Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 21 (1948)

Heft: VI

Artikel: Allgemeine Eigenschaften der paraxialen elektronenoptischen Abbildung

Autor: Borgnis, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111922

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Allgemeine Eigenschaften der paraxialen elektronenoptischen Abbildung*)

von **F. Borgnis.**

(24. IX. 1948.)

Die allgemeinen Eigenschaften der paraxialen elektronenoptischen Abbildung in axialsymmetrischen Potentialfeldern werden aus der Differentialgleichung der achsennahen Bahnen hergeleitet. Neben dem bisher üblicherweise behandelten Fall, dass Objekt und (reelles) Bild ausserhalb des wirksamen Bereiches der Potentialfelder liegen, wird insbesondere der Fall betrachtet, dass die Abbildung ganz oder teilweise innerhalb des Feldes zustande kommt. Unter anderem ergibt sich dabei ein allgemeiner geometrischer Beweis des Satzes von Lagrange-Helmholtz für die Elektronenoptik.

1. Die paraxiale Bewegung von Elektronen (Ladung e, Masse m) im axialsymmetrischen elektrischen und magnetischen Potentialfeld (Zylinderkoordinaten r, φ, z) wird, wie bekannt, durch folgende Differentialgleichungen beschrieben[1]):

$$\frac{d}{dz}\left(\sqrt{\Phi}\,\frac{dr}{dz}\right) = P(z)\cdot r + \frac{e}{2\,m\sqrt{\Phi}}\,\frac{C^2}{r^3} \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \sqrt{\frac{e}{8\,m}}\,\frac{B}{\sqrt{\Phi}} + \sqrt{\frac{e}{2\,m\,\Phi}}\,\frac{C}{r^2} \tag{2}$$

mit

$$P(z) = -\frac{e}{8\,m}\,\frac{B^2}{\sqrt{\Phi}} - \frac{1}{4\sqrt{\Phi}}\,\frac{d^2\,\Phi}{dz^2}\,. \tag{3}$$

Φ und B bedeuten das elektrische Potential bzw. die magnetische Induktion auf der z-Achse; die Gleichungen sind im praktischen Massystem angeschrieben. Die Konstante C ist dabei durch die Bedingungen am Ausgangspunkt einer Bahn ($z = a$, $r(a) = r_a$) gegeben zu

$$C = \frac{m}{e}\,r_a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_a - \frac{r_a^2}{2}\,B_a\,. \tag{4}$$

Für alle Bahnen, die von der Achse ausgehen bezw. die Achse schneiden, hat C den Wert Null ($r_a = 0$); für andere Bahnen verschwindet C, wenn am Ausgangspunkt kein magnetisches Feld B_a

*) Referiert in einem Kurzvortrag am 7. 9. 1948 am int. Fernsehkongress in Zürich.

[1]) Vgl. z. B. Brüche-Scherzer, Geometrische Elektronenoptik (1934), S. 116. V. K. Zworykin u. a., Electron optics and the electron microscope (1946) S. 505.

*

vorhanden ist und die Anfangstangente der Bahn in einer die Zylinderachse enthaltenden Ebene liegt. Wir werden die folgenden Betrachtungen unter der Voraussetzung $C = 0$ durchführen und im Abschnitt 8 einige ergänzende Bemerkungen über den Fall $C \neq 0$ anfügen.

Wir richten, wie üblich, unser Interesse auf den Verlauf der Bahnkurven $r(z)$, wie sie durch (1) beschrieben werden. Unter Abänderung der Bezeichnungen schreiben wir (1) mit $C = 0$ in der Form

$$[n(z) \cdot r']' = P(z) \cdot r \tag{5}$$

wobei wir mit $\sqrt{\Phi} = n(z)$ in Analogie zur Lichtoptik an einen längs der z-Achse variablen Brechungsindex n denken. Die Absicht ist, aus der Differentialgleichung (5) eine Anzahl allgemeiner Eigenschaften der elektronenoptischen Abbildung herzuleiten, insbesondere auch für den Fall, dass die Abbildung *innerhalb* des wirksamen Bereiches der Potentialfelder zustande kommt.

2. Die Bahngleichung (5) besitzt als lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung allgemeine Lösungen der Form

$$r(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) \,. \tag{6}$$

f_1 und f_2 bedeuten zwei linear unabhängige Integrale von (5); die Integrationskonstanten c_1 und c_2 sind eindeutig bestimmt, wenn für einen Punkt in einer Ebene $z = a$ der Anfangswert r_a und die Anfangstangente r_a' vorgegeben werden und die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

ist. Falls f_1 und f_2 oszillatorischen Charakter haben, so trennen sich Nullstellen von f_1 und f_2 gegenseitig. Nach (5) und (6) gilt für die partikulären Integrale

$$(n f_1')' = P \cdot f_1 \tag{8}$$

$$(n f_2')' = P \cdot f_2 \,. \tag{9}$$

Multipliziert man (8) mit f_2 und (9) mit f_1 und subtrahiert, so folgt nach kurzer Umformung

$$[n(f_1 f_2' - f_2 f_1')]' = 0$$

oder die allgemeine Beziehung

$$\Delta(z) = f_1(z)\, f_2'(z) - f_2(z)\, f_1'(z) = \frac{\text{const.}}{n(z)} \,. \tag{10}$$

Die Integrale f_1 und f_2 in (6) wählen wir nun in spezieller Weise:

Wir bezeichnen sie mit r_1 und r_2 und geben an einer Stelle $z = a$ folgende Anfangswerte und Anfangstangenten für sie vor:

$$\begin{aligned} z = a: \quad r_1(a) &= 1 & r_2(a) &= 0 \\ r_1'(a) &= 0 & r_2'(a) &= 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Damit lässt sich eine Lösung $r(z)$ nach (6) mit dem Anfangswert $r(a)$ und der Anfangstangente $r'(a)$ darstellen durch

$$\begin{aligned} r(z) &= r(a)\, r_1(z) + r'(a)\, r_2(z) \\ r'(z) &= r(a)\, r_1'(z) + r'(a)\, r_2'(z)\,, \end{aligned} \tag{12}$$

wie man durch Einsetzen von (11) an der Stelle $z = a$ einsieht. Wir erinnern uns, dass wir mit (12) paraxiale Bahnen $r(z)$ beschreiben; $r(a)$ und $r'(a)$ sind daher kleine Grössen, während die Funktionen r_1 und r_2 keinen Beschränkungen dieser Art unterliegen.

3. Die Verhältnisse bei einer elektronenoptischen Abbildung bedingen einen oszillatorischen Charakter von r_1 und r_2. Zumindest

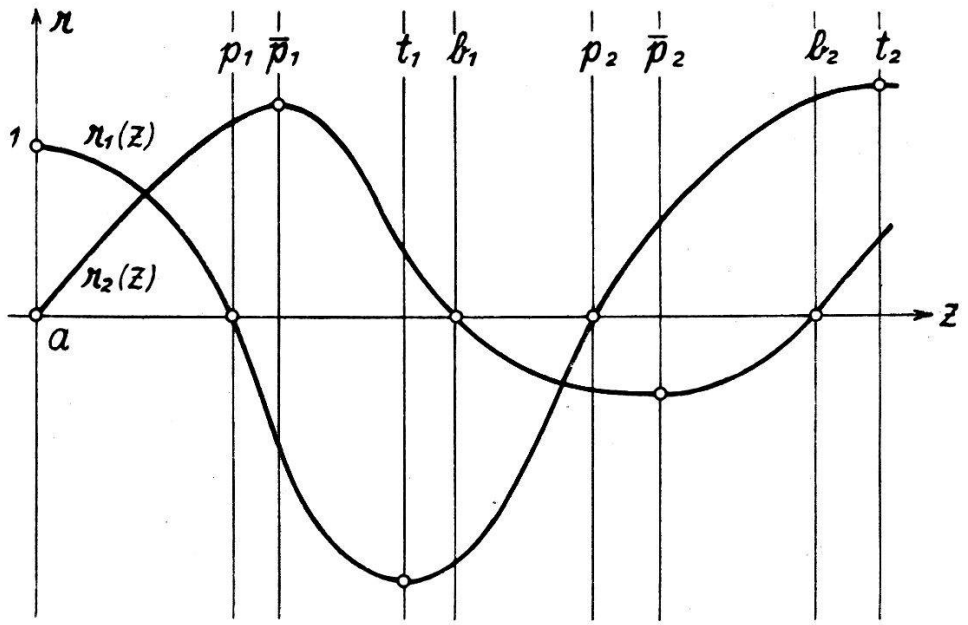

Fig. 1.

