

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 21 (1948)  
**Heft:** I

**Artikel:** Berechnung eines Spiral-Beschleunigers für schwere Teilchen  
**Autor:** Dällenbach, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111895>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Berechnung eines Spiral-Beschleunigers für schwere Teilchen

von W. Dällenbach.

(20. XI. 1947.)

Von den in zwei vorläufigen Mitteilungen<sup>1)</sup> beschriebenen Beschleunigern — sie sollen in Zukunft als Spiral-Beschleuniger (spiral accelerators) bezeichnet werden — sei in der Folge die Type für schwere Teilchen mit zwei Beschleunigungen je Umlauf betrachtet, bei welcher also die Teilchen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beschleunigungen Leitkanäle durchlaufen, die über Halbkreise geführt sind. Es handelt sich insbesondere um die Berechnung des Magnetsystems zur Erregung des zeitlich konstanten Führungsfeldes in den insgesamt  $n$  Leitkanälen und des Hohlraumresonators zur Erzeugung der beschleunigenden H. F.-Spannung.

## I. Die Grundgleichungen.

Nach der  $v$ ten Beschleunigung, also im Innern des  $v$ ten Leitkanals läuft das ungestörte synchrone Teilchen im magnetischen Führungsfeld der Induktion  $B_v$  auf einem Kreis, dessen Radius gegeben ist durch

$$r_v = \frac{mc}{eB_v} (z_v^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad [\text{cm}] . \quad (1)$$

Darin sind  $B_v$  in [ $\text{V cm}^{-2} \text{ sec}$ ], das Verhältnis  $e/m$  der Ladung zur Masse des Teilchens in [ $\text{V}^{-1} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ ] und  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ [cm sec}^{-1}\text{]}$  einzusetzen. Die spezifische Teilchenenergie  $z_v$  bedeutet das Verhältnis der Energie zur Ruhenergie des Teilchens. Werden die Laufzeiten über die Beschleunigungsstrecken vernachlässigt, so ist die einem vollen Umlauf entsprechende Wellenlänge  $\lambda$  der beschleunigenden Wechselspannung

$$\lambda = 2\pi \frac{mc}{eB_v} z_v \quad [\text{cm}] . \quad (2)$$

Da  $\lambda$  für alle Leitkanäle gleich, wächst  $B_v$  proportional  $z_v$ :

$$B_v = B_n z_v / z_n . \quad (3)$$

Aus (1), bzw. (2) und (3) ist

$$r_v = \frac{mc}{eB_n} z_n (1 - 1/z_v^2)^{\frac{1}{2}} \quad [\text{cm}] , \quad (4)$$

$$\lambda = 2\pi \frac{mc}{eB_n} z_n \quad [\text{cm}] . \quad (5)$$

Vernachlässigt man Strahlungsverluste der Teilchen, so wächst die Energie des synchronen Teilchens linear mit der Zahl  $n$  der Beschleunigungen, nämlich

$$z_n - 1 = (z_n - 1) n \quad (6)$$

Sind die Teilchensorte, also  $e/m$  und die spezifische Teilchenenergie  $z_n$  in  $n$ ten und letzten Leitkanal gegeben — die Endenergie im austretenden Strahl ist um den Energiezuwachs bei der  $(n+1)$ ten und letzten Beschleunigung, also um den Faktor  $(1 + 1/n)$  grösser —, so hängen nach (3), (4), (5) und (6)  $\lambda$ ,  $r_n$  und  $B_n$  nur noch von den beiden Parametern  $B_n$  und  $n$  ab. Nach der Wahl von  $B_n$  bestimmen (4) den grössten Radius

$$r_n = \frac{mc}{eB_n} z_n (1 - 1/z_n^2)^{\frac{1}{2}} \quad [\text{cm}] \quad (7)$$

und (5) die Wellenlänge  $\lambda$ .

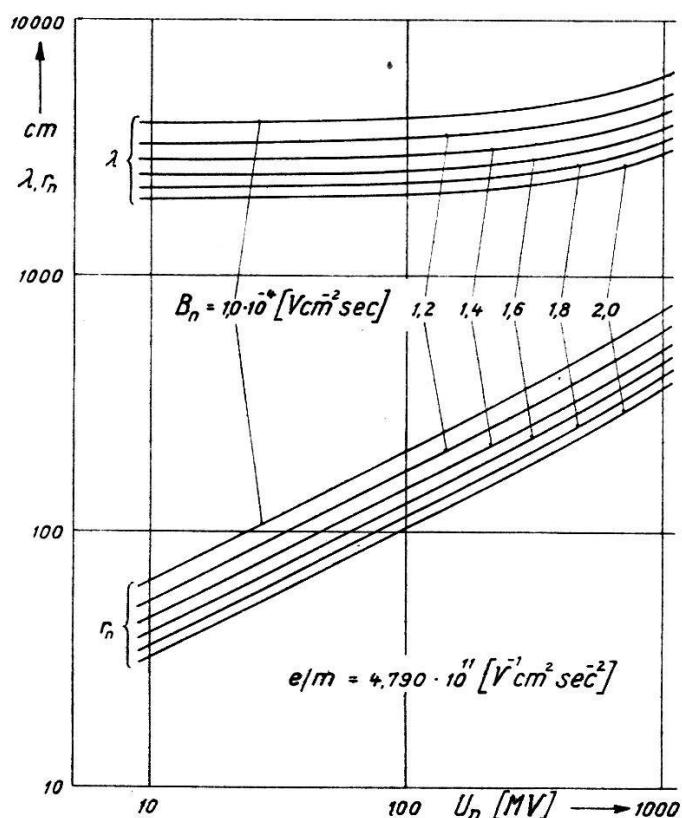


Fig. 1,

Fig. 1 zeigt für Deuteronen mit  $e/m = 4,790 \cdot 10^{11} [\text{V}^{-1} \text{cm}^2 \text{sec}^{-2}]$  und den Parameterwerten

$$10^4 B_n = 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0 \quad [\text{V cm}^{-2} \text{sec}]$$

$r_n$  und  $\lambda$  in Funktion der mit  $z_n$  als gegeben angenommenen Voltgeschwindigkeit  $U_n$  der Teilchen im  $n$ ten Leitkanal, wobei

$$z_n = 1 + eU_n/m c^2 . \quad (8)$$

Da die H. F.-Leistung zur Schwingungserzeugung im Hohlraumresonator einen grösseren wirtschaftlichen Aufwand verlangt als die Gleichleistung zur Erregung des magnetischen Führungsfeldes, kann man erwarten — was die späteren Rechnungen bestätigen —, dass  $n$  möglichst gross gewählt werden muss. Eine obere Grenze für  $n$  setzen der mit Rücksicht auf die Abweichungen der Teilchenbahnen von der Bahn des ungestörten synchronen Teilchens erforderliche Querschnitt der Leitkanäle und deren vom Standpunkt der Wärmeabfuhr noch zulässige konstruktive dichteste Packung. Es sind dafür verschiedene Anordnungen denkbar.

Nach der Wahl von  $n$  folgen aus (6), (4) und (3) die Radien  $r_\nu$  und die magnetischen Induktionen  $B_\nu$  der einzelnen Leitkanäle. Damit kennt man die für den Entwurf des Magnetsystems zur Erregung des zeitlich konstanten Führungsfeldes massgebenden Daten. Aus  $U_n$  bestimmt sich vermöge

$$U_n/n = U \cos \Phi_s \quad (9)$$

der Scheitelwert  $U$  der beschleunigenden Wechselspannung im Spannungsbauch des Hohlraumresonators.  $\Phi_s$  ist die Startphase des synchronen Teilchens. Über deren Wahl vergleiche <sup>2)</sup>. Mit  $U$ ,  $\lambda$  und  $r_n$  sind auch die für den Entwurf des Hohlraumresonators massgebenden wesentlichen Daten bekannt. Die Eigenwellenlänge des Hohlraumresonators kann statt  $\lambda$  auch  $\lambda/3$ , oder  $\lambda/5$ , ... gewählt werden. Ein Teilchen wird dann statt in jeder Halbwelle nur in jeder 3. oder 5. ... Halbwelle der beschleunigenden Wechselspannung beschleunigt.

Der nun folgenden Untersuchung betreffend die obere Grenze von  $n$  wird eine Anordnung Fig. 2 zugrunde gelegt, bei welcher die Leitkanäle in Ebenen senkrecht zur Zeichenebene derart angeordnet sind, dass die die Beschleunigungsstrecken darstellenden Durchstosspunkte der Bahn des ungestörten synchronen Teilchens auf einem Teilkreis vom Radius  $r_n$  liegen. Die Ebene des  $\nu$ ten Leitkanals hat vom Zentrum des Teilkreises den Abstand  $D_\nu$ , wobei

$$D_\nu^2 = r_n^2 - r_\nu^2 . \quad (10)$$

Da räumlich benachbarte Leitkanäle ungefähr in parallelen Ebenen liegen, ist deren Abstand angenähert

$$D_{\nu-1} - D_{\nu+1} = r_n \{ [1 - (r_{\nu-1}/r_n)^2]^{\frac{1}{2}} - [1 - (r_{\nu+1}/r_n)^2]^{\frac{1}{2}} \} . \quad (11)$$

Setzt man aus (4) und (7)  $r_{v-1}/r_n$  und  $r_{v+1}/r_n$  ein und berücksichtigt (6), so erhält man nach einfacher Umformung für das von  $z_n$ ,  $v$  und  $n$  abhängige Verhältnis

$$(D_{v-1} - D_{v+1})/r_n = [1 - (v-1)/n]^{\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + \frac{v-1}{n} \frac{z_n-1}{z_n+1}\right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{v-1}{n} (z_n-1)} \quad (12)$$

$$- [1 - (v+1)/n]^{\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + \frac{v+1}{n} \frac{z_n-1}{z_n+1}\right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{v+1}{n} (z_n-1)} .$$

Für die praktische Konstruktion interessiert der kleinste Wert von  $D_{v-1} - D_{v+1}$ . Es ist die Frage, für welches in den Grenzen

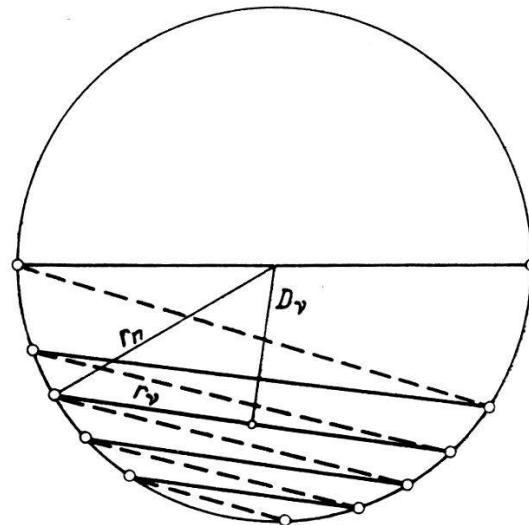


Fig. 2.

