Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 21 (1948)
Heft: VI

Artikel: Zum Problem der instationären Stosspolaren
Autor: Cap, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111927

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zum Problem der instationären Stosspolaren

von **F. Cap**, Zürich.

(5. XI. 1948.)

Einleitung und Problemstellung.

Die Vorgänge bei der zweidimensionalen stationären Gasströmung können heute als im wesentlichen geklärt angesehen werden[1]). Auch für stetige eindimensionale instationäre kompressible Strömungen liegen bereits Lösungsverfahren vor[2]), doch ist dem Verfasser bisher keine Publikation über die „instationäre Stosspolare" bekannt geworden.

Bekanntlich werden die erwähnten Strömungsprobleme so gelöst, dass man, ausgehend von einer ein für allemal festliegenden Zustandsebene unter Zuhilfenahme der jeweils vorgegebenen Randbedingungen das Strömungsfeld schrittweise konstruiert. Bei der gasquellenlosen

a) zweidimensionalen stationären stetigen Strömung entspricht der Zustandsebene die Geschwindigkeitsebene (u_x, u_y), welche bei idealen Gasen von Epizykloiden überdeckt wird (Prandtlsches Charakteristikendiagramm);

b) eindimensionalen instationären stetigen Strömung wird die Zustandsebene durch Gerade in der (u, h)- bzw. (u, a)-Ebene oder durch Parabeln in der (u, q)-Ebene dargestellt (Zustandslinien, Charakteristiken).

c) zweidimensionalen stationären unstetigen Strömung (stationärer Verdichtungsstoss) bildet das Busemannsche Stosspolarendiagramm die Zustandsebene (u_x, u_y), während

d) als Zustandsebene für die eindimensionale instationäre unstetige Strömung (instationärer Verdichtungsstoss) bisher näherungsweise die stetige Zustandsebene (u, a) herangezogen wurde (Schultz-Grunow, Sauer) oder man ging von einem geeignet gewählten virtuellen, adiabatisch erreichbaren Anfangszustand aus (Haller). Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Zustandslinien der eindimensionalen instationären unstetigen Strömung sollen als instationäre Stosspolare bezeichnet werden.

Wenn man die Rechnung auf ideale Gase beschränkt, so ist es nicht notwendig, die Schallfunktion $h = \int \frac{dp}{a\varrho}$ einzuführen, da sich diese für ideale Gase einfach zu $h = \frac{2}{\varkappa - 1} \cdot a$ ergibt. Für die Enthalpie ergibt sich dann $i = \frac{a^2}{\varkappa - 1}$.

Die Ableitung der instationären Stosspolaren.

Bezeichnet man mit u, ϱ, p, a die Zuständegrössen vor dem Stoss und mit $\hat{u}$, $\hat{\varrho}$, $\hat{p}$, $\hat{a}$ die Zustandsgrössen nachher, so gelten, wenn w die Stosswellengeschwindigkeit sei, folgende Gleichungen für den eindimensionalen instationären Verdichtungsstoss:

$$(w - u)\,\varrho = (w - \hat{u})\,\hat{\varrho} \qquad \text{(Massenerhaltung)} \tag{1}$$

$$(w - u)^2\,\varrho + p = (w - \hat{u})^2\,\hat{\varrho} + \hat{p} \qquad \text{(Impulssatz)} \tag{2}$$

$$\frac{a^2}{\varkappa - 1} + \frac{(w-u)^2}{2} = \frac{\hat{a}^2}{\varkappa - 1} + \frac{(w-\hat{u})^2}{2} \qquad \text{(Energiesatz)} \tag{3}$$

wobei noch für die adiabatischen Strömungen vor und nach dem Stoss

$$a^2 = \frac{\varkappa p}{\varrho} \tag{4}$$

und

$$\hat{a}^2 = \frac{\varkappa \hat{p}}{\hat{\varrho}} \tag{4'}$$

gilt. Division von (2) durch (1) ergibt unter Verwendung von (4) und (4')

