Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 22 (1949)

Heft: II

Artikel: Die Anwendung eines Satzes über die Nullstellen Stochastischer Funktionen auf Turbulenzmessungen

Autor: Liepmann, H.W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111995

Die Anwendung eines Satzes über die Nullstellen Stochastischer Funktionen auf Turbulenzmessungen

von **H. W. Liepmann.**

(18. III. 1949.)

Zusammenfassung. Die mittlere Anzahl der Nullstellen einer stochastischen Funktion steht nach Rice im direkten Zusammenhang mit dem mittleren Quadrat ihrer Ableitung. Wendet man diesen Satz auf die Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit in isotroper Turbulenz an, dann kann man unter gewissen Voraussetzungen die für die Dissipation charakteristische Länge λ durch Zählung der Nullstellen bestimmen. Messungen dieser Art sind durchgeführt worden, und die Ergebnisse wurden mit drei anderen unabhängigen Bestimmungen von λ verglichen.

1. Die Zahl der Nullstellen einer Stochastischen Funktion.

Sei $J(t)$ eine stochastische Funktion der Zeit t. Der zeitliche Mittelwert $\overline{J(t)}$ sei null und der durch $J(t)$ beschriebene Vorgang stationär, d. h. die Korrelationsfunktion

$$\psi(\tau) = \overline{J(t)\, J\,(t+\tau)}$$

hänge nur von τ und nicht von t ab. Wie oft nimmt die Funktion $J(t)$ im Mittel in der Zeiteinheit den Wert ξ an? Fragen dieser Art sind von Rice[1]) diskutiert worden*).

Unter gewissen Voraussetzungen gilt speziell für die mittlere Anzahl der Nullstellen N_0, $(\xi = 0)$, in der Zeiteinheit

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{-\frac{\psi''(0)}{\psi(0)}} \tag{1}$$

Da für einen stationären Prozess mit $\psi(\tau)$ gilt:

$$-\psi''(0) = \overline{\left(\frac{dJ}{dt}\right)^2} = \overline{J'^2}$$

folgt

$$N_0^2 = \frac{\overline{J'^2}}{\pi^2 \overline{J^2}} \tag{2}$$

und damit hat man eine Beziehung zwischen der mittleren Anzahl

---

*) Weitere Literaturangaben findet man in der Arbeit von Rice.

der Nullstellen und dem mittleren Quadrat der Ableitung. Definiert man eine Spektraldichte $F(n)$ derart, dass

$$\psi(0) = \overline{J^2} = \int_0^\infty F(n)\, dn$$

ist, dann gilt:

$$\psi(\tau) = \int_0^\infty F(n) \cos(2\pi n \tau)\, dn$$

und

$$-\psi''(0) = 4\pi^2 \int_0^\infty n^2 F(n)\, dn. \tag{3}$$

Dann folgt aus (1) auch:

$$N_0^2 = 4 \frac{\int_0^\infty n^2 F(n)\, dn}{\int_0^\infty F(n)\, dn} = 4\,\overline{n^2}.$$

Die Relation (3) ist analog der einfachen harmonischen Schwingung, für welche $N_0^2 = 4\,n^2$ ist.

Die Voraussetzungen, die zu der Beziehung (1) führen, können durch eine einfache Überlegung gezeigt werden. Für eine strengere Ableitung siehe Rice (loc. cit.).

