

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 22 (1949)  
**Heft:** III  
  
**Artikel:** Zur paraxialen elektronenoptischen Abbildung  
**Autor:** Borgnis, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-112005>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zur paraxialen elektronenoptischen Abbildung

von F. Borgnis.

(27. II. 1949.)

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Untersuchung waren die allgemeinen Eigenschaften der achsennahen elektronenoptischen Abbildung betrachtet worden<sup>1)</sup>. Im Folgenden werden noch einige ergänzende Betrachtungen und Literaturhinweise angefügt, die im Zusammenhang damit von Interesse sein dürften.

1. Die Differentialgleichung der paraxialen Elektronenbahnen (I, (5))

$$\frac{d}{dz} \left( \sqrt{\Phi} \frac{dr}{dz} \right) = [n(z) \cdot r']' = P(z) \cdot r \quad (1)$$

besitzt die allgemeine Lösung (I, (6))

$$r(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z). \quad (2)$$

Für die Wronskische Determinante  $\Delta = f_1 f_2' - f_1' f_2$  folgt unter Anwendung einer bekannten Formel<sup>2)</sup> aus (1) nach kurzer Rechnung die Beziehung  $\Delta(z) \cdot n(z) = \text{konst.}$  oder

$$\Delta = f_1(z) f_2'(z) - f_1'(z) f_2(z) = \frac{\text{konst.}}{n(z)} \quad (3)$$

wie in I, Abschnitt 2 auf andere einfache Weise nochmals hergeleitet<sup>3)</sup>. Durch Einsetzen von (2) und  $n(z)$  nach (3) in (1) erhält man nach kurzer Rechnung

$$f_1''(z) f_2'(z) - f_1'(z) f_2''(z) = \text{konst.} \cdot \frac{P(z)}{n^2(z)}. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> F. BORGNIS, *Helv. Phys. Acta* XXI, 6 (1948) 461; darauf bezügliche Hinweise werden hier mit der Ziffer I versehen.

<sup>2)</sup> z. B. E. KAMKE, *Differentialgleichungen I* (Leipzig 1944) § 5, 17. 1.

<sup>3)</sup> S. a. W. GLASER, *Z. f. Phys.* **81**, 647 (1933) und V. K. ZWORYKIN u. a., *Electron optics and the electron microscope* (1946), S. 429. Als Folge dieser Beziehung ergab sich die Gültigkeit des Satzes von LAGRANGE-HELMHOLTZ sowohl für reelle und virtuelle Bilder im Fall  $C = 0$  als auch für reelle Bilder für  $C \neq 0$  (schief zur Achse verlaufende Strahlen). Herr GLASER hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, dass (für den Fall  $C = 0$  bei reellem Bild) auf die Beziehung zwischen (3) und dem Lagrange-Helmholtzschen Satz in seiner Untersuchung *Z. f. Phys.* **116**, 56 (1940) hingewiesen ist.

Die Beziehungen (3) und (4) erlauben die Bestimmung von  $P(z)$  und  $n(z)$ , d. h. der die Abbildung erzeugenden Felder, wenn zwei beliebige, linear unabhängige Integrale  $f_1$  und  $f_2$  von (1) bekannt sind. Mit den in I, (11), eingeführten Integralen  $r_1$  und  $r_2$  mit speziellen Anfangsbedingungen an einer Stelle  $z = a$  nimmt die Konstante in (3) und (4) den Wert konst. =  $n(a)$  an (I, 22); das elektrische Potential  $\Phi = n^2$  und die magnetische Induktion  $B$  längs der  $z$ -Achse folgen mit (3), (4) und  $P(z)$  nach (I, (3)) zu

$$\frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} = \frac{1}{A^2(z)} = \frac{1}{[r_1(z)r_2'(z) - r_1'(z)r_2(z)]^2} \quad (5)$$

$$\frac{e}{8m} \frac{B^2(z)}{\Phi(a)} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} \right)'' + \left( \frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} \right)^{3/2} [r_1'(z)r_2''(z) - r_1''(z)r_2'(z)]. \quad (6)$$

Bei Kenntnis von  $r_1$  und  $r_2$  lassen sich daher die zu diesen Integralen der Bewegungsgleichung gehörigen Felder an jeder Stelle  $z$  bestimmen.  $\Phi(a)$  kann dabei, wie bekannt, noch beliebig gewählt werden. Für die speziellen Fälle eines rein elektrischen Feldes ( $B = 0$ ) oder rein magnetischen Feldes ( $\Phi(z) = \Phi(a)$ ) folgen aus (5) und (6) entsprechend vereinfachte Beziehungen.