Qualitativer Verlauf der charakteristischen Funktionen $r_1(z)$ und $r_2(z)$ mit den Nullstellen p_k und b_k und den Extremalstellen t_k und $\bar{p}_k$.

soll r_2 ausser an der Stelle $z = a$ eine weitere Nullstelle an einer Stelle $z = b$ aufweisen; dort entsteht dann, wie wir sehen werden, ein (reelles) Bild von einem Objekt in der Ebene $z = a$. Fig. 1 zeigt den qualitativen Verlauf von r_1 und r_2[1]). Wie man sieht, lassen sich

[1]) Die Bewegungsrichtung der Elektronen wird in allen Abbildungen von links nach rechts angenommen.

einer Ebene $z = a$ jeweils Gruppen von 4 charakteristischen Ebenen zuordnen, die mit p, $\bar{p}$, t und b bezeichnet sind und aus folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{matrix} r_1(p_k) = 0 & r_2(b_k) = 0 \\ r_1'(t_k) = 0 & r_2'(\bar{p}_k) = 0 \end{matrix} \quad (k = 1,2 \ldots). \tag{13}$$

Wir wollen der Reihe nach die Abbildungsverhältnisse in diesen 4 Ebenen feststellen:

I) $z = b_k$; $r_2(b_k) = 0$.

Aus (12) folgt:

$$r(b_k) = r(a) \cdot r_1(b_k), \tag{14}$$

d. h. die Werte $r(b_k)$ sind unabhängig von der Anfangstangente r_a'. Ein Strahlenbüschel durch einen Punkt $r_a = r(a)$ in der Ebene $z = a$ geht daher durch ein und denselben Punkt $r(b_k)$ (Fig. 2).

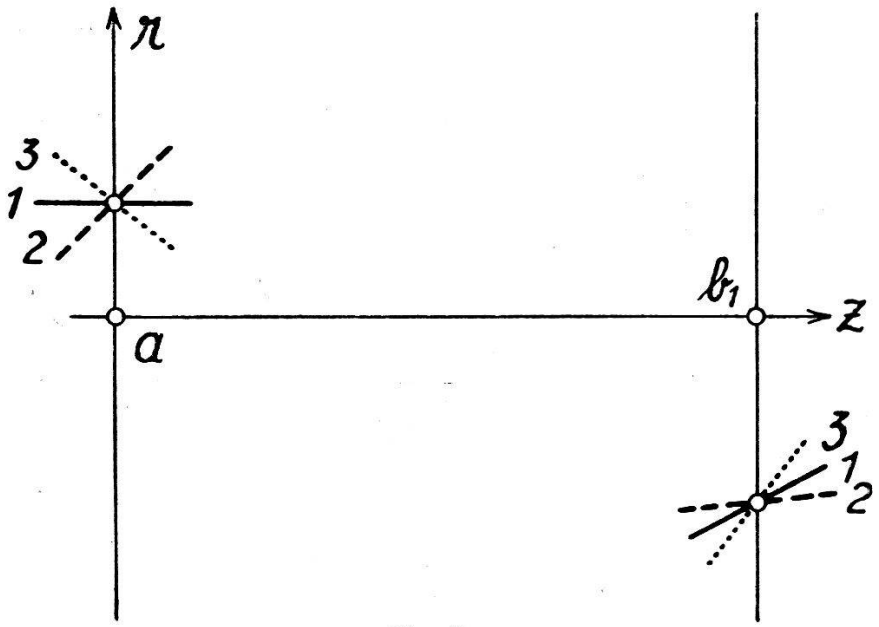

Fig. 2.

Reelles Bild in einer Ebene $z = b_k$ von einem Objekt in der Ebene $z = a$.

In einer Ebene $z = b_k$ entsteht ein reelles Bild eines in der Ebene $z = a$ gelegenen Objektes. Die *Lateralvergrösserung* V folgt aus (14) zu

$$V_k = \frac{r(b_k)}{r(a)} = r_1(b_k). \tag{15}$$

II) $z = p_k$; $r_1(p_k) = 0$.

Aus (12) folgt:

$$r(p_k) = r'(a) \cdot r_2(p_k). \tag{16}$$

Der Wert $r(p_k)$ ist, unabhängig von r_a, eine Funktion von r'_a allein, d. h. alle parallelen Bahnen mit der Neigung r'_a durch die Ebene $z = a$ vereinigen sich im gleichen Punkt $r(p_k)$ der Ebene $z = p_k$ (Fig. 3). Eine Ebene $z = p_k$ lässt sich daher als eine der Ebene $z = a$ zugeordnete Brennebene auffassen.

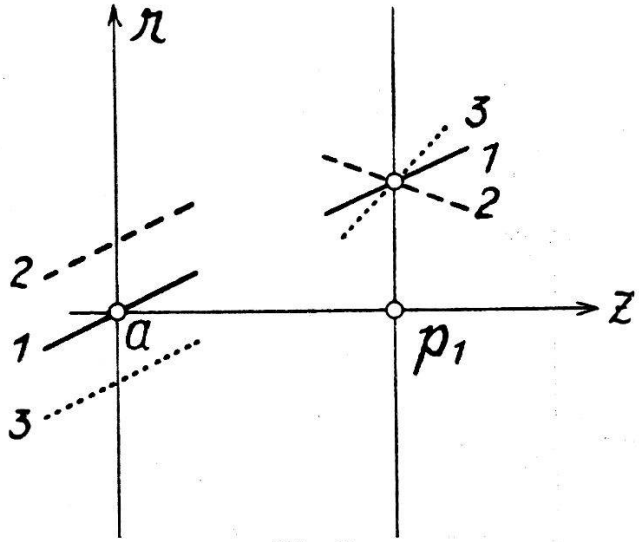

Fig. 3.

Parallele Bahnen durch die Ebene $z = a$ vereinigen sich in einer Ebene $z = p_k$.

Definiert man eine (vordere) *Brennweite* f nach GAUSS durch das Verhältnis der Ordinate $r(p_k)$ zum Neigungswinkel r'_a des parallelen Bündels, so erhält man mit (16)

$$f_k = \frac{r(p_k)}{r'(a)} = r_2(p_k). \tag{17}$$

III) $z = \overline{p}_k;\ r_2'(\overline{p}_k) = 0.$

Aus (12) folgt:

$$r'(\overline{p}_k) = r(a) \cdot r_1'(\overline{p}_k). \tag{18}$$

Der Wert $r'(\overline{p}_k)$ ist, unabhängig von r_a', allein eine Funktion von r_a, d. h. parallele Bahnen durch die Ebene $z = \overline{p}_k$ kommen vom gleichen Punkt der Ebene $z = a$ her, die man daher als eine den Ebenen $z = \overline{p}_k$ zugeordnete Brennebene ansehen kann (Fig. 4). Eine (hintere) GAUSS'sche *Brennweite* $\overline{f}$ lässt sich mit (18) definieren zu

$$\overline{f}_k = \frac{r(a)}{r'(\overline{p}_k)} = \frac{1}{r_1'(\overline{p}_k)}. \tag{19}$$

IV) $z = t_k;\ r_1'(t_k) = 0.$

Aus (12) folgt:

$$r'(t_k) = r'(a) \cdot r_2'(t_k). \tag{20}$$

Die mit einer Neigung r_a' die Ebene $z = a$ durchsetzenden Bahnen passieren die Ebenen $z = t_k$ unter der konstanten Neigung $r'(t_k)$ (Fig. 5). Zwischen den beiden Ebenen bei a und t_k besteht eine teleskopische Abbildung mit der *Angularvergrösserung* A:

$$A_k = \frac{r'(t_k)}{r'(a)} = r_2'(t_k)\,. \tag{21}$$

Wie in Abschnitt 8 gezeigt wird, behalten die Abbildungsverhältnisse für den Fall I (reelles Bild) auch für $C \neq 0$ Gültigkeit; die Fälle II bis IV gelten nur für $C = 0$.