$$(w - u) + \frac{a^2}{\varkappa} \cdot \frac{1}{w-u} = (w - \hat{u}) + \frac{a^2}{\varkappa} \cdot \frac{1}{w-\hat{u}} \tag{5}$$

während aus (3) folgt

$$\frac{2}{\varkappa - 1}(a^2 - \hat{a}^2) = (w - \hat{u})^2 - (w - u)^2 = [2\,w - (u + \hat{u})]\,(u - \hat{u}) \tag{6}$$

woraus

$$w = \frac{a^2 - \hat{a}^2}{\varkappa - 1} \cdot \frac{1}{u - \hat{u}} + \frac{u + \hat{u}}{2}\,. \tag{7}$$

Im Grenzfall der stetigen Verdichtungswelle, für welche bekannlich

$$u - \hat{u} = \pm \frac{2}{\varkappa - 1}(a - \hat{a}) \qquad \text{(Charakteristikengleichung)} \tag{8}$$

gilt, folgt hieraus sofort die bekannte Formel

$$w = \frac{u + \hat{u}}{2} \pm \frac{a + \hat{a}}{2}\,. \tag{9}$$

Andererseits folgt für $u = 0$ und Ersatz von $\hat{a}$ aus (5)

$$w = \frac{\varkappa+1}{4}\,\hat{u} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa+1}{4}\cdot\hat{u}\right)^2 + a^2} \tag{10}$$

was mit der bekannten Stosswellengleichung

$$\hat{u} = \frac{2}{\varkappa+1}\,a\left(\frac{w}{a} - \frac{a}{w}\right) \tag{11}$$

identisch ist. Durch Einsetzen von (7) in (5) folgt die gesuchte Gleichung der instationären Stosspolaren zu

$$\frac{a^2}{2\,(a^2-\hat{a}^2)-(\varkappa-1)\,(u-\hat{u})^2} - \frac{\hat{a}^2}{2\,(a^2-\hat{a}^2)+(\varkappa-1)\,(u-\hat{u})^2} - \frac{\varkappa}{2\,(\varkappa-1)} = 0 \tag{12}$$

oder nach einigen Umformungen

$$\hat{u} = u \pm \sqrt{\frac{1}{\varkappa}\left[-(a^2+\hat{a}^2)+\sqrt{(\hat{a}^2+a^2)^2-\frac{4\,\varkappa^2}{\varkappa-1}\left[\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa-1}\right](a^2-\hat{a}^2)^2}\right]}\,. \tag{13}$$

Aus dieser Form ergibt sich, dass unbeschadet der Allgemeinheit $u = 0$ gesetzt werden kann; die Kurven für $u \neq 0$ werden durch einfache Parallelverschiebung gefunden.

Unter den Zustandsgrössen a, u, $\hat{a}$, $\hat{u}$, sollen von nun an die durch Division durch eine geeignet gewählte Schallgeschwindigkeit a_0 dimensionslos gemachten Grössen a/a_0, u/a_0, $\hat{a}/a_0$, $\hat{u}/a_0$ verstanden werden; da sich die Gleichung der Stosspolaren bei dieser Substitution nicht ändert, soll keine neue Bezeichnungsweise eingeführt werden. Die physikalische Bedeutung von (13) liegt darin, dass bei gegebenem a und u (als Parameter aufgefasst) der Zusammenhang zwischen $\hat{a}$ und $\hat{u}$ angegeben werden kann*).

Diskussion der Stosspolaren.

Für sehr grosse Werte von $\hat{a}$ ($\hat{a} \gg a$) ergibt sich, wenn man a gegen $\hat{a}$ vernachlässigt und $u = 0$ setzt

