Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 22 (1949)
Heft: I

Artikel: Gravitationstheorie und Elektrodynamik
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111991

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Gravitationstheorie und Elektrodynamik[1])

von **W. Scherrer.**

(21. XII. 1948.)

Einleitung.

Bei der Anwendung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen

$$R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} R = -\varkappa T_{\varrho\sigma} \tag{1}$$

ist man immer noch auf den phänomenologischen Energietensor

$$\left.\begin{aligned} T_{\varrho\sigma} &= \frac{p_\varrho p_\sigma}{\mu} \\ \mu &= \sqrt{p_\varrho p^\varrho} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

angewiesen, da es bis heute nicht gelungen ist, den Tensor $T_{\varrho\sigma}$ so zu gestalten, dass er auch die Materiekräfte in befriedigender Weise zum Ausdruck bringt. Nachdem es in den Jahren 1915–16 Hilbert gelungen war, die Miesche Theorie der Materie auf die Einsteinsche Gravitationstheorie zu übertragen, hoffte man auf eine günstige Entwicklung. Inzwischen hat aber die Skepsis wieder überhand genommen.

Bei einer neuerlichen Beschäftigung mit diesen Dingen habe ich die unvermutete Feststellung gemacht, dass in den Grundlagen der Mieschen Theorie ein Fehler steckt. Die Diskussion über die Miesche Theorie ist also noch nicht abgeschlossen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun ein doppelter: Einmal soll der erwähnte Fehler aufgedeckt werden. Weiter aber werde ich eine neue Variante der Mieschen Theorie angeben. In derselben lässt sich das zentralsymmetrische und statische Feld exakt bestimmen und liefert eine endliche Selbstenergie.

---

[1]) Der wesentliche Inhalt dieser Arbeit wurde am 21. Mai 1948 der Mathematischen Vereinigung in Bern vorgetragen.

§ 1. Zur Mieschen Theorie.

In der Hilbertschen Fassung kann sie charakterisiert werden durch das Wirkungsprinzip

$$\delta \int (R + \varkappa M) \sqrt{-G}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0 \tag{3}$$

wobei die materielle Wirkungsfunktion M abhängt von den elektromagnetischen Potentialen Φ_ϱ, den zugehörigen Feldstärken

$$F_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_\varrho} - \frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial x_\sigma}$$

und den Komponenten $G_{\varrho\sigma}$ des Masstensors, *nicht* aber von den Ableitungen der $G_{\varrho\sigma}$. Um einen Überblick über die in Betracht kommenden Wirkungsfunktionen zu erhalten, muss man eine Basis für das durch die Grössen Φ_ϱ, $F_{\varrho\sigma}$, $G_{\varrho\sigma}$ bestimmte Invariantensystem ermitteln. Da die Ableitungen der $G_{\varrho\sigma}$ nicht vorkommen, darf man diese Grössen in orthogonaler Gestalt $G_{\varrho\sigma} = \delta_{\varrho\sigma}$ annehmen.

Jetzt handelt es sich nur noch darum, eine Invariantenbasis für einen Vektor Φ_ϱ und einen alternierenden Tensor $F_{\varrho\sigma}$ in einem Euklidischen Raum gerader Dimensionszahl zu finden. Zu dem Zweck interpretieren wir $F_{\varrho\sigma}$ geometrisch als Matrix einer infinitesimalen orthogonalen Transformation.