$1 < v < n$  liegende  $v$  er auftritt. Um darüber Klarheit zu gewinnen, betrachtet man (10) nach Einsetzen von  $r_v/r_n$  aus (4) und (7):

$$(D_v/r_n)^2 = 1 - (1 - 1/z_v^2)/(1 - 1/z_n^2) . \quad (13)$$

Substituert man

$$\begin{aligned} z_v/z_n &= x \\ \text{und} \quad (z_n^2 - 1)^{\frac{1}{2}} D_v/r_n &= y , \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (14)$$

so wird aus (13)

$$y^2 = 1/x^2 - 1 . \quad (15)$$

Läuft  $x$  von 0 bis 1, so fällt  $y$  monoton von  $\infty$  bis 0. Da nach (6)  $z_v$  und folglich auch  $x$  mit der Nummer  $v$  des Leitkanals linear wachsen, liegen benachbarte Leitkanäle umso dichter, je kleiner

$$|y'| = 1/x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} . \quad (16)$$

Wächst  $x$  von 0 bis 1, so geht  $|y'|$  von  $\infty$  über ein Minimum nach  $\infty$ . Das Minimum von  $|y'|$  liegt bei

$$x = (2/3)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

mit

$$y = (1/2)^{\frac{1}{2}}$$

und beträgt

$$|y'| = 3^{3/2}/2 .$$

Aus (17) und (6) folgt

$$\nu/n = [(2/3)^{\frac{1}{2}} z_n - 1]/(z_n - 1) . \quad (18)$$

Für den Fall  $z_n < (3/2)^{\frac{1}{2}}$  ist  $\nu/n$  negativ. Der kleinste Abstand nach (12) ergibt sich dann für  $\nu = 2$  aus

$$\begin{aligned} \tau = (D_1 - D_3)/r_n &= (1 - 1/n)^{\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + \frac{1}{n} \frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{n}(z_n - 1)} \\ &= (1 - 3/n)^{\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + \frac{3}{n} \frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{3}{n}(z_n - 1)}, \end{aligned} \quad (19)$$

wo das Verhältnis  $\tau$  jetzt nur noch von  $z_n$  und  $n$  abhängt.

Ist dagegen  $z_n > (3/2)^{\frac{1}{2}}$ , so hat man den dem aus (18) gerechneten, nun positiven  $\nu$  nächstgelegenen ganzzahligen  $\nu$ -Wert in (12) einzusetzen, um den kleinsten Abstand  $D_{\nu-1} - D_{\nu+1}$  zu erhalten. Ist der aus (18) gerechnete  $\nu$ -Wert gross gegen  $\frac{1}{2}$ , so begeht man einen nur kleinen Fehler, wenn zur Bestimmung des kleinsten  $D_{\nu-1} - D_{\nu+1}$  direkt  $\nu/n$  aus (18) in (12) eingesetzt wird.

Zu numerischen Rechnungen ist es für  $3(z_n - 1) \ll 1$  praktisch an Stelle von (19) eine Reihenentwicklung zu benutzen:

$$\begin{aligned} \tau = (D_1 - D_3)/r_n &= (1 - 1/n)^{\frac{1}{2}} [1 - (z_n + \frac{1}{2})(z_n - 1)/(z_n + 1) \cdot 1/n \\ &\quad + (z_n^2 + 3z_n/2 + 3/8)(z_n - 1)^{\frac{1}{2}}/(z_n + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 1/n^2 - \dots] \\ &\quad - (1 - 3/n)^{\frac{1}{2}} [1 - (z_n + \frac{1}{2})(z_n - 1)/(z_n + 1) \cdot 3/n \\ &\quad + (z_n^2 + 3z_n/2 + 3/8)(z_n - 1)^{\frac{1}{2}}/(z_n + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 9/n^2 - \dots]. \end{aligned} \quad (20)$$

Ist ferner auch  $3/n \ll 1$ , so wird aus (20) durch weitere Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \tau = (D_1 - D_3)/r_n &= [1 + (2z_n + 1)(z_n - 1)/(z_n + 1)] 1/n \\ &\quad + [1 - 2(2z_n + 1)(z_n - 1)/(z_n + 1) \\ &\quad - (8z_n^2 + 12z_n + 3)(z_n - 1)^2/(z_n + 1)^2] 1/n^2 + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Für den Fall  $z_n > (3/2)^{\frac{1}{2}}$  interessiert eine Reihenentwicklung von (12) nach Potenzen von  $1/n$  für festes  $\nu/n$  entsprechend (18). Man findet dafür unter Vernachlässigung des Termes mit  $(1/n)^3$  und höherer Potenzen von  $1/n$

$$\tau = (D_{\nu-1} - D_{\nu+1})/r_n = \\ (1 - \nu/n)^{\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + \frac{\nu}{n} \frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{\nu}{n} (z_n - 1)} \left\{ \frac{1}{1 - \nu/n} - \frac{(z_n - 1)/(z_n + 1)}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{z_n - 1}{z_n + 1}} + \frac{2(z_n - 1)}{1 + \frac{\nu}{n} (z_n - 1)} \right\} 1/n . \quad (22)$$

Auch hier hängt wie in (19), (20), (21) das Verhältnis  $\tau$  nur noch von  $z_n$  und  $n$  ab, denn  $\nu/n$  ist nach (18) eine Funktion von  $z_n$  allein.

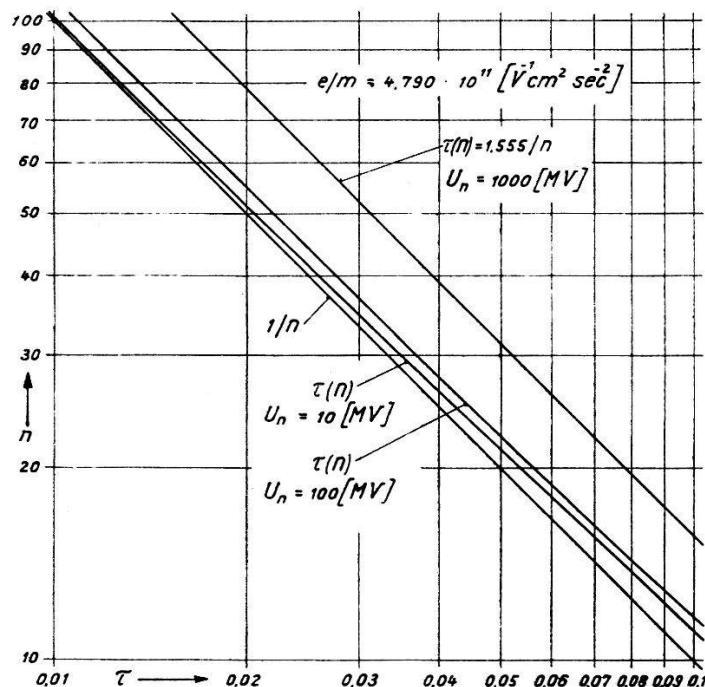


Fig. 3.

In Fig. 3 ist nun  $\tau$  in Abhängigkeit von  $n$  für Deuteronen mit  $e/m = 4,790 \cdot 10^{11} [\text{V}^{-1} \text{cm}^2 \text{sec}^{-2}]$  bei

$U_n =$	10	100	1000	[MV]	also
$z_n =$	1,00533	1,0533	1,5330		

aufgetragen. Dabei ist für  $U_n = 10$  [MV] nach (19) und (21) mit

$z_n = 1$  gerechnet. Für  $U_n = 100$  [MV] ist noch immer  $z_n < (3/2)^{\frac{1}{2}}$  und  $\tau$  wurde nach (19), (20), (21) bestimmt zu

$$\begin{aligned}\tau &= (1 - 1/n^{\frac{1}{2}})[1 - 0,04025/n + 0,00206/n^2 - \dots] \\ &- (1 - 3/n^{\frac{1}{2}})[1 - 3 \cdot 0,04025/n + 9 \cdot 0,00206/n^2 - \dots] \\ &= 1,0805/n + 0,839/n^2 + 1,496/n^3 + 2,925/n^4 + \dots.\end{aligned}$$

Für  $U_n = 1000$  [MV] endlich ist  $z_n > (3/2)^{\frac{1}{2}}$ . Nun berechnet sich aus (18)  $v/n = 0,472$ . Mit diesem Wert folgt aus (22)  $\tau = 1,555/n$ .

## II. Das Magnetsystem.

Es handelt sich nun um eine Orientierung über den Aufwand an Eisen und Kupfer, welche für den Bau, sowie über die Erregerleistung, welche für den Betrieb des Magnetsystems erforderlich sind. Es wird dazu eine vereinfachte Konstruktion angenommen, die eine bequeme Berechnung erlaubt.

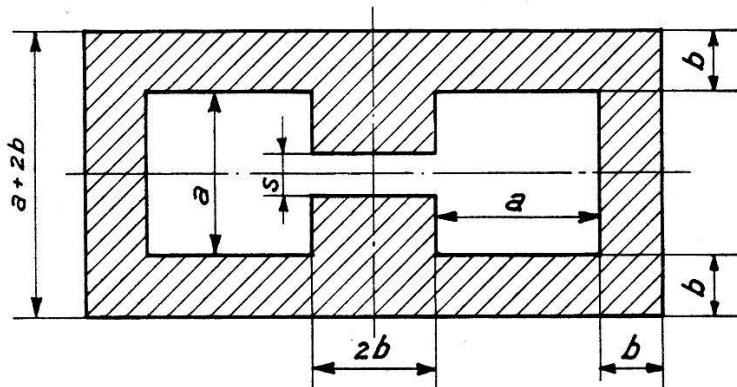


Fig. 4.

Fig. 4 zeigt einen Leitkanal mit zugehörigem Magnetsystem im Schnitt senkrecht zur halbkreisförmigen ungestörten Bahn eines synchronen Teilchens. Die Mitte des Rechtecks  $\{s, 2b\}$  ist der Durchstosspunkt der Bahn durch die Schnittebene, das Rechteck  $\{s, 2b\}$  selbst der Querschnitt des Leitkanals. Die beiden Quadrate  $\{a, a\}$  sind die Querschnitte der beiden Spulenseiten der Erregerwicklung, die schraffierte Fläche der Querschnitt des Magneteisens.