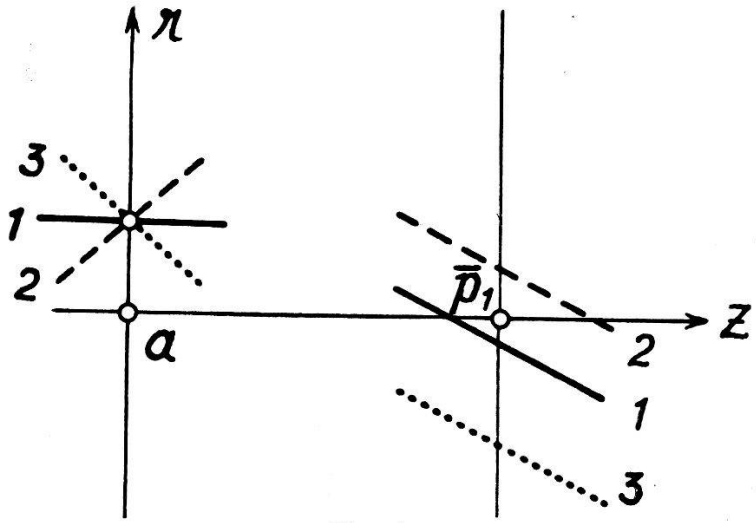

Fig. 4.

Parallele Bahnen durch eine Ebene $z = \bar{p}_k$ kommen vom gleichen Punkt der Ebene $z = a$ her.

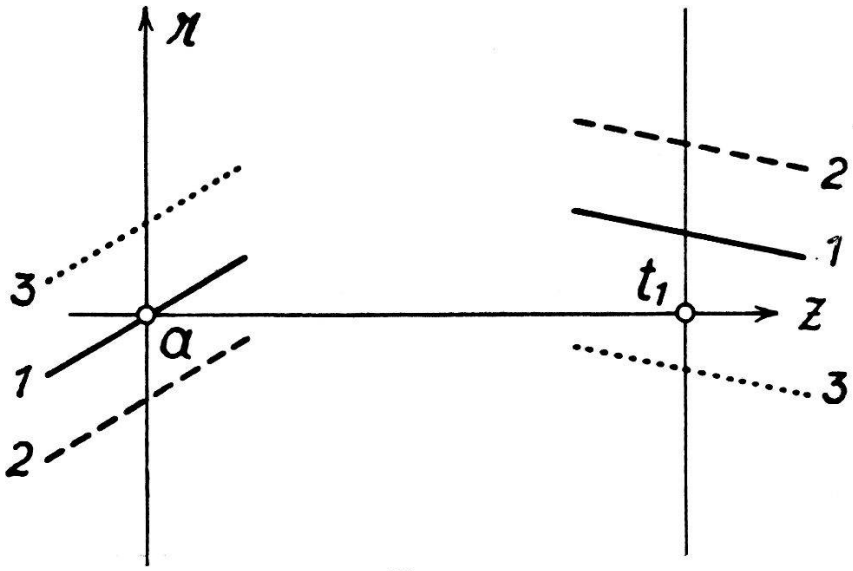

Fig. 5.

Teleskopische Abbildung zwischen einer Ebene $z = t_k$ und der Ebene $z = a$.

4. Wir wenden nun die allgemeine Beziehung (10) auf die unter 3. I) bis IV) beschriebenen Fälle an. Setzen wir in (10) für f_1 und f_2 speziell die Funktionen r_1 und r_2 ein, so folgt unter Beachtung, dass dann die linke Seite von (10) an der Stelle $z = a$ wegen (11) den Wert Eins annimmt,

$$r_1(z)\, r_2'(z) - r_2(z)\, r_1'(z) = \frac{n(a)}{n(z)}. \tag{22}$$

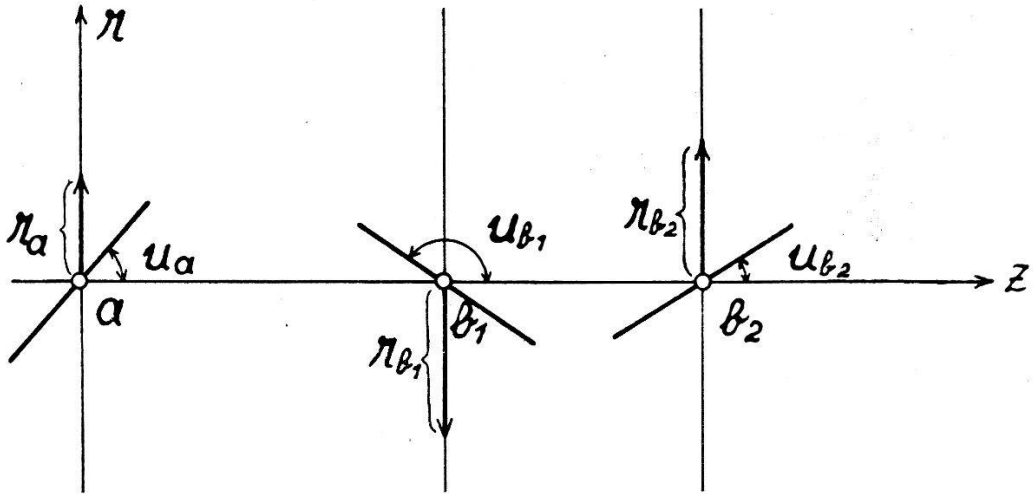

Fig. 6.
Zur Beziehung zwischen Öffnungswinkel u und Vergrösserung $V = r(b_k)/r(a)$ bei der Abbildung durch reelle Bilder (Lagrange-Helmholtz'scher Satz).

Betrachten wir eine Ebene $z = b_k$ nach I) mit $r_2(b_k) = 0$, in welcher ein reelles Bild der Ebene $z = a$ entsteht, so gilt wegen $r_2 = 0$ mit (22)

$$r_1(b_k)\, r_2'(b_k) = \frac{n(a)}{n(b_k)}. \tag{23}$$

Nach (15) ist $r_1(b_k) = r(b_k)/r(a)$ gleich der Vergrösserung V. Für eine Bahn, welche durch die beiden Achsenpunkte $z = a$, $r(a) = 0$ und $z = b_k$, $r(b_k) = 0$ geht, gilt nach (12) mit $r(a) = 0$

$$r'(b_k) = r'(a) \cdot r_2'(b_k) \text{ oder } r_2'(b_k) = \left[\frac{r'(b_k)}{r'(a)}\right]_{r_a = 0}. \tag{24}$$

Bezeichnen wir den Winkel der Bahntangente bei a mit der Achse durch u_a und bei b_k durch u_{b_k} (Fig. 6), so folgt durch Einsetzen von (24) und (15) in (23) mit $r_a' = \operatorname{tg} u_a$ und $r_{b_k}' = \operatorname{tg} u_{b_k}$

$$n(a)\, r(a) \operatorname{tg} u_a = n(b)\, r(b_k) \operatorname{tg} u_{b_k} \tag{25}$$

oder auch mit Einführung des elektrischen Potentials Φ auf der Achse

$$\sqrt{\Phi_a}\, r_a \operatorname{tg} u_a = \sqrt{\Phi_{b_k}}\, r_{b_k} \operatorname{tg} u_{b_k}. \tag{25a}$$

Diese Beziehung wird in Analogie zu einem bekannten Satz der

geometrischen Optik als der „*Lagrange-Helmholtz'sche Satz*" der Elektronenoptik bezeichnet[1]). Unserer Herleitung liegt, wie in 1. erwähnt, die Voraussetzung $C = 0$ zugrunde, d. h. sie gilt noch nicht für Bahnen mit zur Achse „schiefer" Anfangstangente oder falls am Ausgangspunkt ein magnetisches Feld wirksam ist. Wir werden jedoch in Abschnitt 8 zeigen, dass die Beziehungen (25) auch im Fall $C \neq 0$ bestehen, womit der *Lagrange-Helmholtz'sche Satz* für die Elektronenoptik in voller Allgemeinheit gilt[2]).