$$\dot{x}_\varrho = F_{\varrho\sigma}\, x_\sigma \tag{4}$$

Diese Interpretation ist orthogonalinvariant. Nun kann man mit den Methoden der linearen Algebra zeigen, dass ein orthogonales Koordinatensystem existiert, in welchem nur die Komponenten

$$F_{01} = -F_{10},\ F_{23} = -F_{32},\ F_{45} = -F_{54},\ \ldots$$

von Null verschieden sein können. $F_{\varrho\sigma}$ erhält damit als Matrix die Gestalt

$$\|F_{\varrho\sigma}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & b_1 & & & & \\ -b_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & b_2 & & \\ & & -b_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & b_n \\ & & & & -b_n & 0 \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

wobei in allen Leerstellen Nullen einzutragen sind. Die neuen Komponenten b_i resp. 0 sind einzeln invariant gegenüber Drehungen

in den Ebenen (0, 1), (2, 3), ... $(2n-2, 2n-1)$. Also darf man durch derartige Drehungen dem neuen Vektor Φ_ϱ noch die Gestalt

$$(\Phi_\varrho) = (a_1, 0; \quad a_2, 0; \quad \ldots \quad a_n, 0) \tag{6}$$

geben. Nun betrachten wir eine Serie von Vektoren

$$\Psi_{1\lambda}, \; \Psi_{2\lambda}, \; \Psi_{3\lambda}, \; \ldots$$

und Tensoren

$$F_{1\lambda\mu}, \; F_{2\lambda\mu}, \; F_{3\lambda\mu}, \; \ldots$$

die folgendermassen definiert sind:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{1\lambda} &= \Phi_\lambda \\ \Psi_{2\lambda} &= F_{\lambda\alpha}\Phi_\alpha \\ \Psi_{3\lambda} &= F_{\lambda\alpha}F_{\alpha\beta}\,\Phi_\beta \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{aligned} F_{1\lambda\mu} &= F_{\lambda\mu} \\ F_{2\lambda\mu} &= F_{\lambda\alpha}F_{\alpha\mu} \\ F_{3\lambda\mu} &= F_{\lambda\alpha}F_{\alpha\beta}F_{\beta\mu} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ihre Betragsquadrate sind

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \Psi_{1\lambda}\Psi_{1\lambda}; \qquad & F_1 &= \frac{1}{2}F_{1\lambda\mu}F_{1\lambda\mu} \\ J_2 &= \Psi_{2\lambda}\Psi_{2\lambda}; \qquad & F_2 &= \frac{1}{2}F_{2\lambda\mu}F_{2\lambda\mu} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Führt man hier nun die spezialisierten Tensoren (5) und (6) ein unter Verwendung der Abkürzungen

$$A_i = a_i^2, \; B_i = b_i^2, \tag{10}$$

so findet man

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \Sigma A_i \\ J_2 &= \Sigma A_i B_i \\ J_3 &= \Sigma A_i B_i^2 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \Sigma B_i \\ F_2 &= \Sigma B_i^2 \\ F_3 &= \Sigma B_i^3 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Aus den Gleichungen (11) und (12) ist ersichtlich, dass die bis zum Index n geführten Serien (9) eine unabhängige Basis von $2n$ Invarianten bilden.

In der Literatur wird als Basis meist das nur für $2\,n = 4$ definierte System

$$(J_1, F_1, J_2, J_2^*) \tag{13}$$

angegeben. Dabei ist J_2^* definiert durch

$$\Psi_{2\lambda}^* = F_{*\lambda\alpha}\,\Phi_\alpha\,; \qquad J_2^* = \Psi_{2\lambda}^*\,\Psi_{2\lambda}^* \tag{14}$$

wo $F_{*\lambda\mu}$ den zu $F_{\lambda\mu}$ dualen Tensor bedeutet.

Bei der obigen Spezialisierung erhält man dann die Tafel

$$\begin{aligned} J_1 &= A_1 + A_2; \qquad & J_2 &= A_1\,B_1 + A_2\,B_2 \\ F_1 &= B_1 + B_2; \qquad & J_2^* &= A_1\,B_2 + A_2\,B_1\,, \end{aligned} \tag{15}$$

der man ohne weiteres die Identität

$$J_2 + J_2^* \equiv J_1\,F_1 \tag{16}$$

entnimmt. Das System (13) ist also keine Basis.

