Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 21 (1948)

Heft: III-IV

Artikel: La méthode des perturbations en théorie des champs quantifiés et la construction de la matrice S de Heisenberg

Autor: Pirenne, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111905

La méthode des perturbations en théorie des champs quantifiés et la construction de la matrice S de Heisenberg

par **Jean Pirenne.**

(24. V. 1948.)

Si la théorie de la matrice S de Heisenberg permet, en principe, d'éviter les difficultés de divergences de la théorie des champs quantifiés, en revanche aucune méthode satisfaisante n'a été développée jusqu'ici pour construire cette matrice. Stueckelberg et Heitler ont cherché à la déduire de la théorie hamiltonnienne par la méthode des perturbations. Comme on sait, tous les termes des développements ainsi obtenus divergent au delà du premier terme convergent non nul; on est alors amené à supprimer ou à modifier ces termes de telle façon que l'unitarité de S ne soit pas altérée. Nous ne nous occuperons pas ici des difficultés soulevées par l'élimination de ces divergences.

Par contre, on peut se demander quel rôle joueraient ces termes si l'on écartait à priori toute divergence en donnant une extension finie aux particules (ce qui rend évidemment la théorie non relativiste). Or, il se fait que les formules de perturbation habituelles ne sont pas applicables à ce genre de problème où l'émission et l'absorption virtuelles de particules donnent lieu à des self-énergies qu'on n'a pas fait intervenir de façon rationnelle dans le calcul.

La présente note a précisément pour but d'établir la théorie des perturbations de façon conséquente dans le cas particulier suivant: celui de la diffusion de mésons ponctuels par un nucléon étendu. Nous supposerons qu'il n'y a pas d'antinucléon et que les mésons ont un spin entier, de sorte que le processus élémentaire d'interaction entre méson et nucléon est l'émission ou l'absorption d'un *seul* méson par le nucléon (la théorie des paires n'est donc pas envisagée ici). Nous admetterons enfin que les mésons ont une masse finie, les développements suivant le paramètre de couplage n'étant pas appropriés au cas de mésons de masse nulle (photons) où ils donnent lieu à la difficulté infra-rouge.

2°. — Soient H_0 l'hamiltonien «non perturbé» représentant l'énergie du nucléon et des mésons, en l'absence d'interaction mutuelle, et H cette interaction.

Dans une représentation où H_0 est diagonal, l'équation de Schrödinger

$$(H_0 + H)\, \Phi = E\, \Phi \tag{1}$$

peut s'écrire

$$(E - E_k)\,(k\,|\Phi|\,0) = \sum_l (k\,|H|\,l)\,(l\,|\Phi|\,0). \tag{2}$$

E_k est la valeur propre de H_0 correspondant à l'état non perturbé k et $(k\,|\Phi|\,0)$ la fonction d'onde se réduisant, en l'absence de perturbation, à la fonction propre δ_{k0} qui caractérise un ensemble de particules libres d'énergie totale E_0.

Il est très important de remarquer que $E \neq E_0$. En effet, la présence de l'interaction H ne fait pas seulement apparaître une onde diffusée; elle a également pour effet de douer les nucléons d'un champ propre, auquel correspond une certaine self-énergie, finie pour un modèle étendu. On a donc

$$E = E_0' = E_0 + \Delta E_0. \tag{3}$$

De même, si les particules sont diffusées de l'état 0 vers l'état k, elles n'auront pas finalement l'énergie E_k, mais bien

$$E_k' = E_k + \Delta E_k'. \tag{4}$$

La fonction d'onde peut donc s'écrire sous la forme:

$$(k\,|\Phi|\,0) = \delta_{k0} + (k\,|f|\,0)\left[\frac{1}{E_0' - E_k'} - i\pi\,\delta\,(E_0' - E_k')\right] \tag{5}$$

δ_{k0} représentant l'onde incidente, le second terme doit correspondre uniquement à une onde émergente (*outgoing wave*). Il en sera effectivement ainsi grâce à la présence de la fonction

$$\delta_+\,(E_0' - E_k') = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{E_0' - E_k'} - i\pi\,\delta\,(E_0' - E_k')\right], \tag{6}$$

à la *condition* toutefois que l'élément de matrice $(k\,|f|\,0)$ varie continûment avec les états k et 0.

En particulier $(k\,|f|\,0)$ ne doit présenter aucune singularité sur la surface d'énergie $E_k' = E_0'$. Nous exclurons également les singularités qui pourraient se produire en dehors de cette surface au cas où des isobares existeraient.