Sei $p(\xi)\, d\xi$ die Wahrscheinlichkeit dafür, $J(t)$ zur Zeit t im Intervall ξ, $\xi + d\xi$ zu finden. Fragt man jetzt nicht nach der Verweilzeit im Intervall ξ, $\xi + d\xi$, sondern nur nach der Anzahl der Durchgänge, dann ist es offenbar gleichgültig, wie lange die Funktion bei einem Durchgang im Intervall bleibt. Um die Wahrscheinlichkeit eines Durchganges zu erhalten, muss man daher um die Wahrscheinlichkeit $J(t)$ im Intervall ξ, $\xi+d\xi$ zu finden, jeweils durch die Zeit T dividieren, die $J(t)$ während dieses Durchganges in $d\xi$ verbringt. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Durchgänge und dem mittleren Quadrat der Ableitung $\overline{J'(t)^2}$ kommt dann natürlich dadurch zustande, dass die Zeit T von $J'(t)$ abhängt. Sei $p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ die Wahrscheinlichkeit, dass $J(t)$ im Intervall ξ, $\xi + d\xi$ ist und gleichzeitig $J'(t)$ im Intervall η, $\eta + d\eta$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $J(t)$ das Intervall mit einer bestimmten Ableitung η überschreitet

$$\frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{T} = p(\xi, \eta)\, |\eta|\, d\eta$$

da

$$T = \frac{d\xi}{|\eta|}$$

ist. Integriert man weiterhin über alle möglichen η, dann erhält man die Anzahl der Durchgänge durch ξ pro Zeiteinheit:

$$N_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| \, p(\xi, \eta) \, d\eta \tag{4}$$

Aus der Gleichung (4) folgt (1) unmittelbar unter der Annahme, dass $p(\xi, \eta)$ eine Gaußsche Verteilung ist und der Prozess stationär, d. h. $\overline{J(t)\ J'(t)} = 0$.

Wesentlich ist hier, dass $J(t)$ und $J'(t)$ statistisch unabhängig sind, d. h. dass $p(\xi, \eta)$ das Produkt einer Funktion von ξ und einer Funktion von η ist. Schreibt man $p(\xi, \eta) = l(\xi)\, m(\eta)$, dann folgt aus (4)

$$N_\xi = l(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| \, m(\eta) \, d\eta = l(\xi) \, \overline{|\eta|} \tag{5}$$

Für eine Gaußsche Verteilung genügt dafür das Verschwinden der Korrelation $\overline{J J'}$. Im allgemeinen ist $\overline{J J'} = 0$ zwar notwendig, aber nicht hinreichend für eine statistische Unabhängigkeit von $J(t)$ und $J'(t)$.

Für lineare Vorgänge kann man im allgemeinen zeigen, dass $J(t)$ und $J'(t)$ gaussisch verteilt sind. Für die Strahlung eines schwarzen Körpers findet man einen solchen Beweis bei v. LAUE[2]) und der entsprechende akustische und elektrische Fall findet sich z. B. in der zitierten Arbeit von RICE. Die Möglichkeit die Gleichung (1) auf Turbulenzmessungen anzuwenden ist meines Wissens zuerst von DRYDEN erwähnt worden.

Turbulente Schwankungen gehorchen aber einer nichtlinearen Gleichung, und infolgedessen kann auf eine Gaußsche Verteilung nicht in derselben Weise, wie z. B. in der Strahlungstheorie geschlossen werden. Im Gegenteil, die Ableitung einer turbulenten Geschwindigkeitskomponente ist sicher nicht gaussisch verteilt. Das folgt im wesentlichen aus den Bewegungsgleichungen in der von KÁRMÁN und HOWARTH[3]) gegebenen Form und ist durch Messungen von TOWNSEND[4]) bestätigt worden. Es ist aber interessant, zu prüfen, wieweit sich diese — im allgemeinen schwache — Abweichung von einer Gaußschen Verteilung in der Zahl der Nullstellen auswirkt und wie weitgehend die Zahl der Nullstellen ein turbulentes Schwankungsfeld charakterisiert.

Messtechnisch ist die Methode sehr anziehend, da mit einer Zählanordnung ohne weiteres Mittelwerte über fast beliebig lange Zeiten genommen werden können.