Sind  $r_1, r_2, \dots, r_n$  die durch (4) bestimmten Radien der halbkreisförmigen Stücke der ungestörten Bahn des synchronen Teilchens im Innern der  $n$  Leitkanäle, so ist

$$L = \pi \sum_1^n r_v \quad (23)$$

die Gesamtlänge der  $n$  Leitkanäle. In jedem Punkte der Länge  $L$  sollen der Leitkanal und das zugehörige Magnetsystem den gleichen Querschnitt wie in Fig. 4 haben. Misst man  $L, a, b, s$  in [cm], so sind

$$V_{\text{Fe}} = 8b(a + b - s/4)L \quad [\text{cm}^3] \quad (24)$$

das *Eisenvolumen* und

$$V_{\text{Cu}} = 2\gamma a^2 L \quad [\text{cm}^3] \quad (25)$$

das *Kupfervolumen* des Magnetsystems. Der Füllfaktor  $\gamma$  bedeutet das Verhältnis des Kupferquerschnitts einer Spulenseite zu deren Wicklungsquerschnitt  $a^2$ . Es sind in (24) die Modifikation des Eisenvolumens durch die Aussparungen für die Spulenköpfe der Wicklung und die leichte Veränderung des Luftspaltes  $s$  über die Breite  $2b$  zur Erzeugung der für die Fokusierung erforderlichen Inhomogenität des Magnetfeldes, in (25) das Kupfervolumen der Spulenköpfe der Wicklung nicht berücksichtigt.

Bezeichnen  $M$  in [A] die Ampère-Windungszahl je Spulenseite des  $v$ ten Leitkanals und  $\varrho$  in [ $\Omega \text{ cm}$ ] den spezifischen Widerstand des Wicklungskupfers im Betrieb, so ist

$$N = (2\pi\varrho/\gamma a^2) \sum_1^n r_v M_v^2 \quad [\text{W}] \quad (26)$$

die für das Magnetsystem erforderliche *Erregerleistung*. Variiert der spezifische Widerstand innerhalb der Wicklung, so sei  $\varrho$  der entsprechende Mittelwert.

Vernachlässigt man die Krümmung der Leitkanäle und des Magnetsystems nach den Radien  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , so ist angenähert

$$M_v = B_v s/\mu_0 + 4H_v(a + b - s/4) \quad [\text{A}] . \quad (27)$$

Darin ist die Induktion  $B_v$  des Führungsfeldes im Raume  $\{s, 2b, \pi r_v\}$  homogen angenommen.  $H_v$  in [ $\text{A cm}^{-1}$ ] bedeutet die im Eisen zu  $B_v$  gehörende Feldstärke und  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} [\text{H cm}^{-1}]$  die übliche Massystemkonstante.

Aus (23), (4) und (7) lässt sich  $L$  ermitteln. Nach einer bekannten Formel zur approximativen Berechnung von bestimmten Integralen ist

$$\sum_1^n r(v) = \int_0^n r(v) dv + [r(n) - r(0)]/2 . \quad (28)$$

Setzt man für die stetige Funktion  $r(\nu)$  analog zu (4) und (7)

$$r(\nu) = r_n [1 - 1/z(\nu)^2]^{\frac{1}{2}} / [1 - 1/z_n^2]^{\frac{1}{2}}$$

und drückt vermöge (6)  $d\nu$  durch  $dz(\nu)$  aus, so wird

$$\begin{aligned} \sum_1^n r(\nu) &= r_n \frac{n}{(z_n - 1)(1 - 1/z_n^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{z_n} [1 - 1/z(\nu)^2]^{\frac{1}{2}} dz(\nu) + r_n/2 \\ &= r_n \frac{n}{(z_n - 1)(1 - 1/z_n^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ (z_n^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \arccos 1/z_n \right\} + r_n/2 . \end{aligned}$$

Somit

$$L = \pi r_n [\psi(z_n) \cdot n + 1/2] \quad [\text{cm}] , \quad (29)$$

wo

$$\psi(z_n) = \frac{(z_n^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \arccos 1/z_n}{(z_n - 1)(1 - 1/z_n^2)^{\frac{1}{2}}} . \quad (30)$$

Für  $z_n = 1$  ist  $\psi(z_n) = 2/3$ . Den weiteren Verlauf zeigt Fig. 5.

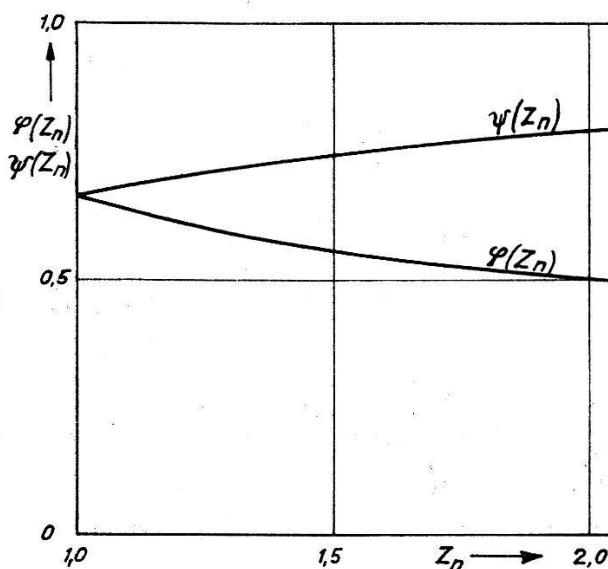


Fig. 5.

In analoger Weise wie  $L$  liesse sich  $N$  berechnen. Wegen der Komplikation durch die empirische Abhängigkeit zwischen  $H_\nu$  und  $B_\nu$  soll die Berechnung von  $N$  nur in zwei vereinfachten Fällen durchgeführt werden, die eine obere und eine untere Grenze für die Erregerleistungen darstellen.

*Obere Grenze:* Die Induktion des magnetischen Führungsfeldes sei in allen  $n$  Leitkanälen  $B_\nu = B_n$ . Nach (26) und (27) ist dann

$$N = N_0 = (2 \varrho L/\gamma a^2) M_n^2 \quad [\text{W}] . \quad (31)$$

*Untere Grenze:* Die magnetische Feldstärke  $H_\nu$  im Eisen sei vernachlässigbar klein. Dann ist nach (3), (27) und (26)

$$N = N_u = (2 \pi \varrho/\gamma a^2) M_{ns}^2 \frac{r_n}{z_n(z_n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sum_1^n z_\nu (z_\nu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} ,$$

wobei

$$M_{ns} = B_n s/\mu_0 \quad [\text{A}] .$$

Analog wie bei der Berechnung von  $L$  ist angenähert

$$\begin{aligned} \sum_1^n z(\nu) [z(\nu)^2 - 1]^{\frac{1}{2}} &= \int_0^{z_n} z(\nu) [z(\nu)^2 - 1]^{\frac{1}{2}} d\nu + z_n (z_n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}/2 \\ &= \frac{n}{z_n - 1} \int_0^{z_n} [z(\nu)^2 - 1]^{\frac{1}{2}} z(\nu) dz(\nu) + z_n (z_n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}/2 \\ &= n(z_n^2 - 1)^{3/2}/3(z_n - 1) + z_n (z_n^2 - 1)/2 . \end{aligned}$$

Damit wird  $N_u$  in Übereinstimmung mit (31)

$$N_u = (2 \varrho L_u/\gamma a^2) M_{ns}^2 \quad [\text{W}] , \quad (32)$$

wobei

$$L_u = \pi r_n [\varphi(z_n) \cdot n + 1/2] \quad [\text{cm}] \quad (33)$$

mit

$$\varphi(z_n) = (1 + 1/z_n)/3 . \quad (34)$$

Für  $z_n = 1$  ist auch  $\varphi(z_n) = 2/3$ . Den weiteren Verlauf zeigt wieder Fig. 5.

Vernachlässigt man in (29) und (33) den Term  $1/2$  gegen den ersten Term  $\varphi(z_n) \cdot n$  bzw.  $\varphi(z_n) \cdot n$ , so verhalten sich  $L$  zu  $L_u$  unmittelbar wie  $\varphi(z_n)$  zu  $\varphi(z_n)$ .

Bei mit Rücksicht auf eine hohe Anzahl  $n$  dichtester Packung der Leitkanäle ist

$$a + 2b = r_n \tau . \quad (35)$$

Liegt  $r_n$  vermöge (7) mit  $z_n$  und  $B_n$  fest und macht man eine Annahme über  $a$  und  $b$ , so folgt, da bei bekanntem  $z_n$  die Grösse  $\tau$  wegen (18) bis (22) bzw. Fig. 3 nur noch von  $n$  abhängt, aus (35) die Anzahl  $n$ . Die Querschnittsabmessungen  $b$  und  $s$  der Leitkanäle bestimmen sich aus den zu erwartenden Abweichungen der Teilchen-

bahnen von der ungestörten Bahn des synchronen Teilchens. Große Anzahlen  $n$  verlangen einen kleinen Wert von  $a$ , also hohe Stromdichte  $I$ . Erhöht man aber die auf den Wicklungsquerschnitt  $2a^2$  bezogene Stromdichte  $I$  in [ $\text{A cm}^{-2}$ ], so nimmt die *Erregerleistung*

$$N = 2a^2 L \varrho I^2 / \gamma \quad [\text{W}] \quad (36)$$

zu. Das vergrößert die Betriebskosten und erschwert die Ableitung der mit der Erregerleistung übereinstimmenden Verlustwärme pro Zeiteinheit.

Dieser limitierende Einfluss der Ableitung der Verlustwärme ist näher zu betrachten. Dazu sei angenommen, dass der Wicklungsquerschnitt  $2a^2$ , welcher über den Anteil  $2\gamma a^2$  aus Kupfer besteht und Strom führt, über den Anteil  $2(1-\gamma)a^2$  von Wasser mit der Geschwindigkeit  $v$  in [ $\text{cm sec}^{-1}$ ] durchflossen wird.

Tritt das Kühlwasser mit der Temperatur  $t_1$  ein, mit der Temperatur  $t_2$  aus, so ist die *Kühllänge*  $L_h$ , d. h. der Weg, den ein Wasser teilchen in der Wicklung zurücklegt, gegeben durch

$$L_h = 4,184 \gamma (1 - \gamma) v (t_2 - t_1) / \varrho I^2 \quad [\text{cm}] . \quad (37)$$

Die *Kühlwassermenge pro Zeiteinheit* bestimmt sich zu

$$W = N / 4,184 (t_2 - t_1) \quad [\text{cm}^3 \text{ sec}^{-1}] . \quad (38)$$

Sind  $h$  der *Wärmeübergangskoeffizient* in [ $\text{W cm}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ] und  $\vartheta$  die *Temperaturdifferenz zwischen Wand und Flüssigkeit* in  ${}^\circ\text{C}$ , so ist

$$h\vartheta = \varrho I^2 R / \gamma (1 - \gamma) \quad [\text{W cm}^{-2}] . \quad (39)$$

Darin bedeutet

$$R = 2 (1 - \gamma) a^2 / S \quad [\text{cm}]$$

den *hydraulischen Radius*, also  $S$  in [cm] die Länge der Linie im Querschnitt  $2a^2$ , längs welcher das stromleitende Metall vom Kühl wasser benetzt wird.