Nous allons maintenant porter l'expression (5) de $(k\,|\Phi|\,0)$ dans l'équation de Schrödinger, mais, auparavant, il est commode d'écrire celle-ci sous la forme

$$(E_0' - E_k')\,(k\,|\Phi|\,0) = \sum_l (k\,|H'|\,l)\,(l\,|\Phi|\,0), \tag{7}$$

en posant

$$(k\,|H'|\,l) = (k\,|H|\,l) - E_k\,\delta_{k\,l}. \tag{8}$$

Il vient alors:

$$(k\,|f|\,0) = (k\,|H'|\,0) + \sum_l \frac{(k\,|H'|\,l)\,(l\,|f|\,0)}{E_0' - E_l'} - i\pi \sum (k\,|H'|\,l)\,(l\,|\underline{f}|\,0) \tag{9}$$

avec la notation

$$(k\,|\underline{f}|\,0) = (k\,|f|\,0)\;\delta\,(E_0' - E_k'). \tag{10}$$

En posant ensuite

$$(k\,|T'|\,l) = \frac{(k\,|H'|\,l)}{E_0' - E_l'}$$

l'équation de Schrödinger (7) s'écrit sous forme matricielle

$$f = H' + T'\,f - i\,\pi\,H'\,\underline{f} \tag{11}$$

ou encore

$$(1 - T')\,f = H' - i\,\pi\,H'\,\underline{f}. \tag{12}$$

Si la matrice $(1 - T')$ admet un inverse, nous pourrons écrire

$$f = K' - i\,\pi\,K'\,\underline{f} \tag{13}$$

avec

$$K' = (1 - T')^{-1}\,H'. \tag{14}$$

Pour que cette dernière équation détermine effectivement K' il faudrait que nous connaissions les énergies de perturbation ΔE_k, qui interviennent dans H' et T'. Nous montrerons plus loin, par la méthode des perturbations, qu'il suffit pour cela d'imposer la condition que $(k\,|K'|\,0)$ ne présente pas de singularité $\delta_{k\,0}$. Il résulte d'ailleurs immédiatement de l'équation (13) que cette condition est nécessaire car f ne présente, par hypothèse, aucune singularité. On verra de plus que cette simple condition suffit pour écarter toute autre espèce de singularité, pour autant que la convergence de la méthode des perturbations soit assurée. $(k\,|K'|\,0)$ est donc continu au voisinage de la surface d'énergie $E_k' = E_0'$.

En multipliant alors les deux membres de (13) par $\delta\,(E_0' - E_k')$, il vient

$$\underline{f} = \underline{K'} - i\,\pi\,\underline{K'}\,\underline{f}. \tag{15}$$

Cette équation se distingue essentiellement de l'équation intégrale de Heitler par la substitution de H' à H, laquelle correspond à l'introduction rationnelle de l'énergie de perturbation. Cette substitution n'altère pas le passage bien connu de cette équation intégrale à la matrice S de Heisenberg que l'on peut écrire

$$S = \frac{\underline{1} - i\,\pi\,\underline{K'}}{\underline{1} + i\,\pi\,\underline{K'}}. \tag{16}$$

3⁰. — Il s'agit maintenant de construire la matrice K'. A cette fin, il est commode d'en mettre la formule de définition (14) sous la forme

$$K' - T' K' = H'. \tag{17}$$

D'autre part, nous n'envisagerons plus à partir d'ici que le cas d'un nucléon infiniment lourd, les calculs devenant beaucoup plus compliqués dans le cas où il y aurait lieu de tenir compte du recul du nucléon.

Dans ce cas particulier, tous les ΔE_k sont égaux et l'on a simplement

$$E_0' - E_k' = E_0 - E_k. \tag{18}$$

L'équation (17) s'écrit alors

$$(k \mid K' \mid 0) = (k \mid H' \mid 0) + \sum_l \frac{(k \mid H' \mid l)\,(l \mid K' \mid 0)}{E_0 - E_l} \tag{19}$$

ou, plus explicitement,

$$(k \mid K' \mid 0) = (k \mid H \mid 0) + \sum_l \frac{(k \mid H \mid l)\,(l \mid K' \mid 0)}{E_0 - E_l}$$
$$- \Delta E \frac{(k \mid K' \mid 0)}{E_0 - E_k} - \Delta E\, \delta_{k0}. \tag{20}$$

Pour résoudre cette équation intégrale, nous employons la méthode des perturbations, en admettant, pour la simplicité, que le terme perturbateur H ne contient le paramètre de couplage qu'au premier ordre. Nous écrivons comme suit les développements de K' et ΔE suivant les puissances croissantes du paramètre de couplage:

$$K' = K'^{(1)} + K'^{(2)} + K'^{(3)} + \cdots \tag{21}$$
$$\Delta E = \Delta E^{(2)} + \Delta E^{(4)} + \Delta E^{(6)} + \cdots \tag{22}$$

Le développement de ΔE ne fait évidemment intervenir que des puissances paires.

