'émission d'une particule en x_i suivie de son absorption en x_j , soit:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u^+(x_j) u(x_i)}} &= \frac{1}{2} D_u^+(j \cdot i) \quad \text{particule } \pi \text{ négative} \\ \underline{\underline{u(x_j) u^+(x_i)}} &= \frac{1}{2} D_u^+(j \cdot i) \quad \text{particule } \pi \text{ positive} \\ \underline{\underline{\varphi(x_j) \varphi(x_i)}} &= \frac{1}{2} D_\varphi^+(j \cdot i) \quad \text{particule } \mu \text{ neutre} \end{aligned} \quad (15)$$

Pour simplifier les notations, nous convenons d'écrire:

$$u^+ u_{\text{ord.}} = u^+ u \quad (16)$$

pour les produits ordonnés. Autrement dit, dans le terme général S_m , nous n'indiquerons que les contractions, sous-entendant par là que tous les opérateurs qui ne sont pas touchés par elles sont ordonnés, c'est-à-dire que les opérateurs d'absorption sont à droite des opérateurs d'émission. Ceci fixé, on voit que toute combinaison de contractions effectuées sur le terme général S_m , (11), en extrait un terme particulier. Désignons par α une combinaison déterminée de contractions, et $S_m(\alpha)$ le terme ordonné qui lui correspond, il est clair que la correspondance est biunivoque entre α et $S_m(\alpha)$.

Considérons par exemple le terme général S_2 , qui contient le produit des deux éléments

$$u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)$$

Il se décompose dans les termes suivants α_r correspondant chacun à une combinaison donnée de contractions.

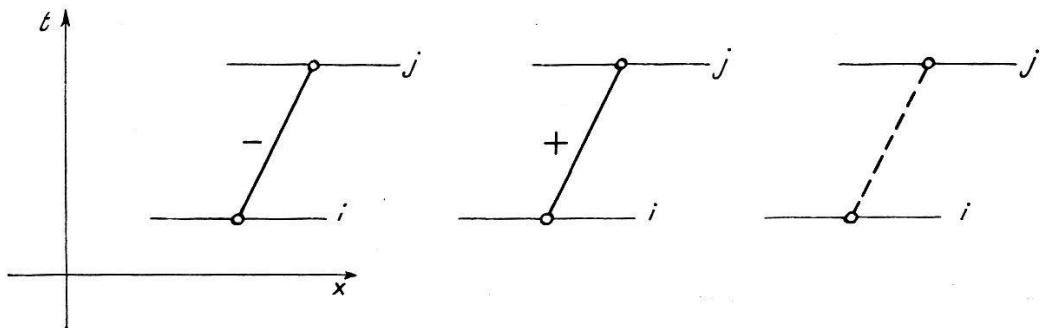
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1)_{\text{ord.}} = u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1) \\ \alpha_1 &= \underbrace{u^+ u \varphi(2)}_{|} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{|} \quad \alpha_2 = u^+ u \underbrace{\varphi(2)}_{|} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{|} \\ \alpha_3 &= u^+ u \underbrace{\varphi(2)}_{|} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{|} \quad \alpha_4 = u^+ \underbrace{u \varphi(2)}_{|} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{|} \\ \alpha_5 &= u^+ \underbrace{u \varphi(2)}_{|} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{||} \quad \alpha_6 = u^+ \underbrace{u \varphi(2)}_{|} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{||} \\ \alpha_7 &= u^+ \underbrace{u \varphi(2)}_{|} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{|||} \end{aligned} \quad (17)$$

Il est possible de donner une représentation graphique pour chaque terme α et par conséquent pour chaque $S_m(\alpha)$. Pour cela, observons que chaque élément $u^+ u \varphi(i)$ correspond à un point de l'espace-temps: x_i . Comme les trois dimensions spatiales sont équivalentes, nous n'en considérerons qu'une x associée au temps t . Nous placerons chaque point x_i dans le plan x, t , en tenant compte de l'ordre temporel donné par les fonctions θ^+ . Puis, nous réunirons par une ligne les points ou nœuds ou sommets entre lesquels existe

une contraction. Chaque contraction sera représentée par une ligne différente, correspondant aux trois types de contractions de (15). Ainsi à