Richtige Basen findet man bei WEYL[1]) und BORN[2]). Doch bin ich nirgends auf einen Hinweis gestossen, dass die meist zitierte Miesche Basis fehlerhaft sei. Da infolge dieses Fehlers die Miesche Theorie nicht richtig beurteilt wird, habe ich die Sache zur Sprache gebracht.

Aus (7), (8) und (9) erhalten wir also für $2\,n = 4$ die für die Anwendung in der Physik in Betracht kommende Basis

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 &= \Phi_\lambda\,\Phi_\lambda \\ J_2 &= F_{\lambda\alpha}\,\Phi_\alpha\,F_{\lambda\beta}\,\Phi_\beta \\ F_1 &= \frac{1}{2}\,F_{\lambda\mu}\,F_{\lambda\mu} \\ F_2 &= \frac{1}{2}\,F_{\lambda\alpha}\,F_{\alpha\mu}\,F_{\lambda\beta}\,F_{\beta\mu} \end{aligned}} \tag{17}$$

Schon MIE erkannte, dass nach den Erfahrungen an elektrischen Feldern diejenigen Wirkungsfunktionen den Vorrang verdienen, die nicht explizite von den Potentialen abhängen. MIE stand also nur die eine Funktion F_1 zur Verfügung, während die richtige Basis dazu noch F_2 liefert. Hieraus ersieht man den hemmenden Einfluss der falschen Basis (13).

---

[1]) Raum, Zeit und Materie; 4. Aufl., Berlin 1921, S. 190.

[2]) Annales de l'Institut Henri Poincaré; Vol. VII, 1937, S. 180.

§ 2. Eine spezielle Wirkungsfunktion.

Entsprechend der Schlussbemerkung von § 1, beschränken wir uns auf Wirkungsfunktionen, die aus F_1 und F_2 allein aufgebaut sind. Wir verlassen jetzt die orthogonale Schreibweise und kehren wieder zum allgemeinen Linienelement

$$ds^2 = G_{\varrho\sigma}\, dx_\varrho\, dx_\sigma \tag{18}$$

vom Trägheitsindex 3 zurück.

F_1 und F_2 sind dann zu schreiben als

$$F_1 = \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F^{\mu\lambda} \tag{19}$$

und

$$F_2 = \frac{1}{2} F_{\lambda\alpha} F^{\alpha\mu} F_{\mu\beta} F^{\beta\lambda} \tag{20}$$

Nebenbei bemerkt wird die Übersicht etwas erleichtert, wenn man noch die Invariante

$$F^* = \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F^{*\mu\lambda} \tag{21}$$

heranzieht. Auf Grund der Definition des dualen Tensors $F^{*\mu\lambda}$ ergibt sich[1]) ihr expliziter Ausdruck zu

$$F^* = -\frac{F_{01} F_{23} + F_{02} F_{31} + F_{03} F_{12}}{\sqrt{-G}} \tag{22}$$

Mit Hilfe der Spezialisationen (5) und (6) des vorigen Paragraphen kann man feststellen, dass die Identität

$$F_2 \equiv F_1^2 + 2 F^{*2} \tag{23}$$

besteht.

Bekanntlich liefert das Wirkungsprinzip (3) die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum, wenn man für M die Funktion F_1 wählt. Als naheliegende Verallgemeinerung ergibt sich daher der Ansatz

$$M \equiv F_1 + \varepsilon F_2 \tag{24}$$

wo ε eine kleine Konstante ist, der zufolge der Einfluss von F_2 nur in der Nähe des Feldzentrums merklich wird.

Durch (3) und (24) ist die zu lösende Aufgabe vollkommen bestimmt. Der erste in allen Fällen zu empfehlende Schritt zu ihrer

---

[1]) Pauli, Relativitätstheorie, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, V, 19; 1920, S. 581.