Die charakteristischen Bestimmungsstücke einer paraxialen Abbildung (Bildort, Brennweiten, Vergrößerungen) sind, wie in I gezeigt, durch die Funktionswerte und Lage der Null- bzw. Extremalstellen der Funktionen  $r_1$  und  $r_2$ , d. h. zweier spezieller Elektronenbahnen, gegeben. Nach Festlegung dieser ausgezeichneten Werte sind die Bildfehler der ausserparaxialen Abbildung noch Funktionen des Zwischenverlaufes von  $r_1$  und  $r_2$ . Dieser wird zweckmässig so zu wählen sein, dass gewisse Bildfehler, beispielsweise die geometrische Aberration, möglichst kleine Werte annehmen. Sind  $r_1$  und  $r_2$  in ihrem ganzen Verlauf gegeben, so erhält man aus (5) und (6) das elektrische Potential bzw. das magnetische Feld längs der optischen Achse, woraus sich die Felder in der weiteren Umgebung der Achse bzw. Äquipotentialflächen und Strombelegungen in bekannter Weise ermitteln lassen<sup>1)</sup>.

2. Die in I, Abschnitt 3 und 6 der Reihe nach betrachteten allgemeinen Abbildungseigenschaften lassen sich anschaulich der nachstehenden Figur 1 entnehmen: An irgendeiner Stelle  $z = a$  befinde sich eine feste Objektebene; wir verfolgen das virtuelle Bild, welches einer Ebene  $z$  zugeordnet ist, wenn wir diese Ebene nach rechts stetig wandern lassen. Dabei genügt es, wie man einsieht, einen Objektpunkt auf der Achse ( $r(a) = 0$ ) zu betrachten. Nach I, (37) gilt für die Lage  $\zeta_0$  des zugehörigen Bildpunktes

$$\zeta_0 = z - \frac{r_2(z)}{r_2'(z)}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> O. SCHERZER, Z. f. Phys. **80**, 193 (1933).

In der Figur sind zwei beliebige von  $a$  ausgehende Bahnen gezeichnet, für die wegen  $r(a) = 0$  mit I, (12) die Gleichung  $r(z) = r'(a) \cdot r_2(z)$  gilt. Aus dem charakteristischen Verlauf von  $r_2(z)$  (I, Fig. 1) geht hervor, dass zunächst  $r_2/r_2'$  positiv ist, wenn man mit der Ebene  $z$  von  $z = a$  aus nach rechts geht. Das virtuelle Bild wandert also nach links ( $\xi_0 < z$ ); an der Stelle  $z = \bar{p}_1$  ( $r_2'(\bar{p}_1) = 0$ ) werden alle von  $a$  ausgehenden Bahnen achsenparallel; das virtuelle Bild liegt im Unendlichen. Es kommt dann, da nun  $r_2'$  sein Vorzeichen ändert, von rechts wieder aus dem Unendlichen herein<sup>1)</sup>, um bei  $b_1$  ( $r_2(b_1) = 0$ ) mit dem ersten reellen Bild von  $a$  zusammenzufallen. Dann wandert es wieder nach links ins Unendliche (bei der zweiten

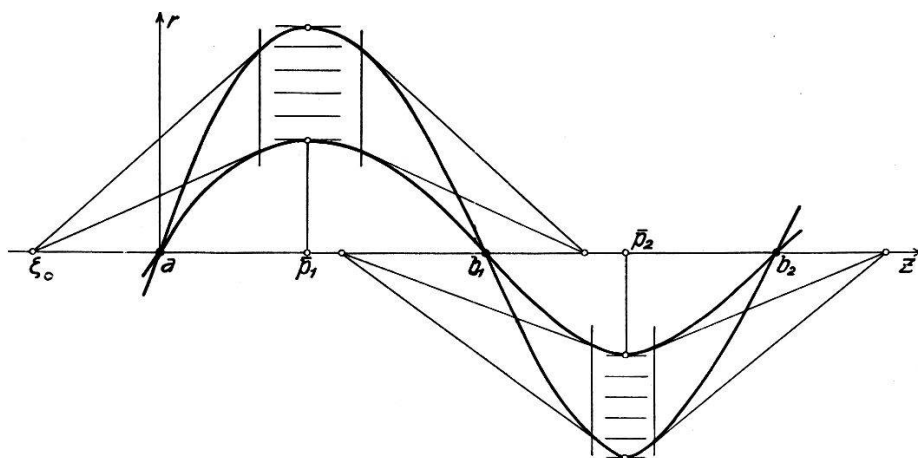


Fig. 1.

Die von einer Objektebene  $z = a$  ausgehenden achsennahen Elektronenbahnen erzeugen in jeder Ebene  $z$  ein virtuelles Bild (s. Anm. 1 unten), das an den Stellen  $p$  im Unendlichen liegt und an den Stellen  $b$  mit dem reellen Bild identisch wird.