2. Beziehungen zur isotropen Turbulenz.

Unter isotroper homogener Turbulenz versteht man bekanntlich nach G. I. TAYLOR ein Schwankungsfeld, in dem Funktionen der Geschwindigkeitskomponenten $u_i(x_k, t)$ und ihrer Ableitungen invariant gegenüber Translation, Rotation und Reflexion des Koordinatensystems sind. Experimentell stellt man ein solches Feld dadurch her, dass man eine möglichst gleichmässige und turbulenzfreie Strömung mit konstanter Geschwindigkeit U durch ein Gitter strömen lässt. Das Feld im Nachlauf des Gitters ist dann angenähert isotrop und im Kleinen homogen. Die Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit an einem festen Punkt $u_i(t)$ können dann mit der stochastischen Funktion $J(t)$ identifiziert werden. Aus messtechnischen Gründen ist es am einfachsten, die Komponente $u_1(t)$ in der Richtung der mittleren Geschwindigkeit U zu untersuchen.

Das Resultat für das mittlere Quadrat der Ableitung $\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}$, das aus der Zählung der Nullstellen erhalten wurde, konnte mit den Ergebnissen der zwei folgenden unabhängigen Methoden verglichen werden: Nämlich einmal mit der direkten Messung von $\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}$ durch Differentiation mittels einer Kapazitäts-Widerstands-Anordnung (vergl. TOWNSEND[4]) und auch mit der Messung der Spektraldichte $F(n)$ aus der $\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}$ durch graphische Auswertung von $\int_0^\infty n^2 F(n)\, dn$ entsprechend Gleichung (3) gewonnen werden kann.

Bisher haben wir nur Zeitfunktionen betrachtet. Für die Dynamik der Turbulenz sind aber besonders die räumlichen Korrelationsfunktionen wichtig. Diese räumlichen Korrelationsfunktionen werden nach v. KÁRMÁN am besten in der Form der Korrelationstensoren eingeführt.

In isotroper, homogener Turbulenz bestimmt dann eine skalare Funktion, z. B. $f(x)$, den Korrelationstensor zweiter Ordnung:

$$R_{ij} = \frac{\overline{u_i(x_k, t)\, u_j(x_k', t)}}{\overline{u^2}} .$$

Die Beziehung zwischen der zeitlichen Korrelationsfunktion $\psi(\tau)$ und $f(x)$ wird im allgemeinen dadurch erhalten, dass man setzt:

$$\begin{aligned} \tau &\longrightarrow \frac{x}{U} \\ \frac{d}{dt} &\longrightarrow -U \frac{d}{dx} \end{aligned} \qquad (6)$$

d. h., man nimmt an, dass die Turbulenz unverzerrt mit der Geschwindigkeit U transportiert wird. Diese Substitution ist — selbst für kleine Schwankungen — meines Wissens nie theoretisch einwandfrei bewiesen worden, und sie kann mit Recht bezweifelt werden[5]). Die wenigen Messungen, die einen Vergleich zwischen räumlicher und zeitlicher Korrelation zulassen, haben allerdings vorläufig keine systematischen Differenzen gezeigt und dasselbe gilt auch für die Messungen dieser Arbeit. Nimmt man einstweilen an, dass die Substitutionen (6) erlaubt sind, dann kann man schreiben:

$$\frac{1}{\bar{u}_1^2}\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2} = \frac{U^2}{\bar{u}_1^2}\overline{\left(\frac{du_1}{dx}\right)^2} = -U^2 f''(0) \doteq \frac{U^2}{\lambda^2}$$

λ ist eine Grösse, welche charakteristisch für die Dissipation der turbulenten Energie ist. Die Dissipationsgleichung in isotroper Turbulenz lautet bekanntlich (siehe z. B. ref. (3))

$$-\frac{3}{2}\,\varrho\, U\,\frac{d\bar{u}_1^2}{dx} = \frac{15\,\mu\, u_1^2}{\lambda^2} \tag{7}$$

und die Grösse λ kann daher aus Messungen des Abklingens der Turbulenz bestimmt werden. Messungen dieser Art wurden auch durchgeführt und die so erhaltenen Werte von λ könnten mit den erwähnten Messungen von $\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}$ verglichen werden. Im folgenden wird — mit dem erwähnten Vorbehalt — auch für die Grösse $\frac{1}{U^2\,\bar{u}_1^2}\overline{\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2}$ wie üblich kurz $\frac{1}{\lambda^2}$ geschrieben werden.