Lösung besteht darin, dass man die in $R\sqrt{-G}$ steckende Divergenz durch partielle Integration wegschafft und damit (3) auf die Variationsaufgabe

$$\delta \int (Q + \varkappa M) \sqrt{-G}\, dx = 0 \tag{25}$$

reduziert, wobei abkürzend

$$dx = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{26}$$

gesetzt wurde und Q gegeben ist durch

$$Q \equiv G^{\alpha\beta} (\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}). \tag{27}$$

Nun spezialisieren wir die Aufgabe auf den statischen zentralsymmetrischen Fall. Wir wählen zu dem Zweck das Schwarzschildsche Linienelement

$$ds^2 = f^2\, dx_0^2 - g^2\, dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2)\,, \tag{28}$$

wobei f und g Funktionen des Radius r sind. Für die Potentiale haben wir zu setzen

$$\Phi_0 = \Phi(r)\,, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0. \tag{29}$$

Die Berechnung liefert

$$F_1 = \left(\frac{\Phi'}{fg}\right)^2; \qquad F^* = 0\,, \tag{30}$$

und es folgt aus (23) und (24)

$$\mu = \frac{\Phi'^2}{f^2 g^2} + \varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^4 g^4}\,, \tag{31}$$

wobei der Strich die Ableitung nach r anzeigt. Für Q ergibt sich der schon für die klassische Lösung benötigte Wert

$$Q = \frac{2}{r^2}\left(1 + \frac{2rf' + f}{fg^2}\right)^{1}. \tag{32}$$

Mit

$$\sqrt{-G} = fgr^2 \sin\vartheta \tag{33}$$

geht also (25) nach Weglassung der Winkelvariablen und der Zeit über in

$$\delta \int \left\{2\left(fg + \frac{2rf' + f}{g}\right) + \varkappa r^2 \left(\frac{\Phi'^2}{fg} + \varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^3 g^3}\right)\right\} dr = 0\,. \tag{34}$$

---

[1]) Dabei ist eine für Polarkoordinaten notwendige Ergänzung um $2/r^2$ schon beigefügt.

Die sukzessive Variation der Funktionen f, g, Φ liefert nun die Differentialgleichungen

$$4\left(\frac{r}{g}\right)' - 2\left(g + \frac{1}{g}\right) + \varkappa r^2 \left(\frac{\Phi'^2}{f^2 g} + 3\,\varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^4 g^3}\right) = 0\,, \tag{35}$$

$$4\,\frac{r f'}{g^2} - 2 f\left(1 - \frac{1}{g^2}\right) + \varkappa r^2 \left(\frac{\Phi'^2}{f g^2} + 3\,\varepsilon \frac{\Phi'^4}{f^3 g^4}\right) = 0\,, \tag{36}$$

$$2\,\varkappa \left[r^2 \left(\frac{\Phi'}{f g} + 2\,\varepsilon \frac{\Phi'^3}{f^3 g^3}\right)\right]' = 0\,. \tag{37}$$

Die Kombination

$$f\,(35) - g \cdot (36) \equiv -4\,r \cdot \frac{(f g)'}{g^2} = 0$$

stimmt mit der klassischen Lösung überein und liefert

$$f g = 1\,, \tag{38}$$

wo rechts schon die Konstante zu 1 angenommen ist, damit im Unendlichen das Euklidische Linienelement herauskommt. Die Gleichung (37) liefert hierauf

$$\Phi' + 2\,\varepsilon\,\Phi'^3 = \frac{A}{r^2}\,, \tag{39}$$

wo ein positives A einer negativen Ladung vom Betrage A entspricht. Wählen wir

$$\varepsilon > 0 \tag{40}$$

so wird Φ' eine monoton fallende Funktion der positiven Distanz r.

Aus (39) ist schon ersichtlich, weshalb eine endliche Totalenergie resultieren wird. Die Feldstärke Φ' wird für grosse r klein von der Ordnung r^{-2}, wie es der klassischen Lösung entspricht, für kleine r aber gross von der Ordnung $r^{-2/3}$, was der Konvergenz des Energieintegrals keinen Eintrag tun wird.