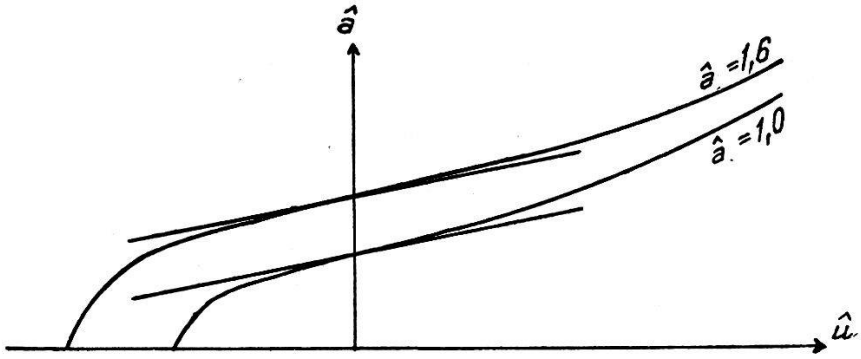
$$\lim_{\hat{a}>a} \hat{u} = \hat{a}\sqrt{\frac{1}{\varkappa}\left[-1+\sqrt{1-\frac{4\,\varkappa^2}{\varkappa-1}\left[\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa-1}\right]}\right]}\,.$$

Es strebt also für grosse $\hat{a}$ das Verhältnis $\hat{u}/\hat{a}$ der Grenze ctg α zu. Diese Gerade geht durch den Nullpunkt und hat die Steigung α wo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varkappa}\left[-1+\sqrt{1-\frac{4\,\varkappa^2}{\varkappa-1}\left[\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa-1}\right]}\right]}}$$

*) Ähnlich wie bei der stationären Stosspolaren u_x (und $u_y = 0$ gesetzt) als Parameter aufgefasst wird, so dass die Polare einen Zusammenhang zwischen $\hat{u}_x$ und $\hat{u}_y$ (und damit auch den jeweiligen Stoss- und Ablenkungswinkel) liefert.

alle Stosspolaren nähern sich asymptotisch dieser Geraden. Dieselbe Gerade ergibt sich, wenn man $a = 0$ setzt; in diesem Fall entartet die Stosspolare in die Asymptote. Für jedes neue a ergibt sich eine neue Stosspolare. Kurvenäste, für die $\hat{a} < a$ gilt, haben keine physikalische Bedeutung, da sie (wie man auch durch Vergleich mit der stetigen Zustandsebene sieht), den wegen der damit verbundenen Entropieverminderung verbotenen Verdünnungsstössen entsprechen würden. An der Stelle $\hat{a} = a$ gilt $\hat{u} = 0$; die Stosspolare schneidet an dieser Stelle die $\hat{a}$-Achse (siehe Abbildung; in der Abbildung ist nur der Ast für $\hat{u} > 0$ gezeichnet, der Ast für $\hat{u} < 0$ ist symmetrisch zur $\hat{a}$-Achse). Dieser Punkt soll noch näher untersucht werden. Da die Ableitungen der implizit gegebenen Stosspolaren (12) nach $\hat{a}$ und $\hat{u}$ verschwinden, ist dieser Punkt ein singulärer Punkt. Eine nähere, vermittels der bekannten Diskriminante



$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}$ durchgeführte Untersuchung zeigt weiter, dass es sich um einen Doppelpunkt mit zwei rellen Tangenten handelt. Da in der Umgebung des Doppelpunktes $\hat{a}$ nicht sehr stark von a verschieden ist, müssen die Doppelpunktstangenten den stetigen Fall darstellen. Dies ergibt sich auch aus der folgenden Rechnung*)

$$\operatorname{cotg} \beta = \left(\frac{d\hat{u}}{d\hat{a}}\right)_{\hat{a}=a} = \pm \frac{2}{\varkappa - 1}$$

wo β der Steigungswinkel der Stosspolaren an der Stelle $\hat{a} = a$ sei. Andererseits gilt für stetige Verdichtungen $\hat{u} = \pm \frac{2}{\varkappa - 1}(\hat{a} - a)$ und daher ebenfalls

$$\left(\frac{d\hat{u}}{d\hat{a}}\right)_{\hat{a}=a} = \frac{d\hat{u}}{d\hat{a}} = \operatorname{cotg} \beta = \pm \frac{2}{\alpha - 1} \quad \text{und damit} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\varkappa + 1}{2}$$

als die Steigung sowohl der Tangenten der Stosspolaren im

*) Die Differentiation muss natürlich von der impliziten Form ausgehen, da ja der Punkt $\hat{a} = a$ singulär ist!