$$\begin{array}{c} u^+(j) \ u(i) \\ \boxed{\quad} \end{array} \quad \begin{array}{c} u(j) \ u^+(i) \\ \boxed{\quad} \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi(j) \ \varphi(i) \\ \boxed{\quad} \end{array} \quad (18)$$

correspondront

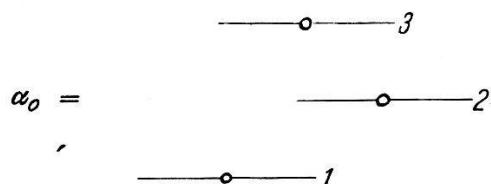


qui décrivent les échanges de particules ν négatives, ν positives, et μ . Si entre deux nœuds il y a plusieurs contractions, chacune sera portée dans le diagramme ou graphe correspondant. Voici quelques exemples :

A la matrice $S_3(\alpha_0)$, où α_0 désigne le terme ordonné sans contraction

$$S_3(\alpha_0) = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+ (3 \cdot 2) \theta^+ (2 \cdot 1) u^+ u \varphi(3) u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(1) \quad (19a)$$

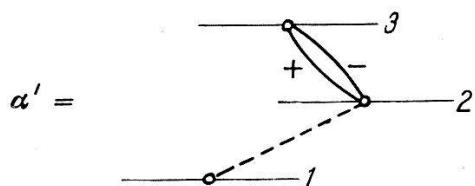
correspond le graphe



tandis qu'à

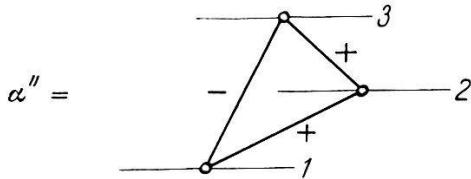
$$S_3(\alpha') = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+ (3 \cdot 2) \theta^+ (2 \cdot 1) u^+ u \varphi(3) \boxed{u^+ u \varphi(2)} \boxed{u^+ u \varphi(1)} \quad (19b)$$

correspond



et à

$$S_3(\alpha'') = (-i\varepsilon)^3 \int_{-\infty} dt' \theta^+ (3 \cdot 2) \theta^+ (2 \cdot 1) \underbrace{u^+ u \varphi(3)}_{-} \underbrace{u^+ u \varphi(2)}_{+} \underbrace{u^+ u \varphi(1)}_{-} \quad (19c)$$



Il est manifeste que la correspondance est biunivoque entre un terme α ou $S_m(\alpha)$ et le diagramme représentatif. Ce dernier comporte m points ou sommets ou nœuds, qui peuvent être reliés par des lignes. C'est le graphe représentatif de α .

Nous disposerons les $S_m(\alpha)$ en groupes invariants pour une transformation de LORENTZ. Au lieu de regarder l'indice i lié à l'ordre temporel représenté par les fonctions θ^+ , on peut définir une numérotation intrinsèque des sommets. Définissons la permutation de deux sommets j et i . Par cette opération, nous entendons le produit ordonné que l'on obtient en permutant les deux éléments $u^+ u \varphi(j)$ et $u^+ u \varphi(i)$, en laissant subsister les contractions qui les lient. Quelques exemples feront comprendre cette opération: soit P_{ji} l'opération en question, on aura:

$$\begin{aligned} P_{ji} \left\{ \underbrace{u^+ u \varphi(j)}_{-} \underbrace{u^+ u \varphi(i)}_{+} \right\} &= u^+ u \varphi(i) \underbrace{u^+ u \varphi(j)}_{-} \\ P_{ji} \left\{ \underbrace{u^+ u \varphi(j)}_{-} \underbrace{u^+ u \varphi(i)}_{-} \right\} &= u^+ u \varphi(i) \underbrace{u^+ u \varphi(j)}_{-} \\ P_{ji} \left\{ \underbrace{u^+ u \varphi(j)}_{-} \underbrace{u^+ u \varphi(i)}_{-} \right\} &= u^+ u \varphi(i) \underbrace{u^+ u \varphi(j)}_{-} \end{aligned} \quad (20)$$

ou encore, si l'on utilise les graphes représentatifs:

$$P_{ji} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \textcircled{j} \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{i} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \textcircled{i} \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{j} \end{array} \quad P_{ji} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ + \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{j} \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{i} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ + \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{i} \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{j} \end{array}$$

$$P_{ji} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \textcircled{i} \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{j} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \textcircled{j} \\ | \\ \text{---} \\ \textcircled{i} \end{array} \quad (21)$$