Vermittels der Kombination $f \cdot (35) + g \cdot (36)$ erhält man schliesslich wegen (38)

$$[r\,(1 - f^2)]' = \frac{\varkappa}{2}\,(\Phi'^2 + 3\,\varepsilon\,\Phi'^4)\,r^2,$$

und durch Integration folgt

$$r\,(1 - f^2) = C + \frac{\varkappa}{2} \int_0^r (\Phi'^2 + 3\,\varepsilon\,\Phi'^4)\varrho^2\,d\varrho\,. \tag{41}$$

Stellt man sich nun auf den Standpunkt, dass die Energie rein elektrischer Natur sei, so darf für verschwindende Feldstärken keine Gravitationswirkung erfolgen. Nach der Form, welche Einstein der

Gravitationstheorie gegeben hat, folgt daraus weiter, dass dann das Linienelement Euklidische Gestalt annehmen muss. Auf obige Gleichung angewendet heisst dies, dass aus $\Phi' \equiv 0$ muss folgen $f^2 \equiv 1$. Somit ergibt sich

$$C = 0. \tag{42}$$

Führen wir noch die Abkürzung

$$\Psi \equiv \Phi'^2 + 3\,\varepsilon\,\Phi'^4, \tag{42}$$

sowie die Konstante

$$4\,m = \varkappa \int_0^\infty \Psi\, r^2\, dr \tag{44}$$

ein, so erhalten wir schliesslich

$$f^2 = 1 - \frac{2\,m - \frac{\varkappa}{2}\int_r^\infty \psi\, \varrho^2\, d\varrho}{r}. \tag{45}$$

§ 3. Masse und Energie.

Unter der Annahme, dass die Gravitationstheorie auch für die kleinen Energieknoten des elektromagnetischen Feldes zuständig sei, muss die Konstante m als Gravitationsradius interpretiert werden. Die Formel (45) zeigt, dass in grossen Entfernungen vom Zentrum m allein massgebend ist für die Gestalt des Linienelements, da dann das Integral beliebig klein wird.

Wir wollen nun direkt berechnen, wie m mit der Totalenergie

$$E = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} T_0^0 \sqrt{-G}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \tag{46}$$

des elektromagnetischen Feldes zusammenhängt.

Der Energietensor $T_{\varrho\sigma}$ kann berechnet werden aus der Relation

$$\delta\,(M\sqrt{-G}) = \sqrt{-G}\; T_{\varrho\sigma}\, \delta G^{\varrho\sigma} \tag{47}$$

Setzen wir

$$\delta\,(F_1\sqrt{-G}) = \sqrt{-G}\; A_{\varrho\sigma}\, \delta G^{\varrho\sigma} \tag{48}$$

so folgt mit Hilfe der Formel

$$\delta\sqrt{-G} = -\frac{1}{2}\sqrt{-G}\; G_{\varrho\sigma}\, \delta G^{\varrho\sigma}$$

auf Grund von (24), (23) und (22)

$$T_{\varrho\sigma} = (1 + 2\,\varepsilon\, F_1)\, A_{\varrho\sigma} + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, F_2\, G_{\varrho\sigma}. \tag{49}$$

Hier ist $A_{\varrho\sigma}$ offenbar der dem klassischen Falle $\varepsilon = 0$ entsprechende Energietensor

$$A_{\varrho\sigma} = F_{\varrho\lambda} G^{\lambda\mu} F_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} F_1 G_{\varrho\sigma} . \tag{50}$$

In (49) eingesetzt ergibt dies

$$T_{\varrho\sigma} = (1 + 2\,\varepsilon\, F_1)\, F_{\varrho\lambda} G^{\lambda\mu} F_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} G_{\varrho\sigma} (M - 4\,\varepsilon\, F^{*2}) . \tag{51}$$