Portant ces développements dans (20) et égalant les termes du même ordre, nous obtenons, de façon purement formelle,

$$(k \mid K'^{(1)} \mid 0) = (k \mid H \mid 0) \tag{18a}$$

$$(k \mid K'^{(2)} \mid 0) = \sum_l \frac{(k \mid H \mid l)\,(l \mid K'^{(1)} \mid 0)}{E_0 - E_l} - \delta_{k0} \Delta E^{(2)} \tag{23b}$$

$$(k \mid K'^{(3)} \mid 0) = \sum_l \frac{(k \mid H \mid l)\,(l \mid K'^{(2)} \mid 0)}{E_0 - E} - \Delta E^{(2)} \frac{(k \mid K'^{(1)} \mid 0)}{E_0 - E_k} \tag{23c}$$

$$(k \mid K'^{(4)} \mid 0) = \sum_l \frac{(k \mid H \mid l)\,(l \mid K'^{(3)} \mid 0)}{E_0 - E} - \Delta E^{(2)} \frac{(k \mid K'^{(2)} \mid 0)}{E_0 - E_k} - \delta_{k0} \Delta E^{(4)} \tag{23d}$$

. . . .

$(k\,|K'^{(1)}|\,0)$ étant simplement égal à l'interaction $(k\,|H|\,0)$ est dépourvu de singularité par hypothèse.

Il n'en est plus de même de $(k\,|K'^{(2)}|\,0)$. En effet, la somme

$$\sum_{l} \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{E_0 - E_l} \tag{24}$$

qui intervient au second membre de (23b) correspond à deux processus différents:

1⁰ l'absorption de l'un des mésons existant dans l'état initial 0 suivie de l'émission d'un méson, différent ou non du premier suivant que l'état final k est différent ou non de l'état initial 0;

2⁰ l'émission d'un méson suivie de la réabsorption de ce même méson.

Ce dernier processus n'intervient que si les états k et 0 sont identiques et il y a alors à considérer une infinité d'états intermédiaires, contrairement à ce qui se passe lors du premier processus. La somme (24) contient donc la singularité

$$\delta_{k0} \sum_{l} \frac{(0\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{E_0 - E_k}. \tag{25}$$

La somme (25) ne doit correspondre qu'aux transitions suivant le second processus; nous ne l'indiquons pas explicitement pour simplifier l'écriture; une confusion n'aurait d'ailleurs guère d'importance: si l'on tenait compte des transitions $0 \to k \to 0$ suivant le premier processus on n'apporterait ainsi qu'une contribution infiniment petite, le nombre d'états intermédiaires étant fini dans ce cas.

Pour compenser cette singularité, il faut poser

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{l} \frac{(0\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{E_0 - E_l}. \tag{26}$$

L'équation (18c) conduit alors à une expression $(k\,|K'^{(3)}|\,0)$ dépourvue de singularité; le dernier terme du second membre ne donne pas lieu à un pôle car $(k\,|H|\,0)$ n'est différent de zéro que lorsque $|E_k - E_0| \geqq \mu$ (masse du méson).

A partir de (23d) les choses se compliquent car $(k\,|K'^{(2)}|\,0)$ n'est généralement pas nul pour $E_k = E_0$; par suite, le deuxième terme de $(k\,|K'^{(4)}|\,0)$, à savoir

$$\Delta E^{(2)} \frac{(k\,|K'^{(2)}|\,0)}{E_0 - E_k}, \tag{27}$$

donne effectivement lieu à un pôle. Or il se fait que ce pôle est compensé par un autre pôle contenu dans le premier terme, qui s'écrit, compte tenu de (23c),

$$\sum_{l,m} \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,m)\,(m\,|K'^{(2)}|\,0)}{(E_0 - E_l)\,(E_0 - E_m)} - \Delta E^{(2)} \sum_{l} \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{(E_0 - E_l)^2}. \tag{28}$$

Lorsqu'on effectue la sommation sur m il y a lieu de distinguer l'état $m = k$, car celui-ci seul amène à considérer des transitions $m \to l \to k$ correspondant à l'émission suivie de l'absorption d'un méson. Pour $m = k$, il y a donc une infinité d'états intermédiaires, contrairement à ce qui arrive lorsque $m \neq k$. Ainsi, le premier terme de (28) contient le pôle

$$\sum_l \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,k)}{E_0 - E_l} \cdot \frac{(k\,|K'^{(2)}|\,0)}{E_0 - E_k}. \tag{29}$$