In Anwendung auf die nach 3. IV) zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = t_k$ bestehende teleskopische Abbildung erhält man aus (22) mit $r_1'(t_k) = 0$

$$r_1(t_k)\, r_2'(t_k) = \frac{n(a)}{n(t_k)}\,. \tag{26}$$

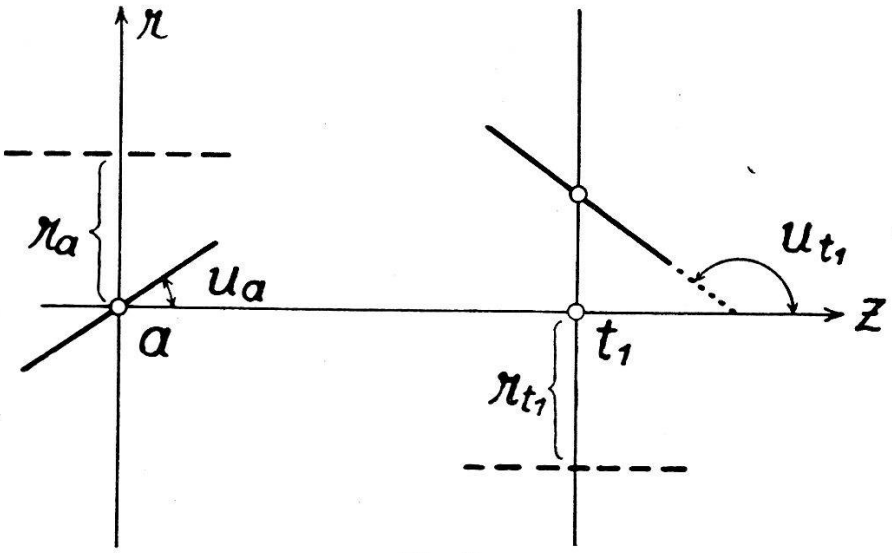

Fig. 7.
Zur Beziehung zwischen teleskopischer Vergrösserung $V_T = r(t_k)/r(a)$ und Angularvergrösserung A.

$r_2'(t_k)$ gibt nach (21) die Angularvergrösserung A. Für sich gegenseitig entsprechende bei a und t_k *achsenparallele* Bahnen folgt aus (12) mit $r'(a) = 0$

$$r(t_k) = r(a) \cdot r_1(t_k) \text{ oder } r_1(t_k) = \left[\frac{r(t_k)}{r(a)}\right]_{r_a' = 0} = V_{T_k}\,, \tag{27}$$

wobei wir unter V_T die *Lateralvergrösserung bei teleskopischer Abbildung* verstehen (Fig. 7). Mit (27) und (21) folgt aus (26)

$$A_k \cdot V_{T_k} = \frac{n(a)}{n(t_k)} = \sqrt{\frac{\Phi_a}{\Phi_{t_k}}}\,, \tag{28}$$

[1]) Der hier gegebene „geometrische" Beweis des Lagrange-Helmholtz'schen Satzes scheint dem Verfasser den Vorzug gegenüber den bisher üblichen, auf energetischen (thermodynamischen) Überlegungen beruhenden Beweisen zu verdienen, die bei näherem Zusehen im elektronen optischen Fall nicht sehr befriedigen.

[2]) Über die Gültigkeit auch bei virtuellen Bildern siehe Abschnitt 6.

d. h. die Gültigkeit der auch in der GAUSS'schen Dioptrik bestehenden Beziehung zwischen teleskopischer Vergrösserung V_T und Angularvergrösserung A für die Elektronenoptik.

Für die unter 3. II) und III) behandelten Fälle, welche einer Ebene $z = a$ (eine oder mehrere) Brennebenen bei $z = p_k$ und andererseits die Ebene $z = a$ als Brennebene den Ebenen $z = \bar{p}_k$ zuordnen, lässt sich für die mit (17) und (19) definierten GAUSS'schen Brennweiten f und $\bar{f}$ eine in der GAUSS'schen Dioptrik bekannte Brennweitenbeziehung nur für den speziellen Fall aufstellen, dass die Ebenen $z = p_k$ und $z = \bar{p}_k$ zusammenfallen. Mit $p_k = \bar{p}_k = p_{0k}$ und den Bedingungen nach II) und III): $r_1(p_{0k}) = r_2'(p_{0k}) = 0$ folgt aus (22)

$$r_1'(p_{0k})\, r_2(p_{0k}) = -\frac{n(a)}{n(p_{0k})}$$

und mit (17) und (19)

$$\frac{f_k}{\bar{f}_k} = -\frac{n(a)}{n(p_{0k})} = -\sqrt{\frac{\Phi_a}{\Phi_{p_{0k}}}} \qquad (p_k = \bar{p}_k = p_{0k}). \tag{29}$$

5. In der Lichtoptik liegen normalerweise Objekt und Bild in Medien mit konstantem (und meist gleichem) Brechungsindex n; die Lichtstrahlen in Objekt- und Bildraum verlaufen daher geradlinig. Zwischen den Koordinaten zugeordneter Bild- und Objektpunkte bestehen kollineare Beziehungen, welche die Eigenschaften der GAUSS'schen Dioptrik enthalten. In der Elektronenoptik entspricht dies dem Fall, dass Bild und Objekt in Gebieten konstanten Potentials ($n = \sqrt{\Phi} =$ konst.), d. h. im *feldfreien* Raum liegen; bekanntlich gelten dann auch in der Elektronenoptik die Gesetze der GAUSS'schen Dioptrik (siehe Abschnitt 7). Kommt die elektronenoptische Abbildung jedoch ganz oder teilweise *innerhalb* des wirksamen Potentialfeldes zustande, so besteht natürlich zwischen Objekt- und Bildkoordinaten kein kollinearer Zusammenhang. Die Abbildungs verhältnisse lassen sich hier aus dem spezifischen Verlauf unserer in (11) eingeführten Funktionen r_1 und r_2, d. h. insbesondere deren Nullstellen, Extremalstellen und den zugehörigen Funktionswerteu entnehmen.

Einem Objekt in der Ebene $z = a$ ist nach 3. I) durch $r_2(b_k) = 0$ ein reelles Bild in einer Ebene $z = b_k$ zugeordnet. Zufolge der für r_2 mit (11) vorgegebenen Anfangsbedingungen enthält die Funktion $r_2(z)$ a als Parameter. Die Abhängigkeit zwischen den Koordinaten von Bildebene (b_k) und Objektebene (a) ist daher durch $r_2(z, a)$ mit $z = b_k$ durch

$$r_2(b_k, a) = 0 \tag{30}$$

gegeben; ist $r_2(z,a)$ bekannt, so findet man daraus $b_k(a)$. Es genügt, $r_1(z,a^*)$ und $r_2(z,a^*)$ für einen bestimmten Wert von a^* zu kennen, um daraus für irgendeinen Wert von a die analogen Funktionen $r_1(z,a)$ und $r_2(z,a)$ herzuleiten. Man kann dazu die folgenden Beziehungen verwenden, von deren Gültigkeit man sich mit (6), (10) und (11) sofort überzeugt:

$$\begin{aligned} r_1(z) &= \frac{n(a)}{c}\left(f_2'(a)\, f_1(z) - f_1'(a)\, f_2(z)\right) \\ r_1'(z) &= \frac{n(a)}{c}\left(f_2'(a)\, f_1'(z) - f_1'(a)\, f_2'(z)\right) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} r_2(z) &= -\frac{n(a)}{c}\left(f_2(a)\, f_1(z) - f_1(a)\, f_2(z)\right) \\ r_2'(z) &= -\frac{n(a)}{c}\left(f_2(a)\, f_1'(z) - f_1(a)\, f_2'(z)\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Diese Beziehungen geben eine Darstellung von r_1 und r_2 durch zwei beliebige andere linear unabhängige Integrale f_1 und f_2; sie gelten daher auch für $f_1 = r_1(z,a^*)$, $f_2 = r_2(z,a^*)$ [1]).