In dem von uns betrachteten Falle ist nach (29) nur eine Feldstärke nicht Null, nämlich

$$F_{01} = -\Phi' \tag{52}$$

Mit Rücksicht auf (28), (30) und (38) findet man aus (50) vorerst

$$A_{00} = \frac{1}{2} \Phi'^2 f^2 .$$

Weiter folgt dann aus (49) unter Beachtung von (23)

$$T_{00} = \frac{1}{2} (\Phi'^2 + 3\,\varepsilon\, \Phi'^4)\, f^2 ,$$

und somit ist

$$T_0^0 = \frac{1}{2} (\Phi'^2 + 3\,\varepsilon\, \Phi'^4) . \tag{53}$$

Mit Rücksicht auf (33) und (38) folgt also schliesslich aus (46)

$$E = 2\,\pi \int_0^\infty (\Phi'^2 + 3\,\varepsilon\, \Phi'^4)\, r^2\, dr. \tag{54}$$

Führen wir dieses Integral in (44) ein, so erhalten wir für den Gravitationsradius m die Formel

$$m = \frac{\varkappa}{8\,\pi} E . \tag{55}$$

Um von hier zu der dem m entsprechenden Masse μ zu gelangen, muss man annehmen, dass es ungeladene Teilchen gibt, auf welche unser Feld nur gravitierend wirkt. Dann treten die Einsteinschen Beziehungen zwischen $\varkappa$ und der Newtonschen Gravitationskonstanten k, resp. zwischen m und μ in Kraft:

$$\varkappa = \frac{8\,\pi}{c^4} k \tag{56}$$

und

$$m = \frac{\mu}{c^2} k . \tag{57}$$

Aus (55) folgt hierauf die Einsteinsche Äquivalenz zwischen Masse und Energie:

$$\mu = \frac{E}{c^2}. \tag{58}$$

Um nun Auskunft über die Energieverteilung zu erhalten, berechnen wir diejenige Energie E_r, welche in einer Kugel vom Radius r um das Zentrum enthalten ist:

$$E_r = 2\pi \int_0^r (\Phi'^2 + 3\,\varepsilon\,\Phi'^4)\,\varrho^2\,d\varrho. \tag{59}$$

Zu dem Zwecke haben wir die Gleichung (39) heranzuziehen:

$$\Phi' + 2\,\varepsilon\,\Phi'^3 = \frac{A}{r^2}. \tag{39}$$

Machen wir hier die Substitution

$$\Phi'(r) = \frac{z}{\sqrt{2\,\varepsilon}}, \tag{60}$$

so folgt

$$r = \sqrt[4]{2\,\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{A}{z + z^3}}, \tag{61}$$

und die Berechnung liefert

$$E_r = \frac{\pi A^{3/2}}{2\sqrt[4]{2\,\varepsilon}} \int_z^\infty \frac{(2 + 3\,\zeta^2)(1 + 3\,\zeta^2)\,d\zeta}{(1 + \zeta^2)^2 \sqrt{\zeta(1 + \zeta^2)}}. \tag{62}$$

Für die weitere Berechnung braucht man die elliptischen Integrale 1. Gattung

$$J_p(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^p \sqrt{\zeta(1 + \zeta^2)}}, \tag{63}$$

$$(p = 0, 1, 2),$$

zwischen denen die Rekursion

$$J_p = \frac{4p-3}{4p-2}\,J_{p-1} + \frac{1}{(2p-1)(1 + z^2)^{p-1}} \sqrt{\frac{z}{1 + z^2}}. \tag{64}$$

besteht. Führt man noch die Konstante

$$K = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(1 + z^2)}} = 2\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1 + u^4}} = 2 \cdot 1{,}8541 \tag{65}$$

ein, so findet man

$$E_r = \frac{\pi A^{3/2}}{\sqrt[4]{2\varepsilon}} \left\{ \frac{8}{3}(K - J_0) + \frac{10 + 11 z^2}{3(1 + z^2)} \sqrt{\frac{z}{1 + z^2}} \right\}. \tag{66}$$