Doppelpunkt, als auch als Steigung der Zustandslinien der stetigen Strömung. Wie es sein muss, ist $\alpha > \beta$.

Für die Stosswellengeschwindigkeit ergbt sich aus (10) und (13) (wobei wieder $u = 0$)

$$w = \pm \frac{\varkappa+1}{4} \sqrt{\frac{1}{\varkappa}\left[-(a^2+\hat{a}^2) + \sqrt{(a^2+\hat{a}^2)^2 - \frac{4\varkappa^2}{\varkappa-1}\left[\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa-1}\right](a^2-\hat{a}^2)^2}\right]}$$
$$\pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa+1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varkappa} \cdot [\cdots\sqrt{}] + a^2}$$

es ist jedoch praktischer, zuerst $\hat{u}$ auszurechnen und damit in (10) einzugehen. Für sehr grosses $\hat{a} \gg a$ erhält man aus (10) die beiden Grenzwertverhältnisse $\frac{w}{\hat{a}} \to \frac{\varkappa+1}{2} \operatorname{cotg} \alpha$ und $\frac{w}{\hat{u}} \to \frac{\varkappa+1}{2}$.

Spezialisierung für Luft.

Um numerische Werte zu erhalten, wurde $k = 1{,}40$ gesetzt, was der Luft entspricht. Man erhält für (13)

$$\hat{u} = \pm \sqrt{\frac{10}{14}\left[-(a^2+\hat{a}^2) + \sqrt{(a^2+\hat{a}^2)^2 + 35(a^2-\hat{a}^2)^2}\right]}$$

und für $\operatorname{tg} \beta = 0{,}528$ also $\alpha = 27^0{,}8$ (Neigung der Asymptote)
und für $\operatorname{tg} \beta = 0{,}200$ also $\alpha = 11^0{,}3$ (Neigung der Doppelpunktstangenten).

Für die Parameter $a = 0{,}4$; $1{,}0$ und $1{,}6$ erhält man die folgende Tabelle:

$\hat{a}$	$\hat{u}$ f. $a=0{,}4$	$\hat{u}$ f. $a=1{,}0$	$\hat{u}$ f. $a=1{,}6$	für die Werte von $a = 1{,}0$				
				$\frac{\hat{u}}{\hat{a}}$	w	$w_{\text{stet.}}$	$\frac{w}{\hat{a}}$	$\frac{w}{\hat{u}}$
0,0	– 0,78	– 1,89	– 3,02	—	—	—	—	—
0,4	0,00	—	—	—	—	—	—	—
0,5	0,43	—	—	—	—	—	—	—
0,6	0,74	—	—	—	—	—	—	—
0,8	1,24	—	– 2,45	—	—	—	—	—
1,0	1,68	0,00	– 2,13	—	1,00	1,00	1,00	—
1,2	2,10	0,90	– 1,61	0,75	1,67	1,65	1,39	1,85
1,4	2,50	1,57	– 0,94	1,12	2,32	1,98	1,66	1,48
1,6	2,90	2,12	0,00	1,33	.	.	.	.
1,7	.	2,38	0,49	1,40	3,18	—	1,87	1,34
2,0	.	3,10	1,73	1,55	3,97	—	1,98	1,28
2,5	.	4,20	3,24	1,68	5,23	—	2,08	1,25
3,0	.	5,24	4,48	1,75	6,44	—	2,12	1,23
4,0	.	7,24	.	1,80	8,80	—	2,20	1,21
5,0	.	9,20	.	1,84	11,12	—	2,22	1,20