Der funktionale Zusammenhang zwischen den Koordinaten b_k und a von Bild- und Objektebene ergibt sich nach (30) mit (32) auch aus $f_2(a)\, f_1(b_k) - f_1(a)\, f_2(b_k) = 0$ oder

$$\frac{f_2(a)}{f_1(a)} = \frac{f_2(b_k)}{f_1(b_k)}. \tag{33}$$

Das Verhältnis der Änderung von b_k bei einer kleinen Änderung von a bezeichnen wir wie in der Lichtoptik als *Axialvergrösserung* G:

$$G_k = \frac{db_k}{da}. \tag{34}$$

Aus (33) ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{f_1(a)\, f_2'(a) - f_2(a)\, f_1'(a)}{f_1^2(a)}\, da = \frac{f_1(b)_k)\, f_2'(b_k) - f_2(b_k^{\cdot})\, f_1'(b_k)}{f_1^2(b_k)}\, db_k.$$

Unter Verwendung von (10) erhält man daraus nach (34) und mit Einführung von r_1 und r_2 für f_1 und f_2:

$$G_k = \frac{db_k}{da} = \frac{n(b_k)\, r_1^2(b_k)}{n(a)\, r_1^2(a)} = \frac{n(b_k)}{n(a)}\, r_1^2(b_k)$$

und mit (15)

$$\frac{G_k}{V_k^2} = \frac{n(b_k)}{n(a)} = \sqrt{\frac{\Phi_{b_k}}{\Phi_a}}, \tag{35}$$

[1] Die Konstante c hat nach (10) den Wert $\Delta(z)\cdot n(z)$; also z. B.

$$c = \Delta(a)\cdot n(a) = \left(f_1(a)\, f_2'(a) - f_2(a)\, f_1'(a)\right)\cdot n(a).$$

d. h. die auch in der GAUSS'schen Dioptrik gültige Beziehung zwischen Lateral- und Axialvergrösserung. Aus (35) erhellt unmittelbar das positive Vorzeichen von G, d. h. die Abbildung durch reelle Bilder ist rechtsläufig. Mit (15), (25) und (35) folgt unmittelbar auch die Beziehung

$$\frac{A_k G_k}{V_k} = 1\,, \tag{35a}$$

wenn $A_k = \operatorname{tg} u_{t_k} / \operatorname{tg} u_a$ die Angularvergrösserung für die Bildebene $z = b_k$ bezeichnet. Wie der folgende Abschnitt zeigt, gelten (35) und (35a) auch für virtuelle Bilder.

6. Wir wollen noch die Frage nach der Existenz virtueller Bilder beantworten, die Objektpunkten in einer Ebene $z = a$ entsprechen. Durch Elimination von $r'(a)$ aus den beiden Gleichungen (12) und Verwendung von (22) erhält man nach kurzer Rechnung

$$r(z) = \frac{r_2(z)}{r_2'(z)}\, r'(z) + r(a)\, \frac{n(a)}{n(z)}\, \frac{1}{r_2'(z)}\,. \tag{36}$$

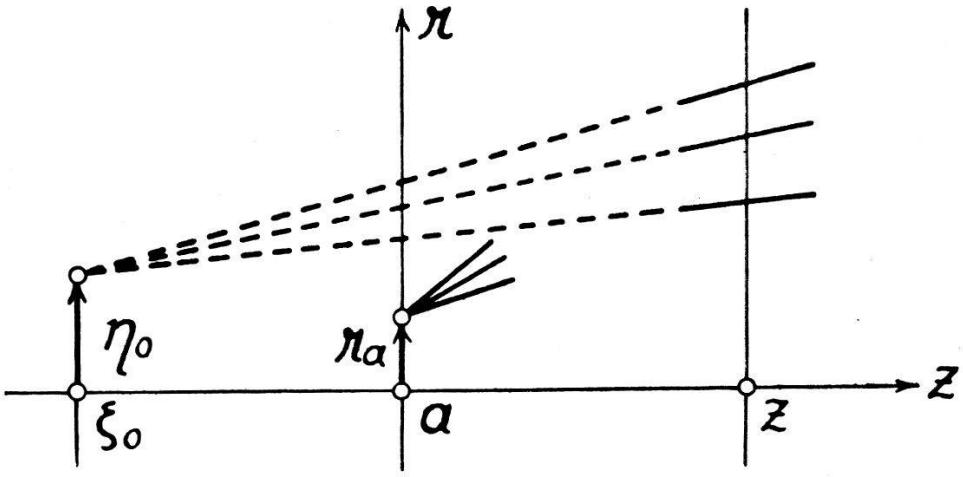

Fig. 8.
Zu einer Ebene z ($z < \bar{p}_1$ und $b_k < z < \bar{p}_{k+1}$) gehört ein virtueller Bildpunkt ζ_0, η_0 von einem Objektpunkt in der Ebene $z = a$.

In jeder Ebene z sind also die Ordinate $r(z)$ des Durchstosspunktes der Bahn durch die Ebene und die zugehörige Bahntangente $r'(z)$ nach (36) verknüpft und für ein gegebenes z nur noch abhängig von r_a, nicht aber von r_a'. Denkt man sich die zu einem festen r_a gehörigen Bahntangenten bei z von den zugehörigen Durchstosspunkten aus geradlinig verlängert, so schneiden sie sich in einem Punkte ζ_0, η_0 (Fig. 8) mit den Werten

$$\zeta_0 = z - \frac{r_2(z)}{r_2'(z)} \tag{37}$$

$$\eta_0 = r(a)\, \frac{n(a)}{n(z)}\, \frac{1}{r_2'(z)} = r(a) \sqrt{\frac{\Phi_a}{\Phi_z}}\, \frac{1}{r_2'(z)}\,, \tag{38}$$

nachdem das Geradenbüschel durch ζ_0, η_0 der Gleichung

$$r(z) = \eta_0 + r'(z)\,(z - \zeta_0)$$

genügt. In Bereichen $r_2(z)/r_2'(z) > 0$ ist $\zeta_0 < z$, d. h. zu jeder Ebene z in einem solchen Bereich gibt es zu einem Objektpunkt r_a in der Ebene $z = a$ einen virtuellen Bildpunkt. Eine Betrachtung von Fig. 1 zeigt, dass die virtuellen Bilder von $z = a$ aus ins Unendliche nach links wandern, wenn bei festem a die Ebene z nach rechts bis zu $z = \bar{p}_1$ wandert. Zwischen $\bar{p}_1$ und b_1 existiert kein virtuelles Bild; solche sind in Bereichen $z < \bar{p}_1$ und $b_k < z < \bar{p}_{k+1}$ vorhanden. In Bereichen $\bar{p}_k < z < b_k$ geben (37) und (38) die Koordinaten eines reellen Bildpunktes für den Fall, dass sich rechts der Ebene z ein feldfreier Raum anschliesst. Die Lateralvergrösserung gibt (38) mit $V = \eta_0/r(a)$.

Für die Axialvergrösserung $G = d\zeta_0/da$ bei $z =$ const. folgt aus (37) unter Verwendung von (32), (10) und (38) nach kurzer Rechnung ebenfalls die Beziehung (35). Die Abbildung ist daher auch für virtuelle Bilder rechtsläufig. Ebenso folgt die Gültigkeit des Satzes von Lagrange-Helmholtz in bezug auf die in einer Ebene $z = \zeta_0$ nach (37) und (38) entstehende Abbildung unmittelbar aus (38) durch Einsetzen der aus (12) für $r(a) = 0$ folgenden Beziehung $r_2'(z) = r'(z)/r'(a)$.