Nullstelle  $\bar{p}_2$  von  $r_2'$ ), um erneut von rechts kommend dem zweiten reellen Bild bei  $b_2$  zuzustreben und so weiter. Man ersieht aus der Figur anschaulich die vier allgemeinen Eigenschaften der paraxialen Abbildung: Zu jeder Objektebene  $a$  gehören Stellen  $\bar{p}_k$ , wo alle von einem Punkt bei  $a$  kommenden Bahnen parallel werden (von einem Punkt  $r(a)$  ausserhalb der Achse kommende Bahnen besitzen dort eine Neigung  $r'(\bar{p}_k) = r(a) \cdot r_1'(\bar{p}_k)$ ) und Stellen  $b_k$  mit reellen Bildern. Betrachten wir als Ausgangsebene die Ebene  $z = \bar{p}_1$ , so gehören zu jeder diese Ebene mit einer bestimmten Neigung durchsetzenden Parallelenschar reelle Bildpunkte  $b_k$  und wiederum eine Parallelenschar in den folgenden Ebenen  $z = \bar{p}_k$  (teleskopische Abbildung). Die Verschiebung des «virtuellen Bildes» bei einer stetigen

<sup>1)</sup> Wir bezeichnen hier verallgemeinernd als «virtuelles Bild» den Vereinigungspunkt der von einer Ebene  $z$  aus nach links oder rechts verlaufenden Strahlen, welche die geradlinige Fortsetzung der Bahntangenten in der Ebene  $z$  bilden.

Bewegung der zugeordneten Ebene  $z$  nach rechts folgt unmittelbar aus (8):

$$\frac{d\zeta_0}{dz} = \frac{r_2(z) r_2''(z)}{[r_2'(z)]^2}. \quad (8)$$

Bei rein magnetischen Linsen ( $n = \text{konst.}$ ) besitzt  $r_2''$  überall das entgegengesetzte Vorzeichen wie  $r_2$ ; hier läuft also das virtuelle Bild stetig nach links, wenn die Ebene  $z$  nach rechts wandert. Bei Anwesenheit elektrischer Felder können Bereiche mit wechselnder Bewegungsrichtung des virtuellen Bildes auftreten.

3. Reelle Bilder entstehen an den Stellen  $b_k$  bei  $r_2(b_k) = 0$ . Da  $r_2(z)$  wegen der speziellen Anfangsbedingungen (I, 11) bei  $z = a$  die Grösse  $a$  als Parameter enthält, bestimmt sich der Zusammenhang zwischen Bild- und Objektlage<sup>1)</sup> durch (I, 30):

$$r_2(b_k, a) = 0. \quad (9)$$

Drückt man  $r_2$  nach (2) durch beliebige andere linear unabhängige Integrale  $f_1$  und  $f_2$  aus, so folgt auch wegen  $r_2(a) = r_2(b_k) = 0$  sofort die gleichwertige Bedingung (I, (33))<sup>2)</sup>

$$\frac{f_2(a)}{f_1(a)} = \frac{f_2(b_k)}{f_1(b_k)}. \quad (10)$$

Liegen Objekt und Bild im feldfreien Raum, so besteht zwischen  $b_k$  und  $a$ , wie bekannt und in I, Abschnitt 7 nochmals hergeleitet, eine kollineare Beziehung, d. h. die Abbildung genügt, wie die lichtoptischen Abbildungen durch zentrierte Linsensysteme, den Sätzen der Gaußschen Dioptrik.

Befinden sich Objekt und Bild ganz oder teilweise im wirksamen Bereich des Feldes, so wird im allgemeinen keine kollineare Beziehung zwischen  $b_k$  und  $a$  bestehen (vgl. I, Abschnitt 5). Man kann sich aber die Frage vorlegen, welche *speziellen* Feldverteilungen zu einer Kollineation zwischen  $b_k$  und  $a$  führen, auch wenn die Abbildung im Feldbereich zustande kommt. Die Antwort hierauf wurde von W. GLASER und E. LAMMEL gegeben<sup>3)</sup>; eines der einfachsten Felder dieser Art ist der von W. GLASER<sup>2)</sup> ausführlich behandelte Fall einer rein magnetischen Linse mit einer Feldverteilung der Form  $B = B_0/(1 + (z/a)^2)$ .

<sup>1)</sup> Vgl. auch BRÜCHE-SCHERZER, Geometrische Elektronenoptik (1934), S. 84.

<sup>2)</sup> W. GLASER, Z. f. Phys. **117**, 285 (1941).

<sup>3)</sup> W. GLASER u. E. LAMMEL, Ann. d. Phys. (V) **40**, 367 (1941).