Bei Vernachlässigung des Einflusses von Krümmungen wird die Reibung des Kühlwassers über die Kühllänge  $L_h$  durch die sogenannte *Widerstandshöhe*  $w$  gekennzeichnet. Es ist

$$w = (f L_h / R) (v^2 / 2 g) . \quad (40)$$

Darin bedeuten

$$g = 981 \quad [\text{cm sec}^{-2}]$$

und  $f$  die dimensionslose Reibungszahl. Aus (38) und (40) erhält

man mit Berücksichtigung von (37) für das Verhältnis der *durch Reibung des Kühlwassers vernichteten Leistung*  $N_f$  zur Erregerleistung  $N$

$$N_f/N = 10^{-7} \gamma (1 - \gamma) f v^3 / 2 \varrho I^2 R . \quad (41)$$

Wählt man im Interesse einer grossen Kühllänge  $L_h$  den Füllfaktor  $\gamma = 1/2$  und die Temperaturdifferenz  $t_2 - t_1 = 50^\circ\text{C}$  und schätzt  $f = 0,005$ , so erhält man an Stelle von (37), (38), (39) und (41)

$$L_h = 52,30 v / \varrho I^2 \quad [\text{cm}] , \quad (42)$$

$$W/N = 4,781 \cdot 10^{-3} \quad [\text{W}^{-1} \text{cm}^3 \text{sec}^{-1}] , \quad (43)$$

$$h \vartheta = 4 \varrho I^2 R \quad [\text{W cm}^{-2}] , \quad (44)$$

$$N_f/N = 6,25 \cdot 10^{-11} v^3 / \varrho I^2 R . \quad (45)$$

Ein mit Rücksicht auf (44) möglichst kleiner hydraulischer Radius lässt sich mit  $R = 0,25$  [cm] ohne Schwierigkeiten verwirklichen.

Damit treten an Stelle von (44) und (45)

$$h \vartheta = \varrho I^2 \quad [\text{W cm}^{-2}] , \quad (46)$$

$$N_f/N = 2,50 \cdot 10^{-10} v^3 / \varrho I^2 . \quad (47)$$

Für  $\varrho I^2 > 10$  [ $\text{W cm}^{-3}$ ] und  $v < 300$  [ $\text{cm sec}^{-1}$ ] bleibt  $N_f/N < 0,675 \cdot 10^{-3}$ , die durch Reibung des Kühlwassers vernichtete Leistung  $N_f$  also klein gegenüber der Erregerleistung  $N$ .

Unter Annahme, dass die pro Volumen- und Zeiteinheit im Wicklungskupfer entwickelte Wärme  $\varrho I^2 / \gamma$  über die ganze Wicklung konstant und die Wärmeleitung in Längsrichtung der Stromleiter vernachlässigbar klein seien, wächst die Temperatur  $t$  des Kühlwassers längs der Kühllänge  $L_h$  linear von  $t_1$  bis  $t_2$  und hat im Mittel den Wert  $(t_1 + t_2)/2$ . Für ein gerades Rohr mit Kreisquerschnitt vom Innendurchmesser  $d$  in [cm] ist bei turbulenter Strömung der Wärmeübergangskoeffizient an Wasser

$$h = 0,903 \cdot 10^{-2} (1 + 0,015 t) v^{0,8} / d^{0,2} \quad [\text{W cm}^{-2} {}^\circ\text{C}^{-1}] . \quad (48)$$

Dieser Ausdruck ergibt sich aus Formel (9c) in McADAMS „Heat transmission“, New York 1942, Seite 183, durch Umrechnen auf die hier benutzten Einheiten.

Setzt man entsprechend  $R = 0,25$  [cm] den Durchmesser  $d = 1$  [cm], so folgt mit (48) aus (46) als Mittelwert der Temperaturdifferenz  $\bar{\vartheta}$  zwischen Wand und Flüssigkeit

$$\begin{aligned}\bar{\vartheta} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varrho I^2 dt}{0,903 \cdot 10^{-2} (1 + 0,015 t) v^{0,8}} \\ &= \frac{\varrho I^2}{0,903 \cdot 10^{-2} \cdot 0,015 (t_2 - t_1) v^{0,8}} \ln \left\{ \frac{1 + 0,015 t_2}{1 + 0,015 t_1} \right\}.\end{aligned}$$

Mit  $t_1 = 20^\circ$  C und  $t_2 = 70^\circ$  C wird

$$\bar{\vartheta} = 67 \varrho I^2 / v^{0,8}. \quad (49)$$

Die mittlere Temperatur der Wand ist

$$(t_1 + t_2)/2 + \bar{\vartheta} = 45 + \bar{\vartheta}.$$

Wird angenommen, dass sie mit der mittleren Temperatur des Wicklungskupfers übereinstimmt, so folgt für den vorausgesetzten Mittelwert des spezifischen Widerstandes

$$\varrho = 1,7 \cdot 10^{-6} [1 + 0,004 (45 + \bar{\vartheta})] [\Omega \text{ cm}]. \quad (50)$$

Tabelle I.

$v$	in	[cm sec <sup>-1</sup> ]	100	200	300
$\varrho I^2$	in	[W cm <sup>-3</sup> ]	10	10	10
$L_h$	in	[cm]	523	1046	1569
$\bar{\vartheta}$	in	[°C]	16,8	9,7	7,0
$10^6 \varrho$	in	[\Omega cm]	2,12	2,07	2,05
$I$	in	[A cm <sup>-2</sup> ]	2170	2200	2210
$\varrho I^2$	...	...	20	20	20
$L_h$	...	...	261	523	784
$\bar{\vartheta}$	...	...	33,6	19,4	14,0
$10^6 \varrho$	...	...	2,24	2,14	2,10
$I$	...	...	2980	3050	3080
$\varrho I^2$	...	...	30	30	30
$L_h$	...	...	141	349	523
$\bar{\vartheta}$	...	...	50,5	29,0	21,0
$10^6 \varrho$	...	...	2,35	2,20	2,15
$I$	...	...	3570	3690	3740

Mit diesem Wert ergibt sich aus dem der Berechnung von  $\bar{\vartheta}$  nach (49) zugrunde gelegten  $\varrho I^2$  die Stromdichte  $I$  in [A cm<sup>-2</sup>].

Wie die Kühlänge  $L_h$ , die mittlere Temperaturdifferenz  $\bar{\vartheta}$  zwischen Wand und Flüssigkeit, der Mittelwert des spezifischen Widerstandes  $\varrho$  des Wicklungskupfers und die Stromdichte  $I$  unter den gemachten Annahmen mit der Geschwindigkeit  $v$  und der Leistungsdichte  $\varrho I^2$  variieren, zeigt die vorhergehende Tabelle I. Vom Standpunkt der Wärmeableitung sind danach Stromdichten von 3000 [ $A\text{ cm}^{-2}$ ] möglich und zulässig. Die dazu erforderliche Kühlänge beträgt bei Wassergeschwindigkeiten von 300 [ $cm\text{ sec}^{-1}$ ] etwa 800 [cm].

Damit sind die Grundlagen dargestellt, die benutzt wurden, um für eine Anzahl von Geräten die Magnetsysteme zu berechnen. Es handelt sich um Geräte zur Beschleunigung von Deuteronen mit

$$e/m = 4,790 \cdot 10^{11} \quad [V^{-1} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}]$$

auf Teilchenenergien im  $n$ ten Leitkanal

$$\begin{aligned} E_n &= 10 & 100 & 1000 & [\text{MeV}] \text{ entsprechend} \\ U_n &= 10 & 100 & 1000 & [\text{M V}] \text{ und nach (8)} \\ z_n &= 1,00533 & 1,05330 & 1,53300 & . \end{aligned}$$

Die für alle Leitkanäle gleichen Querschnittsabmessungen wurden  $b = s = 3$  [cm] gewählt. Für die Berechnung der Ampère-Windungszahlen nach (27) ist als für die Eisensättigung charakteristischer empirischer Zusammenhang

$$\begin{aligned} 10^4 B_n &= 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0 & [V \text{ cm}^{-2} \text{ sec}] \\ H_n &= 0; 1,1; 5; 22; 84; 332 & [A \text{ cm}^{-1}] \end{aligned}$$

und für den mittleren spezifischen Widerstand der Wicklung  $\varrho = 2 \cdot 10^{-6} [\Omega \text{ cm}]$  angenommen worden.

$B_n$  als Parameter bei der Berechnung der Geräte hat man die obigen 6 Werte erteilt. Zu jedem Wert des weiteren Parameters, der Anzahl  $n$  der Leitkanäle, gehört nach (35) ein Wert  $a$  und damit nach (27) ein Wert  $M_n$ . Die Stromdichte bezogen auf den Wicklungsquerschnitt ist dann

$$I = M_n/a^2 \quad [A \text{ cm}^{-2}] .$$

$n$  wurde nun so variiert, dass  $I$  sich in den Grenzen

$$200 \leq I \leq 2000 \quad [A \text{ cm}^{-2}]$$

änderte. In Fig. 6 und Fig. 7 sind  $V_{Fe}$  bzw.  $\frac{1}{\gamma} V_{Cu}$  in [ $m^3$ ] als Funktionen von  $\gamma N_0$  in [ $kW$ ] gerechnet nach (24), (25), (31) und in dop-

pelt logarithmischem Maßstab aufgetragen.  $N_0$  ist bekanntlich eine obere Grenze der tatsächlichen Erregerleistung  $N$ . Der Wert des Füllfaktors  $\gamma$  bleibt dabei frei.