Eliminiert man aus den Gleichungen (12) $r(a)$, so folgt unter Verwendung von (22)

$$r(z) = \frac{r_1(z)}{r_1'(z)}\, r'(z) - r'(a)\, \frac{n(a)}{n(z)}\, \frac{1}{r_1'(z)}\,. \tag{39}$$

Dies bedeutet, dass alle die Ebene $z = a$ unter gleicher Neigung $r'(a)$ durchsetzenden Bahnen bei geradliniger Fortsetzung in Richtung der Bahntangente von einer Ebene z aus sich in einem Punkt mit den Koordinaten

$$\zeta_f = z - \frac{r_1(z)}{r_1'(z)} \tag{40}$$

$$\eta_f = -\,r'(a)\, \frac{n(a)}{n(z)}\, \frac{1}{r_1'(z)} = -\,r'(a) \sqrt{\frac{\Phi_a}{\Phi_z}}\, \frac{1}{r_1'(z)} \tag{41}$$

vereinigen. In Bereichen, wo $r_1(z)/r_1'(z)$ positive Werte besitzt, entsteht daher von einer Ebene z aus betrachtet ein virtueller Bildpunkt ζ_f, η_f von den die Ebene $z = a$ mit der Neigung $r'(a)$ durchsetzenden Parallelen, die sich in einer der Ebene z zugeordneten

virtuellen Brennebene bei $z = \zeta_f$ vereinigen (Fig. 9). Mit (41) lässt sich für jedes z eine GAUSS'sche Brennweite definieren zu

$$f_z = \frac{\eta_f}{r'(a)} = -\frac{n(a)}{n(z)}\frac{1}{r_1'(z)} = -\sqrt{\frac{\Phi_a}{\Phi_z}}\frac{1}{r_1'(z)}. \tag{42}$$

Aus Fig. 1 ersieht man, dass solche virtuelle Brennebenen in Bereichen $p_k < z < t_k$ existieren.

Für $z < p_1$ und $t_k < z < p_{k+1}$ ist $r_1(z)/r_1'(z) < 0$; ζ_f und η_f geben in diesen Bereichen die Koordinaten eines den Parallelen bei $z = a$ zugeordneten reellen Bildpunktes in einer reellen Brennebene $z = \zeta_f$ für den Fall, dass sich rechts der Ebene z ein feldfreier Raum anschliesst.

Wir bemerken noch, dass die Betrachtungen dieses Abschnittes 6 an die Voraussetzung $C = 0$ nach (4) gebunden sind.

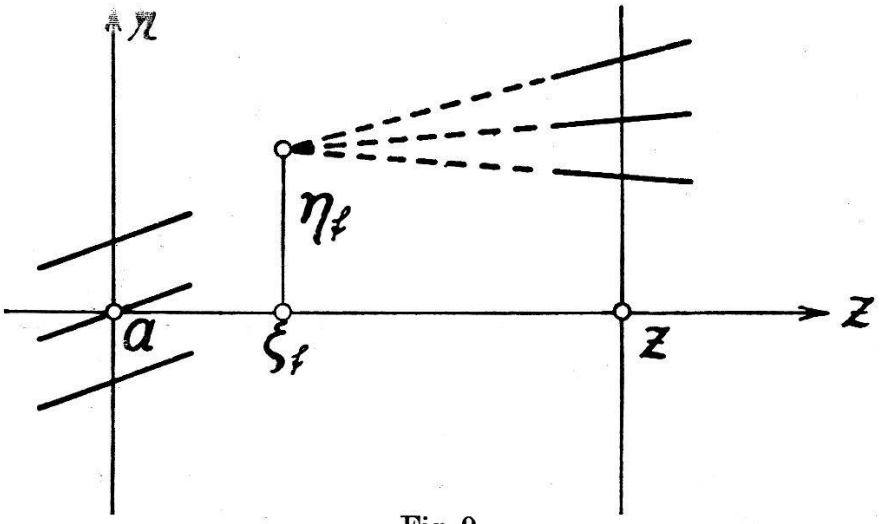

Fig. 9.

Zu einer Ebene z ($p_k < z < t_k$) gehört eine virtuelle Brennebene $z = \zeta_f$, in der sich Bahnen gleicher Neigung durch die Ebene $z = a$ in einem Punkte ζ_f, η_f vereinigen.

7. Wirkt das Potentialfeld nur innerhalb eines beschränkten Bereiches der (r,z)-Ebene, d. h. setzen wir voraus, dass das Potential etwa ausserhalb der Ebenen $z = \alpha$ und $z = \beta$ (Fig. 10) als konstant betrachtet werden kann ($z < \alpha$, $n = n_\alpha = \text{const.}$, $P(z) = 0$; $z > \beta$, $n = n_\beta = \text{const.}$, $P(z) = 0$), so verlaufen die Bahnen ausserhalb des Feldbereichs geradlinig. Wir betrachten im feldfreien Raum $z < \alpha$ einen Punkt ζ, η und ein von ihm ausgehendes paraxiales Strahlenbüschel; setzen wir jede Gerade dieses Büschels von ihrem Durchstosspunkt mit der Ebene $z = \alpha$ an in einer Bahnkurve mit gleicher Tangente bei $z = \alpha$ durch den Feldbereich bis zur Ebene $z = \beta$ fort und von $z = \beta$ an in einer Geraden, welche die betreffende Bahnkurve im Durchstosspunkt durch die Ebene $z = \beta$ berührt, so zeigt

sich, dass sich die Gesamtheit aller solcher Geraden wieder in einem Punkt $\bar{\zeta}, \bar{\eta}$ vereinigt, welcher als (reeller oder virtueller) Bildpunkt des Objektpunktes ζ, η anzusehen ist. Weiterhin zeigt sich, dass zwischen den Koordinaten des Objekt- und des Bildpunktes kollineare Beziehungen bestehen; daher haben in diesem Fall alle bekannten Sätze und Eigenschaften der GAUSS'schen Dioptrik Geltung, wie sie aus der Lichtoptik für Linsensysteme bekannt sind.

Ein von ζ, η ausgehendes Geradenbüschel genügt der Gleichung

$$r(z) = \eta + r'(\alpha)\,(z - \zeta)\,.$$

An der Stelle $z = \alpha$ gilt daher

$$r(\alpha) = \eta + r'(\alpha)\,(\alpha - \zeta)\,. \tag{43}$$

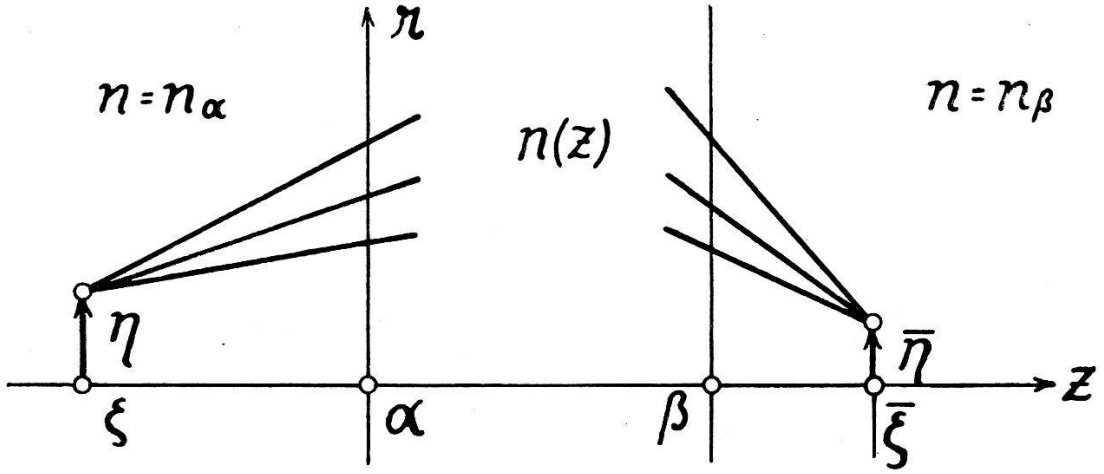

Fig. 10.