3. Messapparatur.

Windkanal

Die Messungen wurden in einem kleinen Kanal mit einem Querschnitt von 20″ · 20″ ausgeführt. Der Turbulenzgrad dieses Kanals ohne Gitter ist klein:

$$\left[\frac{\bar{u}_1^2}{U^2}\right]^{1/2} \cong 3 \cdot 10^{-4}$$

Ein Gitter von 1,27 cm Maschenweite wurde zur Erzeugung von isotroper Turbulenz benutzt. Die Messungen wurden mit den Strömungsgeschwindigkeiten von 630 cm/sec und 1130cm/sec ausgeführt.

Hitzdrahtanordnung.

Die Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeit wurde mit Hilfe von Hitzdrähten und kompensierter Verstärkung aufgenommen. Wollaston-Draht mit einer $1{,}25 \cdot 10^{-4}$ cm dicken Platinseele wurde verwendet. Die Drähte waren 1 bis 2 mm lang. Der Platindraht wurde nach Ablösung des Silberbezuges an die Spitzen feiner Nähnadeln gelötet. Die Anordnung ist frequenzgetreu innerhalb 2% zwischen 2 Hz und 10000 Hz.

Zählvorrichtung.

Die Nullstellen des Verstärkerstromes wurden mit einer Photomultiplierzelle auf dem Schirm eines Kathodenstrahloszillographen aufgenommen und mittels eines Untersetzers wurde jede $2^9 = 512$te Nullstelle gezählt.

Differentiation.

Der Verstärkerstrom konnte mittels eines Kapazitäts-Widerstandssystems ähnlich wie bei Townsend[4]) differenziert werden. Der Verstärkungsgrad hier ist proportional der Frequenz zwischen 2 und 10^4 Hz.

Messung der Spektraldichte.

Die Spektralverteilung des Verstärkerstromes konnte mit Hilfe eines Hewlett & Packard Wave-Analyzers mit konstanter Bandweite, gemessen werden.

Korrektionen.

Die Resultate müssen für die endliche Länge des Hitzdrahtes korrigiert werden. Das heisst dafür, dass nicht $u_1(t)$ gemessen wird, sondern

$$u_1(t, l) = \frac{1}{l} \int_0^l u_1(t, y)\, dy$$

wo l die Länge des Hitzdrahtes ist. Für isotrope Turbulenz können die Korrektionsformeln angegeben werden. Für die Intensitätsmessungen hat man

$$\overline{u^2} = \overline{u^2}_{\text{gemessen}} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\right],$$

für die λ-Messungen

$$\lambda^2 = \lambda^2_{\text{gemessen}} \left[1 - \frac{G-3}{18} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\right] \quad \text{mit} \quad G = \lambda^4 f^{\text{IV}}(0).$$

Es ist klar, dass die Korrektionsformeln nur dann Sinn haben, wenn die Korrektionen klein sind, so dass man mit verhältnismässig rohen Werten für λ und G in den Korrektionstermen auskommt. Bei den Messungen in dieser Arbeit war $l/\lambda \leq 0{,}5$; G wurde aus dem Spektrum bestimmt: $G \cong 10 - 13$. Ausserdem wurde die Korrektion experimentell durch Verwendung von Drähten verschiedener Länge bestimmt. Es ergab sich für die höhere Geschwindigkeit (1130 cm/sec): $(G - 3)/18 = 0{,}46$. Dieser Wert stimmt mit den Messungen von G genügend genau überein.