Für $r = \infty$ d. h. $z = 0$ folgt speziell

$$E = \frac{8\pi K}{3} \cdot \frac{A^{3/2}}{\sqrt[4]{2\varepsilon}}. \tag{67}$$

Der Vergleich mit (58) liefert

$$\mu c^2 = \frac{8\pi K}{3} \cdot \frac{A^{3/2}}{\sqrt[4]{2\varepsilon}}. \tag{68}$$

In der Theorie erscheinen alle Ladungswerte als gleichberechtigt, wie es ja auf klassischer Grundlage kaum anders zu erwarten ist. Gemäss der Erfahrung setzen wir nun für A die Elementarladung ein:

$$A = e. \tag{69}$$

Da nach dem Sinne unseres Ansatzes ε als universelle Konstante aufgefasst werden muss, ist nun durch (68) die Masse μ bestimmt. Es folgt also, dass im Rahmen des vorliegenden Ansatzes nur zwei zentralsymmetrische Teilchen zugelassen werden können. Dieselben haben entgegengesetzte Ladung und gleiche Masse. Alle übrigen Teilchen müssten also andere Struktur haben oder zusammengesetzt sein. Identifizieren wir das berechnete Feld mit einem Elektron, so ergibt sich aus (68) und (69) der Wert von ε:

$$2\varepsilon = \left(\frac{8\pi K e \sqrt{e}}{3\mu c^2} \right)^4 = 2{,}539 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{gr}^{-1}\ \mathrm{cm}\ \mathrm{sec}^{-2}. \tag{70}$$

Führt man diesen Wert in (66) ein, so folgt

$$E_r = \mu c^2 - \frac{\mu c^2}{K} \left\{ J_0(z) - \frac{10 + 11 z^2}{8(1 + z^2)} \sqrt{\frac{z}{1 + z^2}} \right\}. \tag{71}$$

Zum Zwecke der Abschätzung beachte man die leicht zu beweisende Relation

$$J_0(1) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1 + \zeta^2)}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1 + \zeta^2)}} = \frac{1}{2} K. \tag{72}$$

Zieht man jetzt (61) in der Gestalt

$$r = \frac{\sqrt{e}\ \sqrt[4]{2\varepsilon}}{\sqrt{z + z^3}} = \frac{8\pi K}{3\sqrt{z + z^3}} \cdot \frac{e^2}{\mu c^2} \tag{73}$$

heran und setzt $z = 1$, so folgt: 75% der Energie liegen in einer Kugel vom Radius $r_1 = 6 \cdot 10^{-12}$ cm. Setzt man aber $z = 10^{-2}$, so folgt: 98% der Energie liegen in einer Kugel von $8 \cdot 10^{-11}$ cm Radius.

Hätten wir das Feld mit einem Proton identifiziert, so ergäben sich für die entsprechenden Radien die Werte $3 \cdot 10^{-15}$ cm und $4 \cdot 10^{-14}$ cm, die aus empirischen Gründen wohl zu klein sind.

Schlussbemerkung.

In der vorliegenden Variante der Mieschen Theorie ist der Zusammenhang zwischen Gravitation und Elektrizität ganz einseitig. Legt man nämlich ein Euklidisches Linienelement $f = g = 1$ zugrunde, so ergibt sich nach (39) genau das gleiche elektrostatische Potential und nach (59) die gleiche Energieverteilung. Die Struktur des Teilchens erscheint also im Wesentlichen als eine rein elektrische Angelegenheit. Die Gravitation dagegen erscheint als passive Reaktion des metrischen Feldes, die lokal nach (45) wohl bis zur Entartung des Linienelements $f = 0$, $g = \infty$ führt, in grösseren Abständen aber fast unmerklich ist. Es liegt also ein exaktes Modell für die klassischen Einsteinschen Gravitationsgleichungen (1) vor.