Für jede der Endenergien  $E_n$  erhält man sowohl in der  $\{V_{Fe}, \gamma N_0\}$ -Ebene (Fig. 6), wie in der  $\{\frac{1}{\gamma} V_{Cu}, \gamma N_0\}$ -Ebene (Fig. 7) einen rechteckähnlichen Bereich begrenzt durch die Linien  $10^4 B_n = 1,0$ ;  $10^4 B_n = 2,0$ ;  $I = 200$ ;  $I = 2000$ . Innerhalb dieser Bereiche sind

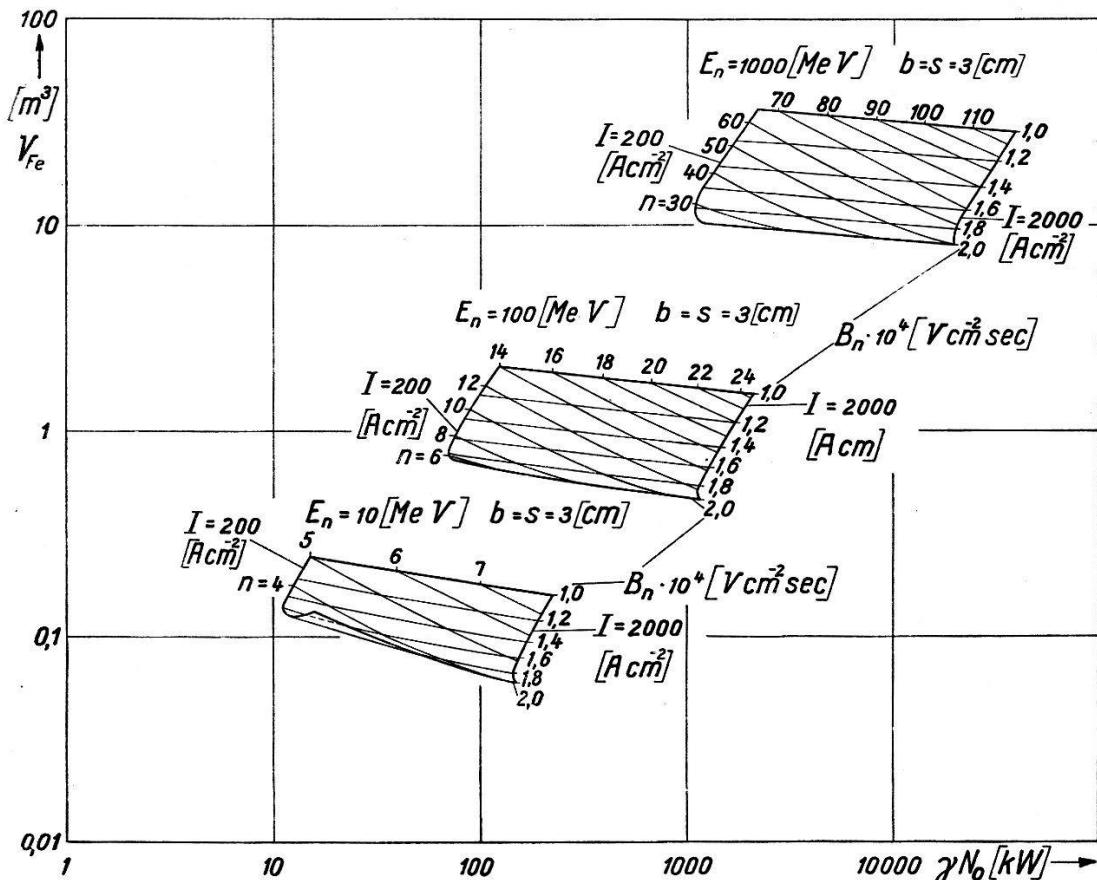


Fig. 6.

ausser den Linien  $10^4 B_n = 1,2; 1,4; 1,6; 1,8$  noch Linien  $n = \text{konstant}$  eingetragen, so dass ein Netzwerk entsteht. Jedem Gitterpunkt entspricht ein Magnetsystem, das berechnet wurde.

Die Darstellung gibt einen anschaulichen Überblick über einige Eigenschaften der Konstruktion eines Magnetsystems der vorgeschlagenen Art. Man kann in Fig. 6 und Fig. 7 zum Vergleich die Punkte der entsprechenden Daten des Magneten bekannter Cyclotrone oder Synchro-Cyclotrone einzeichnen. Die Bereiche sind z. T. zweiwertig gefaltet, eine Folge der Sättigung des Eisens. Es ist also wirtschaftlich uninteressant mit der Induktion  $B_n$  eine gewisse Grenze zu überschreiten.

Der Aufwand an Eisen und Kupfer sowie die Erregerleistung wachsen angenähert linear mit der Endenergie  $E_n$ . Die erkennbaren Abweichungen sind auf die relativistische Zunahme von  $r_n$  nach Formel (7), vor allem aber auf die Zunahme von  $\tau$  nach Formeln (19) bzw. (22) mit  $z_n$  zurückzuführen.

Für hohe Stromdichte  $I$  und niedrige Induktion  $B_n$  werden die Anzahl  $n$  der Leitkanäle und die Erregerleistung  $N_0$  am grössten. Später wird sich zeigen, dass bei dieser Wahl der Parameter die Resonatorverluste am kleinsten ausfallen.

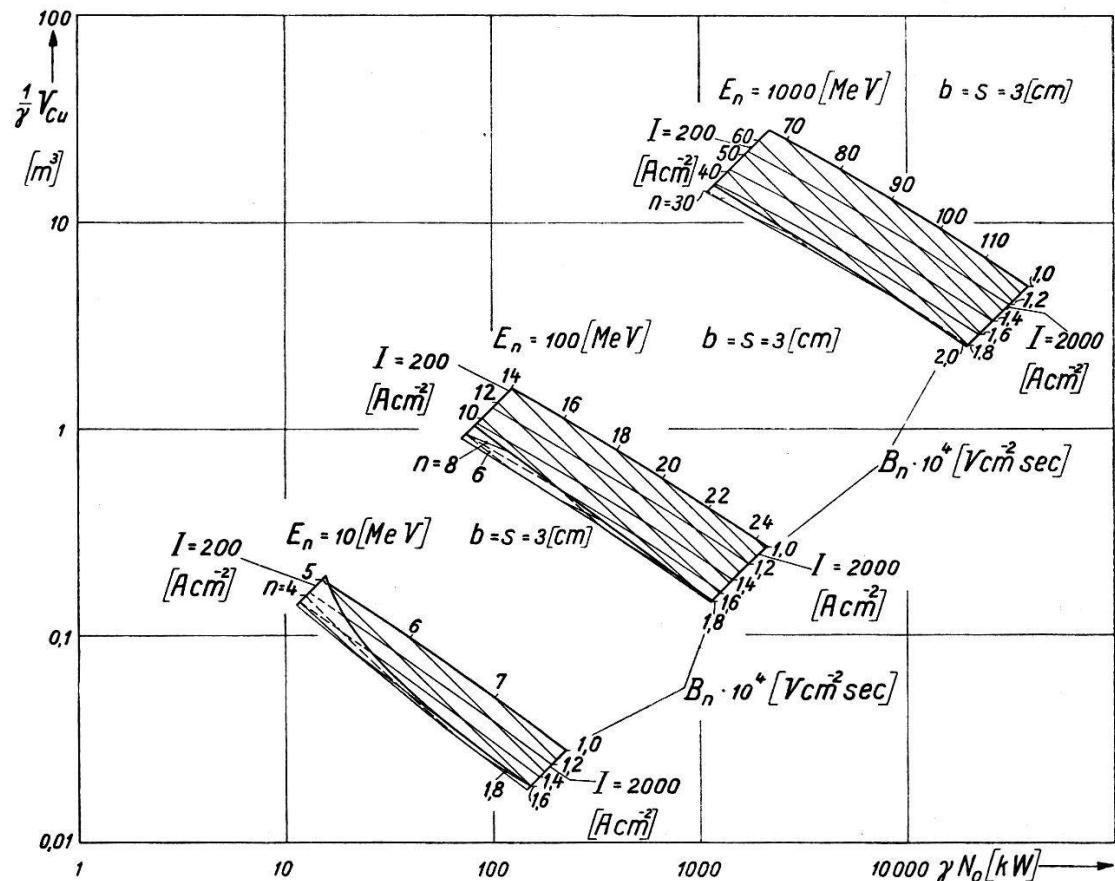


Fig. 7.

Es lassen sich höhere  $n$ -Werte erzielen, wenn zum mindesten in der Gegend engster Packung der Leitkanäle die der Berechnung zugrunde gelegte Querschnittskonstruktion nach Fig. 4 im Sinne kleinerer Ausdehnung in Richtung senkrecht zur Ebene der ungestörten Bahn des synchronen Teilchens abgeändert wird, z. B. durch rechteckigen statt quadratischen Querschnitt der Spulenseiten, gegebenenfalls durch im Vergleich zum Luftspalt höhere Induktion im Eisen.

Werden die Abmessungen  $b = s = 3$  [cm] verringert, so ergeben sich höhere Anzahlen  $n$  bei kleinerem Aufwand an Eisen und Kupfer

und kleinerer Erregerleistung. Beispielsweise zeigen analoge Rechenergebnisse wie die in Fig. 6 und Fig. 7 aber für  $b = s = 1$  [cm] im allgemeinen um den Faktor 0,6 bis 0,7 verringerte Erregerleistungen und Kupfervolumina, um den Faktor 0,3 bis 0,4 verringerte Eisenvolumina, um den Faktor 2 bis 2,5 erhöhte Anzahlen von Leitkanälen.

Die erreichbaren unteren Grenzen für  $b$  und  $s$  werden von den folgenden Umständen beeinflusst:

1. Querschnitt, Divergenz und Energie des von der Teilchenquelle emittierten Strahls.
2. Genauigkeit der Herstellung und der Montage des Eisens des Magnetsystems.
3. Zeitliche Konstanz der magnetischen Führungsfelder.
4. Magnetische Streufelder am Ein- und Austritt der Leitkanäle.
5. Elektrostatische Abstossung im Strahl bei höheren Strahlstromdichten.
6. Durch die Startphase und die Schwankungen der beschleunigenden Wechselspannung verursachte Abweichungen von der Energie des synchronen Teilchens.
7. Die Art des Aneinanderfügens der ungestörten Bahnen in aufeinanderfolgenden Leitkanälen. Vgl. hiezu die frühere Mitteilung<sup>2)</sup>.
8. Elektrische Felder über die Beschleunigungsstrecken in ihrer Wirkung auf die Fokusierung.
9. Zusammenstösse mit Gasteilchen und Elimination der dabei entstehenden Produkte.