Die Zählvorrichtung muss ausserdem für das endliche Auflösungsvermögen korrigiert werden. Diese Korrektion erscheint zur Zeit die unsicherste zu sein und trägt daher dazu bei, dass die Abweichungen in den Resultaten der Zählmethode von den anderen Methoden nicht unmittelbar als reell angesehen werden können. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Nullstellen dicht hintereinander zu haben, kann angegeben werden. Eine entsprechende Formel findet sich bei Rice (loc. cit.). Die mittlere Anzahl N_D der doppelten Nullstellen innerhalb der kleinen Zeit T ist gegeben durch

$$N_D = \frac{\pi^2}{16} N_0 [G - 1] (N_0 T)^2.$$

Identifiziert man dann T mit dem Auflösungsvermögen, dann erhält man eine Korrektionsformel für die gemessene Anzahl der Nullstellen. Schwierigkeiten macht die Bestimmung von T. Die bisherigen Bestimmungen ergaben für die Anordnung $T \cong 10^{-4}$ sec. Die Korrektion ist dann klein. Der Wert ist aber nicht zu vertrauenswürdig und muss sicher besser bestimmt werden. Ausserdem kommt noch eine weitere Korrektion dadurch hinzu, dass unter Umständen sehr schnelle Durchgänge durch Null nicht gezählt werden. In dieser Hinsicht ist die Anordnung sicher noch verbesserungsfähig.

4. Resultate.

λ oder besser λ^2 wurde bei den Geschwindigkeiten 630 cm/sec und 1130 cm/sec in einem Abstand von 81 Maschenweiten hinter dem Gitter mit den verschiedenen Methoden gemessen. Die Resultate sind in der Tabelle zusammengestellt.

Tabelle.

Methode	$\lambda^2 \cdot 10^2$ cm²			
	Nullstellen	Spektrum	Differentiation	Dissipation
1130 cm/sec	17,3	15,3	12,9	13,9
630 cm/sec	23,9	25,8	18,7	22,4

Die Messungen sind kaum genauer als $\pm 10\%$ in λ^2. Exaktere Fehlergrenzen lassen sich vorläufig noch nicht angeben. Man findet nämlich, dass die gemessenen Werte zeitweilig genauer reproduzierbar sind, sich aber dann manchmal systematisch um einige Prozent ändern. Wieweit derartige Änderungen durch die Apparatur bedingt sind, z. B. durch Irregularitäten in dem Gitter, muss noch geprüft werden.

Innerhalb dieser Fehlergrenzen kann, wie aus der Tabelle ersichtlich, kein systematischer Unterschied zwischen den Resultaten der verschiedenen Messmethoden sicher nachgewiesen werden. Für die höhere Geschwindigkeit gibt die Zählmethode zwar einen zu grossen Wert für λ^2, für die kleine Geschwindigkeit nicht. Dieses Ergebnis legt den Verdacht nahe, dass das Auflösungsvermögen der Anordnung noch nicht genügend berücksichtigt ist.

Weder der Einfluss einer Abweichung von der Gaußschen Verteilung, noch ein Unterschied zwischen Zeit -und Ortsdifferenzierung kann daher innerhalb dieser Fehlergrenzen sicher nachgewiesen werden.

Am California Institute of Technology ist zur Zeit eine ausführliche Untersuchung der isotropen Turbulenz für das National Advisory Committee for Aeronautics im Gange. Die hier diskutierten Fragen kamen im Rahmen dieser Arbeit auf.

Die Hilfe von K. Liepmann, J. John Laufer und F. K. Chuang bei diesen Arbeiten wird dankbar anerkannt.

Daniel Guggenheim Aeronautical Laboratory
California Institute of Technology.

Literatur.

1) Rice, S. O., The Bell System Technical Journal, **23**, 82 (1944). **24**, 46 (1945).
2) Laue, M. v., Ann. d. Physik, **47**, 853 (1915).
3) Kármán, Th. v., Proc. Royal Soc. A, **164**, 192 (1938).
4) Townsend, A. A., Proc. Camb. Phil. Soc., **43**, 560 (1947).
5) Frenkiel, F. N., VII. Int. Congress for Appl. Math. & Mech., London 1948.