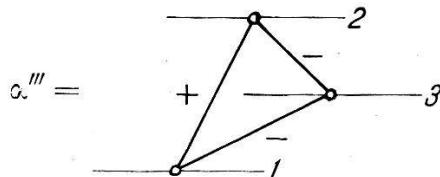
On voit que cette opération échange les contractions \varkappa^+ et \varkappa^- , tandis qu'elle laisse la contraction μ inchangée. Donnons

un autre exemple. En permutant les sommets 2 et 3 de (19c), il vient:

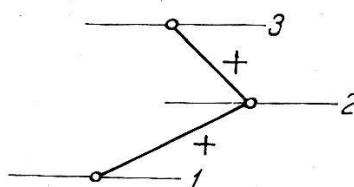
$$S_3(\alpha''') = (-i\epsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+(2 \cdot 3) \theta^+(3 \cdot 1) u^+ u \varphi(2) u^+ u \varphi(3) u^+ u \varphi(1)$$

(22)

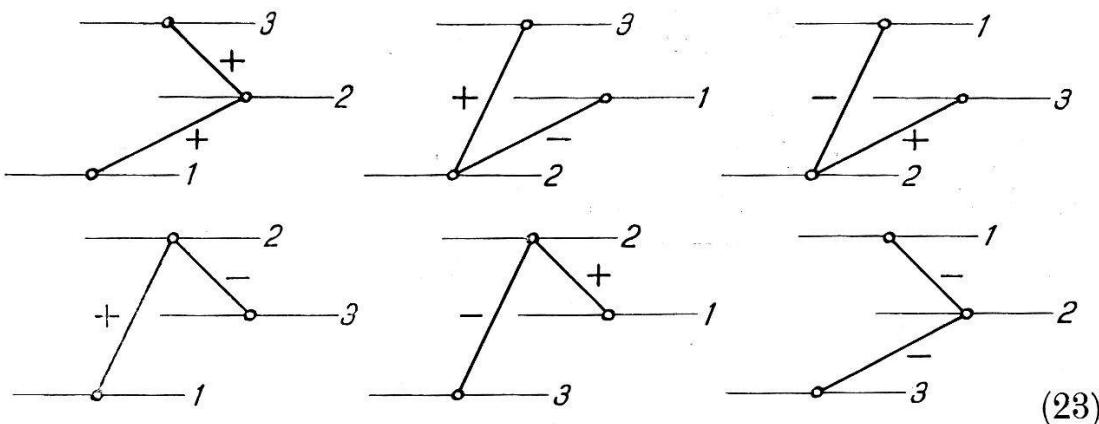
et son graphe



Nous définirons deux termes α_1, α_2 de S_m comme équivalents quand l'un se déduit de l'autre par des permutations de ses sommets. Nous grouperons tous les termes équivalents entre eux en groupes. Soit un terme α , $[\alpha]$ désignera α et tous les éléments qui lui sont équivalents. On voit facilement que $[\alpha]$ contient $m!$ éléments. Par exemple, le groupe des termes équivalents à



est



A chaque graphe α de $[\alpha]$, on pourra naturellement faire correspondre une matrice $S_m(\alpha)$, et au groupe $[\alpha]$, on associera la matrice

$$S_m([\alpha]) = \sum_{[\alpha]} S_m(\alpha) \quad (24)$$

où α parcourt les $m!$ éléments équivalents à un élément donné α .