Kennt man Querschnitt, Divergenz und Energie des von der Teilchenquelle emittierten Strahls und betrachtet die alternierend aufeinanderfolgenden Beschleunigungsstrecken und Leitkanäle als eine Reihenschaltung von ionenoptischen Linsen, so lässt sich das von einem Teilchenimpuls mit bekanntem Bereich der Startphase erfüllte Bündel von Bahnen berechnen. Dem Querschnittsverlauf dieses Bündels von Bahnen sind die für die vorliegende Orientierung gleich angenommenen Querschnitte der verschiedenen Leitkanäle anzupassen. Es handelt sich also um ähnliche ionenoptische Probleme wie bei der Berechnung von Massenspektrographen. Sie sollen in einer späteren Mitteilung behandelt werden.

### III. Der Hohlraumresonator.

Nun sind im Sinne einer Orientierung die Abmessungen des Hohlraumresonators und die zur Deckung seiner Hochfrequenzverluste erforderliche Leistung zu berechnen.

Fig. 8 zeigt den rotationssymmetrischen Hohlraumresonator im Meridianschnitt. Der Spannungsbauch des Resonators, in welchem die beschleunigende Wechselspannung mit dem Scheitelwert  $U$

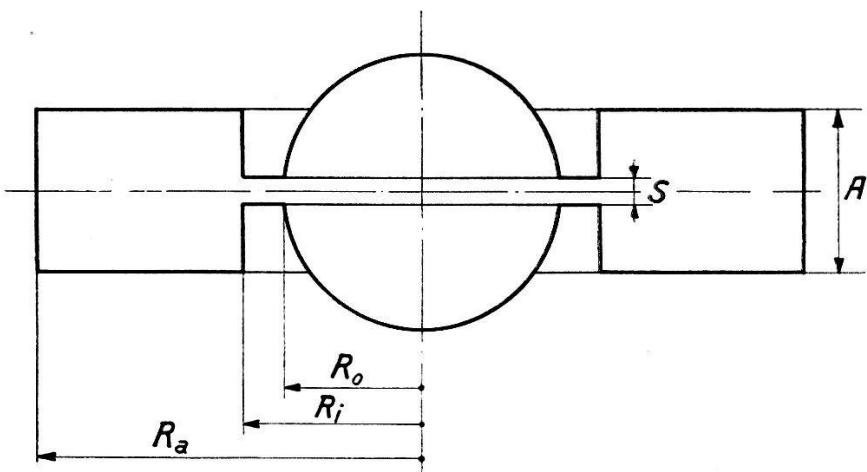


Fig. 8.

entsprechend (9) auftritt, werde durch einen *Kreisringkondensator* gebildet mit dem Plattenabstand  $S$  in [cm] und den beiden Radien

$$R_i = r_n + \sqrt{5} (a + 2 b)/2 \quad [\text{cm}] \quad (51)$$

und

$$R_0 = r_n - \sqrt{5} (a + 2 b)/2 \quad [\text{cm}] . \quad (52)$$

Die Radiendifferenz

$$R_i - R_0 = \sqrt{5} (a + 2 b)$$

ist der bei einem Querschnitt des Magnetsystems nach Fig. 4 erforderliche Mindestwert. Von Zuschlägen aus konstruktiven Gründen (z. B. Blechstärke) wird bei der vorliegenden Orientierung abgesehen. Ist  $\mathfrak{E}$  in  $[\text{V cm}^{-1}]$  die maximal zulässige Feldstärke über  $S$ , so bestimmt sich  $S$  vermöge (9) zu

$$S = U_n/n \mathfrak{E} \cos \Phi_s \quad [\text{cm}] . \quad (53)$$

Die Kapazität des Kreisringkondensators berechnet sich nach

J. J. THOMSON, Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893, S. 225, Nr. 239 zu

$$C = \varepsilon_0 [\pi (R_i^2 - R_0^2)/S + 2 (1 - \ln 2) (R_0 + R_i)] \quad [F],$$

wo

$$\varepsilon_0 = 10^9/4 \pi c^2 \quad [F \text{ cm}^{-1}]$$

die übliche Massensystemkonstante. Wegen (51) und (52) ist

$$C/\varepsilon_0 = 2 \pi r_n \sqrt{5} (a + 2b)/S + 4 (1 - \ln 2) r_n \quad [cm]. \quad (54)$$

Die nun folgende Berechnung des Hohlraumresonators basiert auf einer früheren Arbeit<sup>3</sup>), die in der Folge als „HB“ (Hohlraumbericht) zitiert wird. Bezüge auf Formeln des HB sind in geschweifte { ... } Klammern gesetzt.

Nach dem HB hat man vom reduzierten Innenradius

$$\zeta_i = 2 \pi R_i / \lambda'$$

und dem Kapazitätsmass

$$g = C/\varepsilon_0 \lambda'$$

auszugehen. In diesen beiden Formeln ist  $\lambda'$  die Eigenwellenlänge des Hohlraumresonators. Um dessen Abmessungen klein zu halten, wird diese Wellenlänge  $\lambda'$  entsprechend der Bemerkung in dieser Arbeit Seite 23, gleich einem Drittel der Umlaufsfrequenz der Teilchen entsprechenden Wellenlänge  $\lambda$  nach (5) gewählt. Mit dieser Festsetzung

$$\lambda' = \lambda/3 \quad (55)$$

folgen aus (51) und (54) unter Berücksichtigung von (55), (53), (5), (7), (8) und (35)

$$\zeta_i = 3 (1 - 1/z_n^2)^{\frac{1}{2}} [1 + (\sqrt{5}/2)] \quad (56)$$

und

$$g = 3 \sqrt{5} (1 + 1/z_n) (\mathfrak{E} \cos \Phi_s / c B_n) \tau n + (6/\pi) (1 - \ln 2) (1 - 1/z_n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (57)$$

Durch die Wahl einer gegenüber der Umlauffrequenz der Teilchen dreimal höheren Frequenz der beschleunigenden Wechselspannung bedarf die Frage des Einflusses der Startphase<sup>2</sup>) einer ergänzenden Betrachtung. Sie steht am Schluss der vorliegenden Arbeit. Kennt man  $g$  und  $\zeta_i$ , so lassen sich wie im Beispiel Seite 138 des HB die reduzierte axiale Länge  $\alpha$  des Hohlraumresonators

$$\alpha = 2 \pi A / \lambda', \quad (58)$$

die axiale Länge  $A$  selbst und der Verlustleitwert  $G$  in den beiden Grenzfällen „enges Rohr“ und „flache Dose“ als Funktionen des reduzierten Außenradius

$$\zeta_a = 2 \pi R_a / \lambda' \quad (59)$$

berechnen. Die dafür erforderlichen Formeln des *HB* sind:

*Grenzfall „enges Rohr“:*

Resonanzbedingung:

$$g \ln (\zeta_a / \zeta_i) \operatorname{tg} \alpha = 1 . \quad \{5\}$$

Reduzierter Verlustleitwert:

$$\Gamma = (\mu_0 / \epsilon_0) (t / 2 \pi \rho) G = P(\zeta_a / \zeta_i) + Q(\zeta_a / \zeta_i) / \zeta_a , \quad \{17\}$$

wobei

$$P(\zeta_a / \zeta_i) = 2 / \ln (\zeta_a / \zeta_i) + 2 g^2 \ln (\zeta_a / \zeta_i) \quad \{21\}$$

und

$$Q(\zeta_a / \zeta_i) = (1 + \zeta_a / \zeta_i) \{ g / \ln (\zeta_a / \zeta_i) \\ + [g^2 + 1 / \ln^2 (\zeta_a / \zeta_i)] \operatorname{arc ctg} [g \ln (\zeta_a / \zeta_i)] \} . \quad \{22\}$$

*Grenzfall „flache Dose“:*

Resonanzbedingung:

$$\alpha g = \zeta_i Z_1(\zeta_i) / Z_0(\zeta_i) , \quad \{39\}$$

wobei allgemein

$$Z_p(\dots) = J_p(\dots) - J_0(\zeta_a) / N_0(\zeta_a) \cdot N_p(\dots)$$

und  $J_p(\dots)$ ,  $N_p(\dots)$  die BESSEL- bzw. NEUMANN-Funktionen  $p$ -ter Ordnung bedeuten.

Reduzierter Verlustleitwert:

$$\Gamma = (\mu_0 / \epsilon_0) (t / 2 \pi \rho) G = g A(\zeta_i, \zeta_a) + g^2 B(\zeta_i, \zeta_a) , \quad \{49\}$$

wobei

$$A(\zeta_i, \zeta_a) = \alpha g [(I/I_c)^2 / \zeta_a + 1 / \zeta_i] - \zeta_i / 2 , \quad \{51\}$$

$$B(\zeta_i, \zeta_a) = (I/I_c)^2 - 1 + 2 / \alpha g - (\zeta_i / \alpha g)^2 \quad \{52\}$$

und

$$I/I_c = (\zeta_a / \zeta_i) Z_1(\zeta_a) / Z_1(\zeta_i) . \quad \{37\}$$

Formel  $\{51\}$  unterscheidet sich von der entsprechenden Formel  $\{51\}$  im *HB* durch den Term  $-\zeta_i / 2$ , der im *HB* seinerzeit versehentlich

weg blieb. In {17} und {49} bedeuten  $\varrho$  in [ $\Omega$  cm] den spezifischen Widerstand der Innenfläche des Hohlraumresonators,

$$t = \sqrt{\varrho \lambda' / \pi c \mu_0} \quad [\text{cm}] \quad (60)$$

die Eindringtiefe der Oberflächenströme und

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-9} \quad [H \text{ cm}^{-1}]$$

die übliche Massensystemkonstante.