Or la différence

$$\frac{1}{E_0 - E_k}\left[\sum_{l'} \frac{(k\,|H|\,l')\,(l'\,|H|\,k)}{E_0 - E_{l'}} - \sum_l \frac{(0\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{E_0 - E_l}\right] \tag{30}$$

des expressions (27) et (28) est finie. Pour le voir, il suffit de grouper les termes l et l' tels que les transitions $0 \to l$ et $k \to l'$ se rapportent à l'émission d'un même méson. On a alors

$$(k\,|H|\,l')\,(l'\,|H|\,k) = (0\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0) \tag{31a}$$

et

$$E_k - E_{l'} = E_0 - E_l \tag{31b}$$

de sorte que l'expression (30) devient simplement

$$-\sum_l \frac{(0\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{(E_0 - E_l)\,(E_k - E_l)}. \tag{32}$$

L'ensemble des deux premiers termes de $(k\,|K'^{(4)}|\,0)$ (équ. 23d) ne possède donc pas de pôle, mais il présente une singularité δ_{k0} due, comme précédemment, à la possibilité d'émission et de réabsorption des mêmes mésons, lorsque les états k et 0 sont identiques. On compense aisément cette singularité en donnant une valeur convenable à $\Delta E^{(4)}$.

En continuant de la sorte, on trouve les formules de récurrence suivantes:

$$(k\,|K^{(n)}|\,0) = \sum_l \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|K'^{(n-1)}|\,0)}{E_0 - E_l} - \frac{1}{(E_0 - E_k)} \times \sum_{1 \leq p < \frac{n}{2}} \Delta E^{(2p)}\,(k\,|K'^{(n-2p)}|\,0) \tag{33a}$$

$$\Delta E^{(n)} = (0\,|K'^{(n)}|\,0) \tag{33b}$$

$$(k\,|K'^{(n)}|\,0) = (k\,|K^{(n)}|\,0) - \delta_{k0}\,\Delta E^{(n)}. \tag{33c}$$

On se rend compte aisément que les $(k\,|K^{(n)}|\,0)$ ne présentent de singularité δ_{k0} que pour n pair; en effet, un nombre impair d'émissions et d'absorptions de mésons ne permet jamais de réaliser la transition identique $0 \to 0$ et, d'autre part, $(k\,|K^{(n)}|\,0)$ est la somme de termes où interviennent n, $n-2$, $n-4$, ... transitions.

A toutes fins utiles, voici les expressions complètes des quatre premiers $(k\,|K'^{(n)}|\,0)$:

$$(k\,|K'^{(1)}|\,0) = (k\,|H|\,0) \tag{34a}$$

$$(k\,|K'^{(2)}|\,0) = \sum_l{}' \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{E_0 - E_l} \tag{34b}$$

$$\begin{aligned}(k\,|K'^{(3)}|\,0) = {} & \sum_{l,\,m} \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,m)\,(m\,|H|\,0)}{(E_0 - E_l)\,(E_0 - E_m)} \\ & - \frac{(k\,|H|\,0)}{E_0 - E_k} \sum_m \frac{(0\,|H|\,m)\,(m\,|H|\,0)}{E_0 - E_m}\end{aligned} \tag{34c}$$

$$\begin{aligned}(k\,|K'^{(4)}|\,0) = {} & \sum_{l,\,m \neq 0,\,n}{}' \frac{(k\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,m)\,(m\,|H|\,n)\,(n\,|H|\,0)}{(E_0 - E_l)\,(E_0 - E_m)\,(E_0 - E_n)} \\ & - \sum_l \frac{(0\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{(E - E_l)} \cdot \sum_m{}' \frac{(k\,|H|\,m)\,(m\,|H|\,0)}{(E_0 - E_m)^2} \\ & - \sum_l \frac{(0\,|H|\,l)\,(l\,|H|\,0)}{(E - E_l)^2} \cdot \sum_m{}' \frac{(k\,|H|\,m)\,(m\,|H|\,0)}{(E_0 - E_m)}\,.\end{aligned} \tag{34d}$$

Le signe Σ' signifie que les processus qui interviendraient seulement si $k=0$ ne doivent jamais être considérés, même si $k=0$.

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à M. W. Pauli pour l'intérêt qu'il a porté à ce problème dont il m'avait suggeré l'étude. Je remercie également M. R. Jost pour de fructueuses discussions.

Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.