*

Ein Minuszeichen weist bei dem berechneten Ast, welcher für nach rechts laufende Stösse gilt, auf Verdünnungsstösse hin. Für kleine Druckverhältnisse, bei denen die Hugoniotkurve durch die Adiabate ersetzt werden kann, wurde zum Vergleich w_{stetig} nach (9) berechnet. Bei einer verlangten Genauigkeit von 1% ergeben sich ab $\hat{a} = 1{,}10$ (entspricht einem Druckverhältnis von 2,50) Unterschiede zwischen $w_{\text{stet'g}}$ und w. Für die Grenzverhältnisse bei Luft ergibt sich

$$\frac{\hat{u}}{\hat{a}} = 1{,}89 \qquad \frac{\hat{w}}{\hat{a}} = 2{,}27 \qquad \frac{\hat{w}}{\hat{u}} = 1{,}20.$$

Man sieht, dass die Werte der Tabelle ziemlich rasch diesen Werten zustreben. Der physikalische Grund für das Vorhandensein der Grenzverhältnisse dürfte wohl in der Eigenschaft der Hugoniotkurve, nur endliche Verdichtungen (bei Luft maximal etwa 6) zuzulassen, zu suchen sein.

Zur Entstehung des instationären eindimensionalen Verdichtungsstosses.

Die Entstehung eines eindimensionalen instationären Stosses kann man sich etwa auf folgende Weise denken:

1. Entleerung eines Hochdruckbehälters durch ein Rohr; dieses Beispiel soll anschliessend genauer behandelt werden.
2. Zusammenlaufen zweier oder mehrerer stetiger Verdichtungslinien bei der Lösung eindimensionaler instationärer Strömungsprobleme (Schultz-Grunow, Haller).

   Bei diesem Problemkreis erhält man die Anfangsbedingung des Stosses, nämlich u, a, $\hat{a}$ bzw. $\hat{u}$ aus dem bereits gegebenen Strömungsfeld; man darf aber bei der Aufstellung der Stossanfangsbedingungen nicht auf die bei der Einholung zweier Verdichtungslinien (Stösse) entstehende Verdünnungswelle vergessen (Pfriem).

Zur Klärung der Verhältnisse beim Problem 1) nehmen wir folgendes Beispiel an: Ein an einem Ende offenes Rohr wird etwa in der Mitte durch eine Wand abgeteilt. In der hiedurch entstehenden Kammer befindet sich Gas im Schallzustand a_2, während der übrige Teil des Rohres mit Gas vom Schallzustand a (Atmosphäre) erfüllt ist. Öffnet man rasch die Kammer durch seitliches Herausziehen der Wand, so gleicht sich der hergestellte Drucksprung durch einen instationären Verdichtungsstoss nach aussen und eine stetige Verdünnungswelle*) nach innen ins Rohr aus. Sei

*) Vermittels dieser Rechnungsweise gelingt es leicht, eine Abschätzung für die maximal erreichbare Geschossgeschwindigkeit zu erhalten.

$\hat{a}$ der Schallzustand und $\hat{u}$ die Strömungsgeschwindigkeit, die sich nach dem „Auseinanderlaufen" der stetigen Welle und des Stosses einstellen, so gilt nach (10), (8) und (12)

$$w = \frac{\varkappa+1}{4}\hat{u} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa+1}{4}\hat{u}\right)^2 + a^2} \tag{10'}$$

$$\hat{u} = \frac{2}{\varkappa-1}(a_2 - \hat{a}) \tag{8'}$$

$$\hat{u} = +\sqrt{\frac{1}{\varkappa}\left[-(a^2+\hat{a}^2)+\sqrt{(\hat{a}^2+a^2)^2 - \frac{4\varkappa^2}{\varkappa-1}\left[\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa-1}\right](a^2-\hat{a}^2)^2}\right]} \tag{13'}$$

hievon sind a und a_2 bekannt, $\hat{u}$, $\hat{a}$ und w sind gesucht. Setzt man $\hat{u}$ aus (8') in (13') ein, so erhält man nach einigen Umformungen eine Gleichung 4. Grades für $\hat{a}$, die man wohl am besten graphisch löst. $\hat{u}$ und w werden dann aus (8'), resp. (10') berechnet. Führt man die Rechnungen mit einigen kleinen Vernachlässigungen durch, so erhält man die folgende Tabelle (für $a = 1{,}00$):