Im *HB* sind nur Fälle betrachtet, bei denen der Hohlraumresonator in seinem Spannungsbauch durch einen aus zwei vollen Kreisscheiben bestehenden Plattenkondensator belastet ist mit einem Plattenabstand stets kleiner, als die axiale Länge  $A$  des Hohlraumresonators. Das bedeutete im Grenzfall „flache Dose“ für  $\alpha g$

$$\infty > \alpha g \geq \zeta_i J_1(\zeta_i) / J_0(\zeta_i) \sim \zeta_i^2 / 2 . \quad \{43\}$$

Solange ausserdem  $\zeta_i < 2,4048$ , der ersten Nullstelle der BESSEL-funktion  $J_0(\zeta)$ , bleibt, musste unter allen nach der Resonanzbedingung {39} möglichen Werten von  $\zeta_a$  der kleinste, praktisch allein interessierende Wert in den Grenzen

$$\zeta_i < \zeta_a < 2,4048$$

liegen. Beim hier interessierenden Hohlraumresonator für Beschleuniger besteht der Plattenkondensator im Spannungsbauch des Hohlraumresonators nicht mehr aus zwei vollen Kreisscheiben, sondern aus zwei Kreisringen. Der mögliche Bereich für  $\alpha g$  vergrössert sich damit von {43} prinzipiell auf

$$\infty > \alpha g > 0 . \quad (61)$$

Es besteht auch keine Veranlassung an  $\zeta_i < 2,4048$  festzuhalten. Es kann grundsätzlich

$$0 < \zeta_i < \infty \quad (62)$$

sein. Die Formeln für den Grenzfall „flache Dose“ im *HB* gelten auch für die erweiterten Bereiche (61) und (62), da bei der Ableitung dieser Formeln keine über (61) und (62) hinausgehende Beschränkung nötig ist. Bei gegebenem  $\alpha g$  und  $\zeta_i$  liefert die Resonanzbedingung {39} unendlich viele Werte  $\zeta_a$ . Unter diesen Werten gibt es einen kleinsten Wert grösser als  $\zeta_i$ . Dieser Wert, in der Folge einfach mit  $\zeta_a$  bezeichnet, interessiert hier allein. Ersetzt man für grosse Werte von  $\zeta_i$ ,  $\zeta_a$  die Zylinderfunktionen in bekannter Weise

durch Kreisfunktionen abnehmender Amplitude, so erhält man an Stelle der Resonanzbedingung {39}

$$\zeta_a = \zeta_i + \alpha,$$

wo

$$0 < \alpha < \pi/2$$

durch

$$\tan \alpha = \zeta_i / \alpha g$$

bestimmt ist. Das heisst, für grosse Werte  $\zeta_i$ ,  $\zeta_a$  spielt die Krümmung keine Rolle mehr, ein durch 2 benachbarte Meridianebenen begrenzter Sektor des Hohlraumresonators verhält sich wie eine Zweibandleitung der Länge  $\lambda'/4$  für  $g = 0$ , der Länge 0 für  $g = \infty$ . Natürlich würden auch um ein ganzes Vielfaches von  $\lambda'/2$  längere Zweibandleitungen der Resonanzbedingung genügen. Sie sind ausgeschlossen worden durch die obige Festsetzung, dass bei gegebenem  $\alpha g$  und  $\zeta_i$  unter  $\zeta_a$  der kleinste Wert verstanden werden soll, der grösser als  $\zeta_i$  ist und die Resonanzbedingung {39} befriedigt.

Trägt man, wie in HB Abb. 14  $\zeta_a$  als Abszisse in Funktion von  $\alpha g$  als Ordinate mit  $\zeta_i$  als Parameter auf, so erhält man eine den positiven Quadranten lückenlos bedeckende Schar von monoton fallenden Kurven. Dieser Darstellung entnimmt man folgendes:

1. Zu jedem Wertepaar  $\alpha g$ ,  $\zeta_i$  gibt es stets einen und nur einen Wert  $\zeta_a$ .
2. Zu jedem  $\zeta_i$  gibt es für Werte  $\zeta_a$  zwischen  $\zeta_i$  und dem zu  $\zeta_i$  und  $\alpha g = 0$  gehörenden Maximalwert  $\zeta_{a\max}$  von  $\zeta_a$  stets einen und nur einen Wert von  $\alpha g$ .
3. Zu jedem Wertepaar  $\zeta_a$ ,  $\alpha g$  gibt es stets einen und nur einen Wert von  $\zeta_i$ .

Lässt man bei einem Hohlraumresonator nach Fig. 8 im Gedankenexperiment bei gegebenem  $g$  und  $\zeta_i$  den reduzierten Aussenradius von  $\zeta_a = \zeta_i$  bis zum Maximalwert  $\zeta_{a\max}$  von  $\zeta_a$  wachsen, so fällt die reduzierte axiale Länge  $\alpha$  vom Anfangswert  $\alpha = \pi/2$  monoton bis zum Endwert  $\alpha = 0$ . Der Verlustleitwert  $G$  und der reduzierte Verlustleitwert  $\Gamma$  durchlaufen dabei ein Minimum. Dieses tatsächliche Verhalten von  $\Gamma$  und  $\alpha$  wird in der Nähe von  $\zeta_a = \zeta_i$  durch die Formeln {17} und {5} für das „enge Rohr“, in der Nähe von  $\zeta_a = \zeta_{a\max}$  durch die Formeln {49} und {39} für die „flache Dose“ beschrieben. In der Nähe des praktisch interessierenden Minimums von  $G$  bzw.  $\Gamma$  wird  $\Gamma$  weder durch {17} noch durch {39} dargestellt. Es wird nun angenommen, das tatsächliche Minimum  $\Gamma_{\min}$  sei gleich dem Minimum des arithmetischen Mittel-

wertes der beiden nach {17} bzw. {49} gerechneten  $\Gamma$ -Werte. Zu diesem  $\Gamma_{\min}$  gehört ein bestimmtes  $\zeta_a = \zeta_{a\min}$ . Interpoliert man zwischen den über  $\zeta_a$  aufgetragenen  $\alpha$ -Werten nach {5} bzw. {39} graphisch, so kann man für  $\zeta_{a\min}$  auf dem zwischen „engem Rohr“ und „flacher Dose“ interpolierenden Kurvenstück das zugehörige  $\alpha_{\min}$  entnehmen. Zu jedem Wertepaar  $g$ ,  $\zeta_i$  gehört also ein ganz bestimmtes Wertetripel  $\Gamma_{\min}$ ,  $\zeta_{a\min}$ ,  $\alpha_{\min}$ . Da in der Folge nur noch mit diesen für das Minimum von  $\Gamma$  charakteristischen Werten

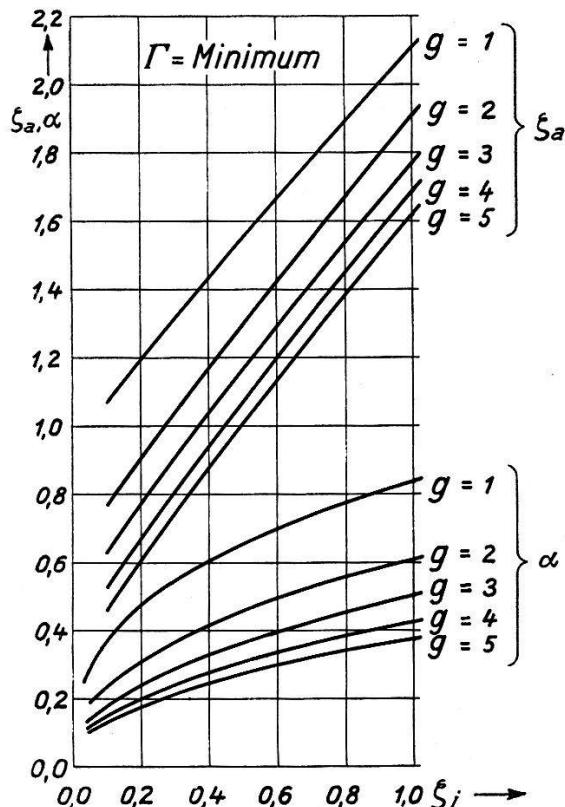


Fig. 9.

der Größen  $\Gamma$ ,  $\zeta_a$ ,  $\alpha$  operiert wird, kann der Index „min“ wegbleiben.  $\Gamma$ ,  $\zeta_a$ ,  $\alpha$  bedeuten also in der Folge die in der beschriebenen Weise berechneten für das Minimum des Verlustleitwertes charakteristischen Werte. Zur Veranschaulichung sind in Fig. 9 und 10 als Ergebnisse solcher Rechnungen  $\zeta_a$ ,  $\alpha$  und  $\Gamma$  in Funktion von  $\zeta_i$  und für verschiedene Parameterwerte  $g$  aufgetragen.

Aus  $\alpha$  und  $\zeta_a$  folgen vermöge (58), (59), (55) und (5)

$$A = (\lambda/6 \pi) \alpha = (1/3) (m c/e B_n) z_n \alpha \quad [\text{cm}] , \quad (63)$$

$$R_a = (\lambda/6 \pi) \zeta_a = (1/3) (m c/e B_n) z_n \zeta_a \quad [\text{cm}] , \quad (64)$$

$$R_0 = (\lambda/6 \pi) \zeta_0 = (1/3) (m c/e B_n) z_n \zeta_0 \quad [\text{cm}] , \quad (65)$$

wo aus (52) und analog zu (56)

$$\zeta_0 = 3 (1 - 1/z_n^2)^{\frac{1}{2}} [1 - (\sqrt{5}/2) \tau] \quad (66)$$

ist. Endlich erhält man aus  $\Gamma$  analog zu {15} die *Verlustleistung* des Hohlraumresonators

$$N_{\text{res}} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 / \mu_0) (2 \pi \varrho / t) \Gamma U^2 \quad [\text{W}] .$$

Daraus ergibt sich wegen (9), (8), (60), (55) und (5)

$$N_{\text{res}} = (10^3/24) (15/\pi)^{\frac{1}{2}} (m c^2/e)^{3/2} \varrho^{\frac{1}{2}} B_n^{\frac{1}{2}} \Gamma z_n^{-\frac{1}{2}} (z_n - 1)^2 n^{-2} \cos^2 \Phi_s [\text{W}] . \quad (67)$$

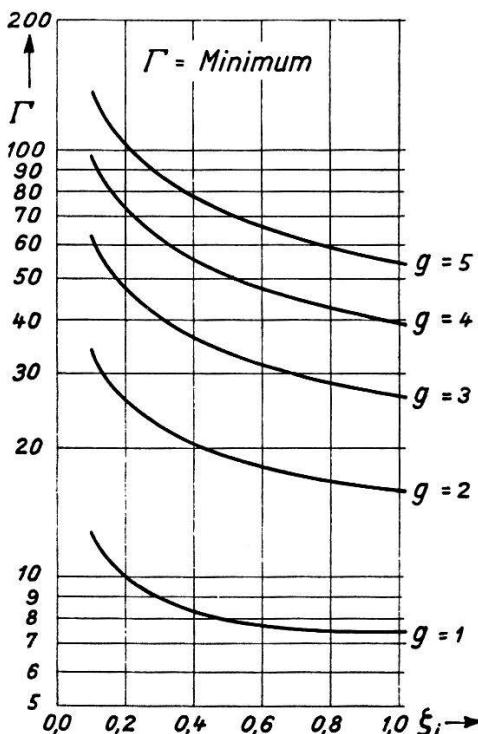


Fig. 10.

Für die den 4 Eckpunkten der rechteckähnlichen Bereiche in Fig. 6 und 7 entsprechenden Daten sind die zugehörigen Hohlraumresonatoren in der voranstehend beschriebenen Weise berechnet worden. Die Ergebnisse finden sich in der anliegenden Tabelle.