Abbildung durch eine zwischen den Ebenen $z = \alpha$ und $z = \beta$ wirksame Elektronenlinse, wenn sich Objekt und Bild im feldfreien Raum befinden.

Für $\alpha < z < \beta$ gelten die Bahngleichungen nach (12) mit $a = \alpha$:

$$\begin{aligned} r(z) &= r(\alpha)\, r_1(z) + r'(\alpha)\, r_2(z) \\ r'(z) &= r(\alpha)\, r_1'(z) + r'(\alpha)\, r'_2(z)\,. \end{aligned} \tag{44}$$

An der Stelle $z = \beta$ folgt daraus

$$\begin{aligned} r(\beta) &= r(\alpha)\, r_1(\beta) + r'(\alpha)\, r_2(\beta) \\ r'(\beta) &= r(\alpha)\, r_1'(\beta) + r'(\alpha)\, r_2'(\beta)\,. \end{aligned} \tag{45}$$

Soll sich das Büschel der geradlinigen Fortsetzungen der Bahnkurven über die Ebene $z = \beta$ hinaus in einem Punkt $\bar{\zeta}, \bar{\eta}$ vereinigen, so bedingt dies analog (43)

$$r(\beta) = \bar{\eta} + r'(\beta)\,(\beta - \bar{\zeta})\,. \tag{46}$$

Aus (43), (45) und (46) gewinnt man nach kurzer Rechnung

$$\beta - \bar{\zeta} = \frac{r_2(\beta) + r_1(\beta)\,(\alpha - \zeta)}{r_2'(\beta) + r_1'(\beta)\,(\alpha - \zeta)} \tag{47}$$

$$\bar{\eta} = \eta\,[r_1(\beta) - r_1'(\beta)\,(\beta - \bar{\zeta})], \tag{48}$$

d. h. eine kollineare Beziehung zwischen $\bar{\zeta}, \bar{\eta}$ und ζ, η. Führt man in bekannter Weise an Stelle von $\zeta, \bar{\zeta}$ als neue Koordinaten die Abstände x und $\bar{x}$ von den „Brennpunkten" ζ_F und $\bar{\zeta}_F$ ein durch $x = \zeta - \zeta_F$ und $\bar{x} = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_F$, wobei der „Brennpunkt" ζ_F das Bild von $\bar{\zeta} = \infty$ bzw. $\bar{\zeta}_F$ das Bild von $\zeta = \infty$ ist, so folgt aus (47)

$$\alpha - \zeta_F = -\frac{r_2'(\beta)}{r_1'(\beta)} \quad \text{und} \quad \beta - \bar{\zeta}_F = \frac{r_1(\beta)}{r_1'(\beta)} \tag{49}$$

und damit aus (47) und (48) nach kurzer Rechnung mit (22)

$$x\bar{x} = \frac{r_2(\beta)\,r_1'(\beta) - r_1(\beta)\,r_2'(\beta)}{[r_1'(\beta)]^2} = -\frac{n(\alpha)}{n(\beta)}\,\frac{1}{[r_1'(\beta)]^2}$$

$$\frac{\bar{\eta}}{\eta} = r_1'(\beta)\,\bar{x}\,.$$

Die bekannten Abbildungsgleichungen der GAUSS'schen Dioptrik

$$x\bar{x} = f\bar{f} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{\eta}}{\eta} = \frac{f}{x} = \frac{\bar{x}}{\bar{f}} \tag{50}$$

ergeben sich daher mit Einführung der „Brennweiten" f und $\bar{f}$ durch[1])

$$f = -\frac{n(\alpha)}{n(\beta)}\,\frac{1}{r_1'(\beta)} = -\sqrt{\frac{\Phi_\alpha}{\Phi_\beta}}\,\frac{1}{r_1'(\beta)} \tag{51}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{r_1'(\beta)} \tag{52}$$

mit der Beziehung

$$\frac{f}{\bar{f}} = -\frac{n(\alpha)}{n(\beta)} = -\sqrt{\frac{\Phi_\alpha}{\Phi_\beta}}\,. \tag{53}$$

Die Lage der Hauptebenen $z = \zeta_H$ bzw. $z = \bar{\zeta}_{\bar{H}}$ folgt mit $x_H = \zeta_H - \zeta_F = f$ bzw. $\bar{x}_{\bar{H}} = \bar{\zeta}_{\bar{H}} - \bar{\zeta}_F = \bar{f}$ aus (49), (51) und (52) zu

$$\begin{aligned} \zeta_H - \alpha &= \frac{1}{r_1'(\beta)}\left(r_2'(\beta) - \sqrt{\frac{\Phi_\alpha}{\Phi_\beta}}\right) \\ \bar{\zeta}_{\bar{H}} - \beta &= \frac{1}{r_1'(\beta)}\,(1 - r_1(\beta)). \end{aligned} \tag{54}$$

---

[1]) Man beachte, dass hier für r_1 bzw. r_2 die Anfangsbedingungen (11) mit $a = \alpha$ gelten.

Die Lage der Knotenebenen (ζ_K, $\bar{\zeta}_{\bar{K}}$) folgt nach Definition für ein Angularverhältnis 1 mit (25a) und (50) aus

$$A = \frac{\operatorname{tg} u_{\bar{\zeta}}}{\operatorname{tg} u_{\zeta}} = \frac{\eta}{\bar{\eta}} \sqrt{\frac{\Phi_{\zeta}}{\Phi_{\bar{\zeta}}}} = \frac{x}{f} \sqrt{\frac{\Phi_{\alpha}}{\Phi_{\beta}}} = \frac{\bar{f}}{\bar{x}} \sqrt{\frac{\Phi_{\alpha}}{\Phi_{\beta}}} = 1$$

zu

$$\begin{aligned} \zeta_K - \alpha &= \frac{1}{r_1'(\beta)} \left(r_2'(\beta) - 1\right) \\ \bar{\zeta}_{\bar{K}} - \beta &= \frac{1}{r_1'(\beta)} \left(\sqrt{\frac{\Phi_{\alpha}}{\Phi_{\beta}}} - r_1(\beta) \right). \end{aligned} \tag{55}$$

Für $\Phi_\alpha = \Phi_\beta$ fallen Hauptebenen und Knotenebenen paarweise zusammen.

Da das Objekt bei den obigen Betrachtungen im feldfreien Raum ($B_a = 0$) angenommen wird, ist die Bedingung $C = 0$ nach (4) für Bahnen, die nicht windschief zur Achse verlaufen, erfüllt.

Es versteht sich daraus, dass alle von der Lichtoptik her bekannten Eigenschaften der Gauss'schen Dioptrik in der Elektronenoptik Geltung haben, wenn Objekt- und (reelle) Bildpunkte in Räumen konstanten Potentials liegen. Wir bemerken noch, dass aus (51) unter Beachtung der Fig. 1 anschaulich hervorgeht, dass bei einem solchen Verlauf von r_1 „kurze" Linsen stets eine positive Brennweite haben, da $r_1'(\beta)$ im Bereich $a < z < t_1$ negativ ist. Ist die Linse „länger" als $(t_1 - a)$, so wirkt sie als Linse negativer Brennweite f im Bereich $t_1 < z < t_2$ usw., unter der Voraussetzung natürlich, dass das Objekt ausserhalb des Feldbereiches liegt.