a_2	$\hat{a}$	$\hat{u}$	u^*	$\frac{u^*}{\hat{u}}$	$\frac{a_2}{\hat{a}}$
1,38	1,20	0,90	1,53	1,70	1,15
1,87	1,50	1,86	2,79	1,50	1,25
2,18	1,70	2,38	3,50	1,47	1,28
2,62	2,00	3,10	4,46	1,44	1,31
3,34	2,50	4,20	5,91	1,41	1,34
4,05	3,00	5,24	7,33	1,39	1,35
5,45	4,00	7,24	10,04	1,39	1,36
6,15	4,50	8,26	11,40	1,38	1,37
6,84	5,00	9,20	12,70	1,38	1,37
8,22	6,00	11,10	15,18	1,38	1,37

Bezeichnet man mit u^* den Wert von $\hat{u}$, den man erhalten würde, wenn man in die Stosspolare (13') statt $\hat{a}$ den Ruhhochdruckschallzustand a_2 einsetzen würde, so ergibt sich als Grenzverhältnis für Luft $\frac{u^*}{a^2} = \frac{\hat{u}}{\hat{a}} = 1{,}89$ und $\frac{a_2}{\hat{a}} = \frac{u^*}{\hat{u}} = 1{,}38$, was als Mass für den Druckverlust durch die Verdünnungswelle angesehen werden kann.

Zusammenfassung.

Es gelingt, aus den Grundgleichungen des instationären eindimensionalen Verdichtungsstosses eine Beziehung zwischen Strömungs- und Schallgeschwindigkeit nach dem Stoss aufzustellen, welche als instationäre Stosspolare bezeichnet wird. Diese Beziehung ist an Stelle der für stetige Druckwellen zu verwendenden Beziehung $\hat{u} \pm \frac{2}{\varkappa - 1} \hat{a} = \text{const}$ zu benützen, sobald die Hugoniotgleichung nicht mehr durch die Adiabate ersetzt werden darf. Die instationäre Stosspolare wird diskutiert, für Luft berechnet und gezeichnet. Abschliessend werden zwei Entstehungsmöglichkeiten instationärer eindimensionaler Verdichtungsstösse kurz besprochen.

Herrn Professor Ackeret und Herrn Professor Roš, Zürich, und Herrn Professor Thirring, Wien, sei für ihre Förderung und ihr Entgegenkommen in meiner schwierigen Lage bestens gedankt. Herrn Hajek danke ich für die Ausführung einiger numerischer Rechnungen.

Literaturhinweise.

[1]) L. Prandtl, A. Busemann, Stodola-Festschrift, Zürich 1929. A. Busemann, Voltakongress, S. 328—360. Haller, Sulzer, Technische Rundschau, 1945; ferner Sauer, Theoretische Einführung in die Gasdynamik, dort weitere Literaturangaben zur stationären Strömung (Springer, Berlin 1943).

[2]) Schultz-Grunow, Forschung. Ing. Wesen (1942), Bd. 13, Nr. 3, S. 125-134, derselbe, Ing. Archiv, Bd. XIV (1943/44), S. 21. Sauer, Ing. Archiv, Bd. XIII (1942/43), S. 79; Bd. XIV (1943/44), S. 14 derselbe, ZAMM 23, Nr. 1. Theorie der nichtstationären Gasströmung, Geheimer Forschungsbericht FB 1675/1 (Zentrale f. wiss. Berichtswesen der Luftwaffe, Berlin). Pfriem, Forschung Ing.-Wesen (1941), Bd. 12, Nr. 1, S. 100; Nr. 5 u. 117, Nr. 3; (1942), Bd. 13, Nr. 2; derselbe, akustische Zeitschrift (1941), Bd. 6, S. 222. Haller, Technische Rundschau, Sulzer, 1945. Korst, Dissertation, Technische Hochschule Wien, 1946. Cap, Acta Physica Austriaca, Bd. 1, Heft 1 und Heft 6, Österreichisches Ingenieurarchiv, Bd. II (im Erscheinen).