Si α est un graphe donné, et $S_m(\alpha)$ la matrice correspondante, $[\alpha]$ contenant $m!$ graphes équivalents, $S_m([\alpha])$ sera formée de la

somme de $m!$ matrices. Or, il importe de remarquer qu'il n'y a pas en général $m!$ matrices équivalentes dans le terme général S_m (11). Pour le montrer, définissons l'égalité de deux graphes. Nous dirons que deux graphes α_1, α_2 sont égaux entre eux quand ils sont superposables et qu'ils ne diffèrent que par leur numérotation. Divisons le groupe $[\alpha]$ des termes équivalentes à α en classes de restes dont chacune contiendra tous les termes égaux entre eux. Soit $\{\alpha\}$ la classe de reste des termes égaux au terme α . Comme le nombre des termes égaux entre eux ne dépend que de la structure du graphe, il est clair que chacune des classes de restes $\{\alpha\}$ de $[\alpha]$ contiendra le même nombre de termes: N_α . Chaque classe de restes $\{\alpha\}$ correspond à une et une seule matrice $S_m(\alpha)$, réellement présente dans le terme général (11). Il y a correspondance biunivoque entre les classes de restes $\{\alpha\}$ et les matrices $S_m(\alpha)$ du terme général.

On peut encore exprimer la décomposition qui précède de la façon suivante. L'ensemble des $m!$ permutations forment un groupe $[\alpha]$ qui contient $m!$ éléments, dont chaque graphe est un représentant. L'ensemble des permutations, que nous appelons renumérotation d'un graphe donné, forme un sous-groupe de $[\alpha]$, sous-groupe que nous désignons par $\{1\}$. C'est le sous-groupe des automorphismes d'un graphe déterminé. Soit $N_{\{1\}}$ le nombre des éléments de $\{1\}$. Une décomposition du groupe en classes de restes modulo $\{1\}$, et, suivant les éléments $\alpha', \alpha'', \dots, s'$ écrit

$$[\alpha] = \{1\} + \alpha' \{1\} + \alpha'' \{1\} + \dots \quad (25)$$

Cette décomposition est univoque et chacune des $m!/N_{\{1\}}$ classes de restes contient N_α éléments. D'après la définition des matrices $S_m(\alpha)$ à partir du terme général (11), dans lequel on effectue une certaine combinaison de contractions, la correspondance est biunivoque entre les classes de restes et les $S_m(\alpha)$ équivalentes et réellement présentes dans (11).

La correspondance entre α et les mêmes matrices n'est donc biunivoque que dans le cas où chaque classe de restes ne contient qu'un élément. Alors $\{1\}$ ne contient qu'un élément, l'unité. C'est le cas, par exemple, du groupe (23), dont chaque élément forme une classe de restes.

Dans le cas général, si $\langle \alpha \rangle$ désigne l'ensemble des matrices équivalentes entre elles et réellement présentes dans (11), on aura pour la matrice

$$S_m(\langle \alpha \rangle) = \sum_{\alpha} S_m(\alpha) \quad (26)$$

où α parcourt tous les éléments équivalents du terme général (11):

$$S_m (<\alpha>) = \frac{1}{N_\alpha} S_m ([\alpha]) \quad (27)$$

Donnons quelques exemples: soit le terme α'

$$S_2 (\alpha') = (-i \varepsilon)^2 \int_{-\infty} dt' \theta^+ (2 \cdot 1) u^+ u \varphi(2) \underbrace{u^+ u \varphi(1)}$$

La permutation des nœuds 1 et 2 donne α''

$$S_2 (\alpha'') = (-i \varepsilon)^2 \int_{-\infty} dt' \theta^+ (1 \cdot 2) u^+ u \varphi(1) \underbrace{u^+ u \varphi(2)}$$

qui n'est rien d'autre que le premier terme, dans lequel on a renomméroté les nœuds. Les deux graphes correspondants

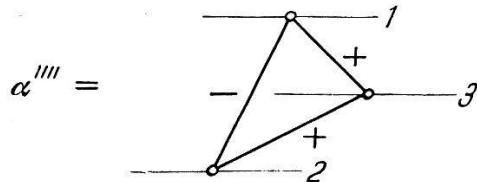


sont superposables et appartiennent donc à une même classe de restes. Le nombre N_α correspondant est 2.