8. Alle bisherigen Betrachtungen galten, wie unter 1. erwähnt, für den Fall $C = 0$, d. h. dass die Anfangstangente der Bahn in einer die Achse enthaltenden Ebene liegt und am Ausgangspunkt der Bahn das magnetische Feld verschwindet, wobei als „Ausgangspunkt" natürlich irgendein Punkt der Bahn angesehen werden kann. Ohne Einschränkung galten die Betrachtungen für Achsenstrahlen wegen $C = 0$ für $r_a = 0$. Wir kommen nun auf den Fall $C \neq 0$ zurück und wollen zusehen, welcher Teil der oben erhaltenen Ergebnisse auch ohne die durch $C = 0$ bedingten Einschränkungen gilt. Führt man in (1) und (2) neue Variable ϱ und χ an Stelle von z und φ ein durch[1])

$$\varrho = r e^{i\chi} \tag{56}$$

$$\chi = \varphi - \sqrt{\frac{e}{8m}} \int_a^z \frac{B}{\sqrt{\Phi}}\, dz \tag{57}$$

[1]) Vgl. Brüche-Scherzer, Geometrische Elektronenoptik (1934), S. 117.

so erhält man nach kurzer Rechnung folgende Differentialgleichungen für ϱ und χ:

$$\frac{d\chi}{dz} = \sqrt{\frac{e}{2\,m\,\Phi}}\,\frac{C}{\varrho^2}\,e^{2i\chi} \tag{58}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\sqrt{\Phi}\,\frac{d\varrho}{dz}\right) = P(z)\cdot\varrho\,. \tag{59}$$

Die Differentialgleichung (59) für ϱ besitzt die gleiche Form, wie die ursprüngliche Differentialgleichung (1) für r mit $C = 0$; wählt man daher analog zu (12) zur Darstellung von ϱ die (reellen) Integrale ϱ_1 und ϱ_2 mit folgenden Anfangswerten an der Stelle $z = a$:

$$\begin{aligned} z = a:\quad & \varrho_1(a) = 1 \qquad & \varrho_2(a) = 0 \\ & \varrho'_1(a) = 0 \qquad & \varrho_2'(a) = 1\,, \end{aligned} \tag{60}$$

so gilt

$$\begin{aligned} \varrho(z) &= \varrho(a)\,\varrho_1(z) + \varrho'(a)\,\varrho_2(z) \\ \varrho'(z) &= \varrho(a)\,\varrho_1'(z) + \varrho'(a)\,\varrho'_2(z)\,. \end{aligned} \tag{61}$$

Liegt der Ausgangspunkt der Bahn in der Ebene $z = a$, so ist mit (57) $\chi(a) = \varphi(a) = 0$ und damit nach (56) $\varrho(a) = r(a)$. Mit (57) und (58) erhält man $\varrho'(a)$ und damit nach (61)

$$\varrho(z) = r(a)\,\varrho_1(z) + \left[r'(a) + i\,r(a)\left(\varphi'(a) - \sqrt{\frac{e}{8\,m}}\,\frac{B_a}{\sqrt{\Phi_a}}\right)\right]\varrho_2(z)\,. \tag{62}$$

Die Nullstellen von $\varrho_2(z)$ seien durch $z = b_k$ gegeben. Dann gilt dort

$$\varrho(b_k) = r(a)\cdot\varrho_1(b_k)\,. \tag{63}$$

Da $\varrho_1(b_k)$ reell ist, wird $\varrho(b_k)$ reell und daher $\chi(b_k) = 0$. Es folgt aus (63)

$$r(b_k) = r(a)\cdot\varrho_1(b_k)\,. \tag{64}$$

In den Ebenen $z = b_k$ entsteht nach analogen Überlegungen wie unter 3. I) ein reelles Bild auch im Fall $C \neq 0$. Damit bleiben die Überlegungen von 3. I) erhalten, *nicht* dagegen von 3. II) bis IV). Die letzteren gelten daher nur bei $C = 0$, d. h. jedenfalls in rein elektrischen Linsen für Bahnen, die nicht windschief zur Achse verlaufen.

Der *Lagrange-Helmholtz'sche Satz* (25) gilt nach Vorstehendem in voller Allgemeinheit: Aus (59) folgt nämlich in Analogie zur (22):

$$\varrho_1(b_k)\,\varrho_2'(b_k) - \varrho_2(b_k)\,\varrho_1'(b_k) = \sqrt{\frac{\Phi_a}{\Phi_{b_k}}}\,. \tag{65}$$

*

Mit $\varrho_2(b_k) = 0$ am Ort eines reellen Bildes in der Ebene $z = b_k$ ist nach (64)

$$\varrho_1(b_k) = \frac{r(b_k)}{r(a)}$$

und für einen Achsenstrahl ($r(a) = 0$) mit (62) und $\chi = 0$ ($C = 0$):

$$\varrho'(b_k) = r'(a)\,\varrho_2'(b_k) = r'(b_k)$$

d. h.:

$$\varrho_2'(b_k) = \frac{r'(b_k)}{r'(a)} = \frac{\operatorname{tg} u_{b_k}}{\operatorname{tg} u_a},$$

womit nach (65) mit $\varrho_2(b_k) = 0$ wieder der Lagrange-Helmholtz'sche Satz

$$\sqrt{\Phi_a}\, r_a \operatorname{tg} u_a = \sqrt{\Phi_{b_k}}\, r_{b_k} \operatorname{tg} u_{b_k} \tag{66}$$

auch im allgemeinen Fall $C \neq 0$ resultiert.

9. Alle vorstehenden Überlegungen folgen im wesentlichen aus der Differentialgleichung (5). Sie gelten daher ausser im axialsymmetrischen Fall, den wir hier zugrunde gelegt haben, auch in allen jenen Fällen, in denen sich die Bahngleichungen in der Umgebung einer ausgezeichneten Bezugsbahn in die Form einer linearen, homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung bringen lassen[1]). An die Stelle der Koordinate r tritt dann die Koordinate der Abweichung von der Bezugsbahn und an Stelle von dz das Bahnelement ds längs der Bezugsbahn.

Der entsprechende lichtoptische Fall wäre für die paraxiale Lichtausbreitung in einem isotropen Medium gegeben, dessen Brechungsindex N in der Umgebung der z-Achse durch die Entwicklung

$$N(z,r) = n(z) + P(z) \cdot \frac{r^2}{2} + \cdots$$

dargestellt wird. Aus der Euler'schen Differentialgleichung des Variationsproblems $\delta \int N\, ds = 0$ ergibt sich für achsennahe geometrisch-optische Bahnen die Differentialgleichung (5) [2]).

Die behandelte Dioptrik der Elektronenbahnen setzt stillschweigend überall positive Werte des Potentials $\Phi(z)$ bzw. $n(z)$ voraus; an einer Nullstelle des Potentials wird die Elektronengeschwindigkeit Null, und es findet (wenn die Nullstelle nicht gerade mit einem Sattelpunkt zusammenfällt) eine Bahnumkehr zu rückläufiger Bewegung statt. Die der Differentialgleichung (5) zugrundeliegende

---

[1]) z. B. Kreisbahn im Magnetfeld.

[2]) Über die Abweichung von den „wellenoptischen Bahnen" vgl. z. B. R. Gans, Ann. d. Phys. **47**, 709 (1915).

Voraussetzung $r'^2 \ll 1$ ist in der Umgebung des Umkehrpunktes ($r' = \infty$) ungültig, weshalb die Anwendung auf die Katoptrik (Elektronenspiegel) zunächst unzulässig erscheint. Aus einer genaueren Untersuchung von RECKNAGEL[1]) geht jedoch hervor, dass die Differentialgleichung (1) als brauchbare Beschreibung der paraxialen Bahnbewegung beim Elektronenspiegel ($B = 0$) angesehen werden kann. Sieht man von diesem Standpunkt aus die Bahnen beim Elektronenspiegel als durch den Umkehrpunkt stetig hindurchgehende Lösungen von (5) an, so lassen sich die obigen Betrachtungen sinngemäss auch zur Beschreibung der Abbildungsverhältnisse beim Elektronenspiegel heranziehen.

---

[1]) A. RECKNAGEL, Z. f. Phys. **104**, S. 381 (1937).