

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 21 (1948)  
**Heft:** VI

**Artikel:** Eine Bemerkung zur Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz  
**Autor:** Luttinger, J.M. / Kittel, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111923>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Eine Bemerkung zur Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz

J. M. Luttinger<sup>1)</sup>, ETH., Zürich

C. Kittel<sup>2)</sup>, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill N. J. (U. S. A.)

(14. 10. 1948.)

Es ist zu erwarten, dass die Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz im wesentlichen dieselben Resultate liefert wie die klassische Theorie, da ja die Quantenzahlen ausserordentlich gross (ca.  $10^{15}$  oder noch grösser) sind. Trotzdem dürfte es vielleicht nicht ohne Interesse sein, direkt zu zeigen, dass bei quantenmechanischer Rechnung die Eigenwerte durch die Entmagnetisierungsenergie tatsächlich genau so überraschend verschoben werden<sup>3)</sup>. Eine solche Rechnung ist schon von POLDER<sup>4)</sup> mittels einer Methode von HOLSTEIN und PRIMAKOFF<sup>5)</sup> gemacht worden, bei der die vollständige Hamiltonfunktion des Systems verwendet wird. Diese Methode ist sehr wirksam, aber ziemlich langwierig.

Mit Hilfe eines Matrizenkalküls wollen wir hier zeigen, dass sich im allgemeinsten Falle des ferromagnetischen Resonanzproblems eines Ellipsoids benachbarte Eigenwerte um

$$\Delta E = g \mu_B [(H_x + (N_z - N_x) M_x) (H_x + (N_y - N_x) M_x)]^{1/2} \quad (1)$$

sich unterscheiden, wobei  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  die Entmagnetisierungsfaktoren sind und das Magnetfeld parallel zur X-Achse steht.

Die klassische makroskopische Hamiltonfunktion des Systems ist

$$H = -M_x H_x V + \frac{1}{2} (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2) \quad (2)$$

mit  $V$  = Volumen

$M$  = magnetisches Moment/Volumeneinheit.

$H_x$  = äusseres Magnetfeld (nur in der X-Richtung).

An Stelle des klassischen magnetischen Momentes  $MV = g \mu_B J$  ( $J$  dimensionslos). Damit folgt die Hamiltonfunktion

$$H = -g \mu_B J_x H_x + (g^2 \mu_B^2 / 2V) (N_x J_x^2 + N_y J_y^2 + N_z J_z^2) \quad (3)$$

<sup>1)</sup> National Research Fellow.

<sup>2)</sup> Z. Z. Zürich.

<sup>3)</sup> C. KITTEL, Phys. Rev. **71**, 270 (1947); **73**, 155 (1948).

<sup>4)</sup> D. POLDER, Phys. Rev. **73**, 1116 (1948).

<sup>5)</sup> T. HOLSTEIN und H. PRIMAKOFF, Phys. Rev. **58**, 1098 (1948).

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  ist aber eine Bewegungskonstante, so dass wir — abgesehen von einer Konstante — schreiben können<sup>1)</sup>:

$$H = a J_x + b J_y^2 + c J_z^2$$

wo

$$a = -g \mu_B H_x, \quad b = \frac{g^2 \mu_B^2}{2V} (N_x - N_y) \quad (4)$$

$$c = \frac{g^2 \mu_B^2}{2V} (N_z - N_y).$$

Eine in  $J_z$ ,  $J^2$  diagonale Darstellung der Matrizen gibt für die Säkulargleichung (wegen der wohlbekannten Eigenschaften der Drehimpulsoperatoren):

$$\begin{aligned} E p_m = & p_m \left( c m^2 + \frac{b}{2} (j^2 + j - m^2) \right) + p_{m+1} ((j-m)(j+m+1))^{1/2} \left( \frac{a}{2} \right) \\ & + \left( \frac{a}{2} \right) p_{m-1} ((j+m)(j-m+1))^{1/2} \\ & + \left( \frac{b}{4} \right) p_{m+2} ((j-m)(j-m+1)(j+m+1)(j+m+2))^{1/2} \\ & + \left( \frac{b}{4} \right) p_{m-2} ((j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2))^{1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

wo

$$\psi = \sum_{m=-j}^j p_m u_m^j, \quad H \psi = E \psi,$$

und die  $u_m^j$  die Eigenfunktionen von  $J^2$ ,  $J_z$  sind.

Weil  $j, m \gg 1$  sind, bekommen wir als sehr gute Näherung:

$$\begin{aligned} E p_m \cong & p_m \left( c m^2 + \frac{b}{2} (j^2 + j - m^2) \right) + (j^2 - m^2)^{1/2} (p_{m+1} + p_{m-1}) \\ & + \frac{b}{4} (j^2 - m^2) (p_{m+2} + p_{m-2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Wir können jetzt die Differenzengleichung in eine Differentialgleichung transformieren. Dazu entwickeln wir  $p_m$  in eine Taylorreihe um  $m$  und vernachlässigen die dritte und höhere Ableitungen. Für  $m \gg 1$  ist dies eine gute Näherung, beim Experiment beträgt ja  $m$  etwa  $10^{15}$ , so dass sie ausserordentlich gut wird. Gleichung (6) wird

$$\begin{aligned} E p_m = & p_m \left[ \left( c m^2 + \frac{b}{2} (j^2 + j - m^2) \right) + a (j^2 - m^2)^{1/2} + \frac{b}{2} (j^2 - m^2) \right] \\ & + \left( \frac{a}{2} (j^2 - m^2)^{1/2} + b (j^2 - m^2) \right) \frac{d^2 p_m}{dm^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

---

<sup>1)</sup>  $N_x + N_y + N_z = 4\pi$ .

Um (7) weiter zu vereinfachen, bemerken wir, dass zwar  $m \gg 1$  nichts desto weniger aber um einen Faktor der Größenordnung  $10^5$  kleiner als  $j$  ist. Demzufolge sind die wesentlichen Terme der Gleichung (7) in sehr guter Näherung

$$\left( b j^2 + \frac{a}{2} j \right) \frac{d^2 p_m}{dm^2} + \left( -E + \text{Konst.} + m^2 \left( c - b - \frac{a}{2j} \right) \right) p_m = 0 \quad (8)$$

oder

$$\frac{d^2 p_m}{dm^2} + \left( -\frac{E}{bj^2 + \frac{a}{2} j} - m^2 \frac{\left( b + \frac{a}{2j} - c \right)}{bj^2 + \frac{a}{2} j} \right) p_m = 0 \quad (9)$$

weil die Konstante in der Gleichung (8) keine Rolle spielt.

Gleichung (9) hat die Form einer Oszillatorgleichung und liefert gleichmäßig verteilte Eigenwerte. Der Abstand zweier Eigenwerte ist:

$$\Delta E = 2 \left[ \left( b j^2 + \frac{a}{2} j \right) \left( b + \frac{a}{2j} - c \right) \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Wenn wir für  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die obigen Werte einsetzen, kommt

$$\Delta E = g \mu_B [(H_x + (N_z - N_x) M_x) (H_x + (N_y - N_x) M_x)]^{1/2} \quad (11)$$

also genau das klassische Ergebnis.

Wir möchten an dieser Stelle Herrn Dr. Jost für eine wertvolle Diskussion bestens danken.