Reprendons aussi les termes (19c) et (22). Leurs graphes ne sont pas superposables. Ils appartiennent à des classes de restes différentes et correspondent à deux termes réellement présents dans la matrice S_3 . Par contre, toute permutation cyclique appliquée à l'un d'eux redonne le même terme: ainsi la permutation cyclique (231) appliquée à (19c) donne

$$S_3 (\alpha''') = (-i \varepsilon)^3 \int_{-\infty}^t dt' \theta^+ (1 \cdot 3) \theta^+ (3 \cdot 2) u^+ u \varphi(1) \underbrace{u^+ u \varphi(3)} \underbrace{u^+ u \varphi(2)} \quad (28)$$

qui est le terme (19c) à la numérotation près des variables d'intégration. Le graphe correspondant



est superposable au graphe (19c) et les deux termes sont égaux.

Ils appartiennent à la même classe de restes. Le sous-groupe $\{1\}$ est ici le groupe cyclique d'ordre 3, et l'on a $N_\alpha = 3$.

Chacune des matrices $S_m([\alpha]) = N_\alpha S_m(<\alpha>)$ est invariante pour une transformation de LORENTZ. En effet, toute transformation de LORENTZ transforme un graphe donné en un graphe qui lui est équivalent. Le groupe des graphes équivalents se transforme en lui-même et la proposition est démontrée.

Un graphe étant donné et par lui le groupe des graphes qui lui sont équivalents, il nous reste à trouver la structure analytique de la matrice $S_m([\alpha])$ ou $S_m(<\alpha>)$ correspondante. Reprenons le terme général (11). Au lieu de fixer la succession temporelle des m points ou nœuds par les $m - 1$ fonctions θ^+ , on peut compléter cette description en introduisant des fonctions en surnombre. Ainsi nous fixerons la position de chaque nœud relativement aux autres :

$$\begin{aligned} S_m(t) = & (-i\varepsilon)^m \int_{-\infty}^t dt' \theta^+ (m \cdot m - 1) \theta^+ (m \cdot m - 2) \dots \\ & \theta^+ (m \cdot 1) \theta^+ (m - 1 \cdot m - 2) \dots \theta^+ (m - 1 \cdot 1) \dots \\ & \theta^+ (2 \cdot 1) u^+ u \varphi(m) \dots u^+ u \varphi(1) \end{aligned} \quad (29)$$

Au lieu des $m - 1$ fonctions θ^+ , on a maintenant $\frac{m(m-1)}{2}$ fonctions, dont la plupart sont en surnombre. Soit un ensemble de contractions effectuées sur S_m et définissant un terme α . Au lieu de noter ces contractions dans le terme général, comme nous l'avons fait dans (19 b) ou (19 c), nous remplacerons la contraction par son expression analytique correspondante $D_u^+(j \cdot i)$ définie par (15). Ces contractions ont pour effet de réduire le nombre des champs des éléments $u^+ u \varphi(i)$. Désignons par $R(i)$ les champs restants liés au point i . Comme il y a coïncidence entre l'ordre temporal des fonctions $\theta^+(j \cdot i)$ et l'ordre opératorielle des différents éléments $u^+ u \varphi(i)$, les fonctions $\theta^+(j \cdot i)$ et $D_u^+(j \cdot i)$ correspondant à deux points j et i , entre lesquels il y a une contraction, apparaîtront toujours dans la combinaison :

$$\theta^+(j \cdot i) D_u^+(j, i)$$

L'ordre $(j \cdot i)$ est le même dans la fonction $\theta^+(j \cdot i)$ et dans la fonction $D_u^+(j \cdot i)$.

⁹ Définissons encore par analogie avec (5) :

$$\begin{aligned} \theta^-(j \cdot i) &= \theta^+(i \cdot j) \\ D_u^-(j \cdot i) &= D_u^+(i \cdot j) \end{aligned} \quad (30)$$

et notons par j et i les couples de nœuds entre lesquels il n'y a pas de contraction, par p et q les couples de nœuds entre lesquels il y a contraction. Le terme correspondant à α s'écrira :

$$S_m(\alpha) = (-i\epsilon)^m \int_{-\infty}^t dt' \prod_{j,i} \theta^+(j \cdot i) \prod_{p,q} \theta^+(p \cdot q) \frac{1}{2} D_u^+(p \cdot q) \prod_{l=1}^m R(l) \quad (31)$$

Dans cette formule, lorsque, entre un couple de points p et q , il y a plusieurs contractions, il suffit de faire apparaître les produits $\theta^+(p \cdot q) \frac{1}{2} D_u^+(p \cdot q)$ correspondants.

A partir de $S_m(\alpha)$, essayons de former la matrice $S_m([\alpha])$ correspondant au groupe de termes équivalents à α . Pour cela, considérons la somme suivante :

$$S_m(\sum \theta^\pm) = (-i\epsilon)^m \sum_{\pm} \int_{-\infty}^t dt' \prod_{j,i} \theta^\pm(j \cdot i) \prod_{p,q} \theta^\pm(p \cdot q) \frac{1}{2} D_u^\pm(p \cdot q) \prod_{l=1}^m R(l) \quad (32)$$

où la somme est à effectuer sur toutes les combinaisons possibles des fonctions θ^+ et θ^- . Chaque fonction $\theta(r \cdot s)$ pouvant devenir θ^+ ou θ^- , il y aura au moins $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$ termes dans cette somme. Considérons l'un d'entre eux, en supposant qu'il est différent de 0. Comme nous avons conservé les mêmes expressions résiduelles $R(l)$, et que les contractions sont fixées par les couples de nœuds p et q , le fait de changer un certain nombre de fonctions θ^+ de (31) en fonctions θ^- , revient à redistribuer les nœuds dans le temps. C'est simplement une permutation, qui conduit à un terme équivalent à α . Cette remarque montre que tout terme de (32) différent de 0 peut être réinterprété sous la forme d'un graphe, équivalent au graphe représentatif du terme primitif α , (31). Or, nous savons qu'il y a $m!$ graphes équivalents entre eux qui forment le groupe $[\alpha]$. Nous en concluons que la somme (32) ne contient que $m!$ termes différents de 0, et qu'elle se réduit donc à $S_m([\alpha])$. Il est facile de comprendre que les termes nuls proviennent des relations d'incompatibilité des différentes fonctions θ^+ et θ^- présentes dans chaque terme de la somme (32). Ainsi, si l'on reprend le terme (23), on constate qu'en plus des 6 termes indiqués, la somme $S_m(\sum \theta^\pm)$ correspondante introduit deux termes nuls, qui contiennent les combinaisons de fonctions

$$\theta^+(3 \cdot 1) \theta^-(3 \cdot 2) \theta^-(2 \cdot 1) \equiv 0$$

$$\theta^-(3 \cdot 1) \theta^+(3 \cdot 2) \theta^+(2 \cdot 1) \equiv 0$$

Nous définirons enfin la fonction $D_{\varphi}^c(p \cdot q)$, où i est l'unité imaginaire:

$$D_{\varphi}^c(p \cdot q) = \frac{i}{2} \left\{ \theta^+(p \cdot q) D_{\varphi}^+(p \cdot q) + \theta^-(p \cdot q) D_{\varphi}^-(p \cdot q) \right\}^* \quad (33)$$

de sorte que l'on aura, en observant que

$$\sum_{(\pm)} \prod_{j,i} \theta^{\pm}(j \cdot i) = \prod_{j,i} \{ \theta^+(j \cdot i) + \theta^-(j \cdot i) \} = 1$$

$$S_m(<\alpha>) = \frac{1}{N_\alpha} S_m([\alpha]) = \frac{(-i\varepsilon)^m}{N_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \prod_{p,q} \frac{1}{i} D_{\varphi}^c(p \cdot q) \prod_{l=1}^m R(l) \quad (34)$$

Il apparaît donc que, le graphe représentatif de α étant donné, il est possible d'écrire immédiatement la matrice $S_m(<\alpha>)$, somme de toutes les matrices équivalentes à $S_m(\alpha)$, présentes dans $S_m(11)$. Cette matrice partielle est invariante d'après ce qui précède.

Nous tenons à remercier ici M. le Professeur E. STUECKELBERG et M. le Dr D. RIVIER de l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail, ainsi que la Commission Suisse pour les recherches atomiques qui l'a encouragé.

Institut de Physique de l'Université de Genève,

*) La fonction D^c , introduite par MM. STUECKELBERG et RIVIER: Phys. Rev. 74, 1948, p. 218, est notée D_F dans le travail de M. F. DYSON: Phys. Rev. 75, 1949, p. 486.