Die Genauigkeit ist die des Rechenschiebers mit der Basislänge 25 cm. Die mit der graphischen Interpolation zwischen den beiden Resonanzbedingungen {5} und {39} verbundene Unsicherheit in der Bestimmung des Wertes  $\alpha$  aus  $\zeta_a$  wird zu  $\pm 5\%$  geschätzt.

In all den Fällen, wo grössere Unterschiede zwischen  $\zeta_0$  und  $\zeta_i$  bestehen, müsste bei einer genaueren Berechnung des Kapazitätsmasses  $g$  statt der konzentrierten Kapazität (54) die entsprechende dynamische Kapazität eingesetzt werden.

Die Hochfrequenzverluste in der konzentrierten Kapazität und in eventuellen metallenen Schirmen, welche die Beschleunigungsstrecke  $S$  unterteilen, sowie der Wirkungsgrad des speisenden Senders sind in der Resonatorleistung  $N_{\text{res}}$  nicht berücksichtigt.

In der letzten Zeile der Tabelle ist die den Fig. 6 und 7 zugrundeliegende und nach (31) gerechnete obere Grenze  $\gamma N_0$  für die Erregerleistung des Magnetsystems aufgeführt.

Für niedrige Induktion und hohe Stromdichte, also für die drei Fälle  $\{10^4 B_n = 1,0; I = 2000\}$  bei  $U_n = 10$  bzw.  $U_n = 100$  bzw.  $U_n = 1000$  ist der relative Unterschied zwischen den Leistungen  $N_{\text{res}}$  und  $\gamma N_0$  am kleinsten. Für  $U_n = 10$  ist  $\gamma N_0$  etwa 1/5 von  $N_{\text{res}}$ ,

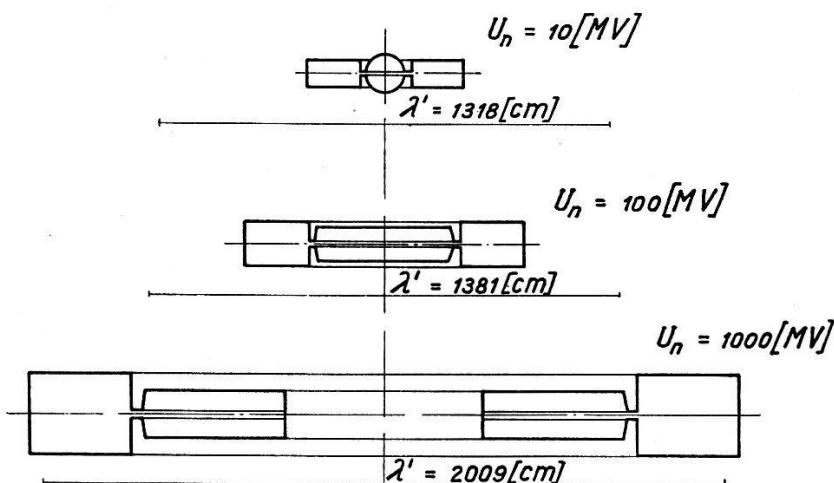


Fig. 11.

für  $U_n = 100$  noch 1/4, während für  $U_n = 1000$  die Erregerleistung des Magnetsystems  $N_0$  um etwa 15 % die Hochfrequenzverlustleistung  $N_{\text{res}}$  des Resonators übertrifft. Vermutlich müsste man mindestens in den beiden Fällen  $U_n = 10$  und  $U_n = 100$  die Anzahl  $n$  der Leitkanäle und damit die Stromdichte  $I$  heraufsetzen, um sich dem Minimum der sich aus  $\gamma N_0$  und  $N_{\text{res}}$  zusammensetzenden Gesamtverluste anzunähern. Für die orientierende Berechnung dieses Minimums und der zu ihm gehörenden Anzahl  $n$  der Leitkanäle sind die Unterlagen durch die vorliegende Arbeit gegeben. Bei Projekten wird man berücksichtigen müssen, dass die Erregerleistung als Gleichleistung, die Hochfrequenzverlustleistung aber oft als impulsgetastete Leistung einzusetzen sind.

In Fig. 11 sind für die 3 Fälle  $\{10^4 B_n = 1,0; I = 2000\}$  bei  $U_n = 10$  bzw.  $U_n = 100$  bzw.  $U_n = 1000$  die Meridianschnitte der Hohlraumresonatoren mit der zugehörigen Wellenlänge masstäblich dargestellt. Im Fall  $U_n = 1000$  besteht die Möglichkeit, den inneren offenen Rand der konzentrierten Kreisring kapazität durch

Tabelle II.

$U_n$	[MV] . . .			10			100			1,000		
	$10^4 B_n$	[V sec cm <sup>-2</sup> ].	n	1,0	2,0	659	1,0	2,0	690	1,0	2009	2005
$I$	$\lambda' = \lambda/3$	[cm] . . .	200	2000	200	2000	200	2000	200	2000	200	2000
$a$	[em]	. . .	10,92	3,45	19,59	5,38	10,92	3,45	19,59	5,38	10,92	3,45
$\tau$	. . .	. . .	0,262	0,1466	0,793	0,353	0,818	0,0457	0,2475	0,1102	0,02332	0,01302
$n$	. . .	. . .	4,98	7,90	3,01	4,10	14,02	24,5	5,37	10,66	66,7	119,4
$g$	. . .	. . .	2,400	2,125	2,188	1,340	2,184	2,135	1,344	1,204	2,741	2,741
$\zeta_0$	. . .	. . .	0,218	0,258	0,0348	0,186	0,856	0,894	0,682	0,826	2,214	2,237
$\zeta_i$	. . .	. . .	0,403	0,358	0,582	0,430	1,032	0,990	1,202	1,058	2,330	2,305
$\zeta_a$	. . .	. . .	1,11	1,09	1,47	1,34	1,90	1,86	2,25	2,12	3,34	3,25
$\alpha$	. . .	. . .	0,37	0,38	0,46	0,54	0,58	0,58	0,74	0,79	0,69	0,75
$T$	. . .	. . .	26,5	23,0	20,5	11,9	17,5	17,3	10,0	9,2	20,1	20,2
$S$	[cm]	. . .	5,0	3,2	8,3	6,1	17,8	10,2	46,5	23,5	37,5	20,9
$R_0$	[cm]	. . .	46	54	3,7	19,5	188	197	75	91	708	716
$R_i$	[cm]	. . .	85	75	61	45	227	218	132	116	746	738
$R_a$	[cm]	. . .	232	228	154	140	418	408	247	233	1067	1039
$A$	[cm]	. . .	78	80	48	57	128	128	81	86	222	240
$N_{\text{res}} \cdot 10^{-3}$	[W]	. . .	3140	1090	9480	2970	25800	8360	142000	33200	108000	33800
$\gamma N_0 \cdot 10^{-3}$	[W]	. . .	14,9	225	15,7	152	2120	82,5	1150	2194	38950	1184

Legende: Deuteronen  $e/m = 4,790 \cdot 10^{11} [\text{V}^{-1} \text{cm}^2 \text{sec}^{-2}]$ 

$$b = s = 3 \quad [\text{cm}] \qquad \qquad \qquad \rho = 2 \cdot 10^{-6} \quad [\Omega \text{cm}]$$

$$\mathfrak{E} = 4 \cdot 10^5 \quad [\text{V cm}^{-1}] \qquad \qquad \cos \Phi_s = 1$$

einen unbelasteten, also  $\lambda'/4$ -äquivalenten torusförmigen Resonanzraum abzuschliessen.

Durch die Wahl einer gegenüber der Umlauffrequenz der Teilchen dreimal höheren Frequenz der beschleunigenden Wechselspannung entsprechend (55) bedarf die Frage des Einflusses der Startphase einer gegenüber der kürzlich erschienenen Veröffentlichung<sup>2)</sup> ergänzenden Betrachtung. Die folgenden Bezeichnungen

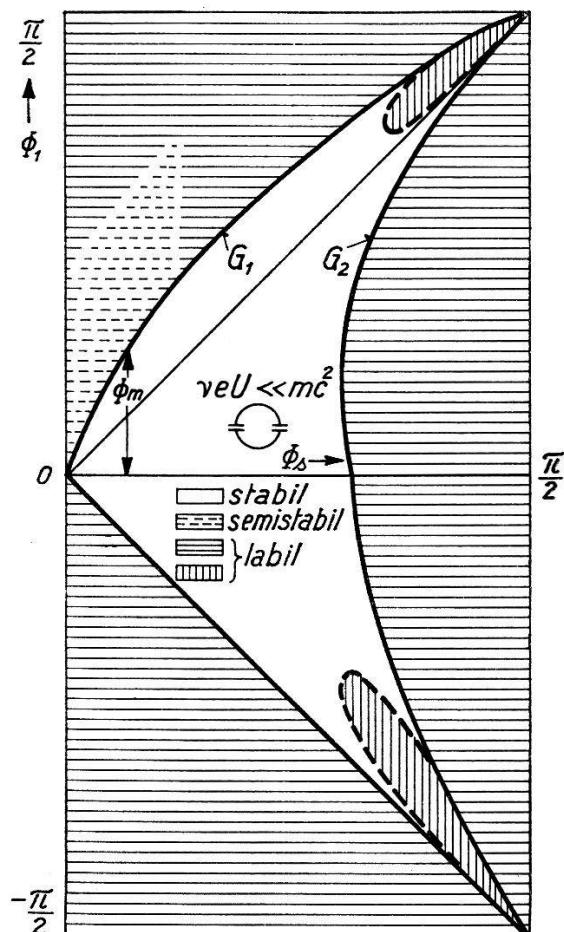


Fig. 12.

stimmen überein mit den Bezeichnungen, die folgenden Hinweise auf Formeln und Figuren beziehen sich auf die Formeln und Figuren jener Veröffentlichung.

Da nun das synchrone Teilchen in Abständen von  $3\pi$  beschleunigt wird, tritt in Gleichung (2) an Stelle von  $2\pi$  der Faktor  $3\pi$ . Im Sonderfall

$N = 1/2; E_0 = mc^2; \nu eU \ll mc^2; 2$  Beschleunigungen/Umlauf folgen wieder durch numerische Auswertung der Differenzengleichungen (1) und (2) an Stelle von Fig. 2 und 4 die beiliegenden Fig. 12 und

13. Man erkennt, wie zu erwarten, das Gebiet mit stabilen Teilchenbahnen ist in Fig. 12 kleiner als in Fig. 2 und die Stromspannungskennlinie der Maschine fällt in Fig. 13 steiler ab als die entsprechende Kennlinie in Fig. 4.

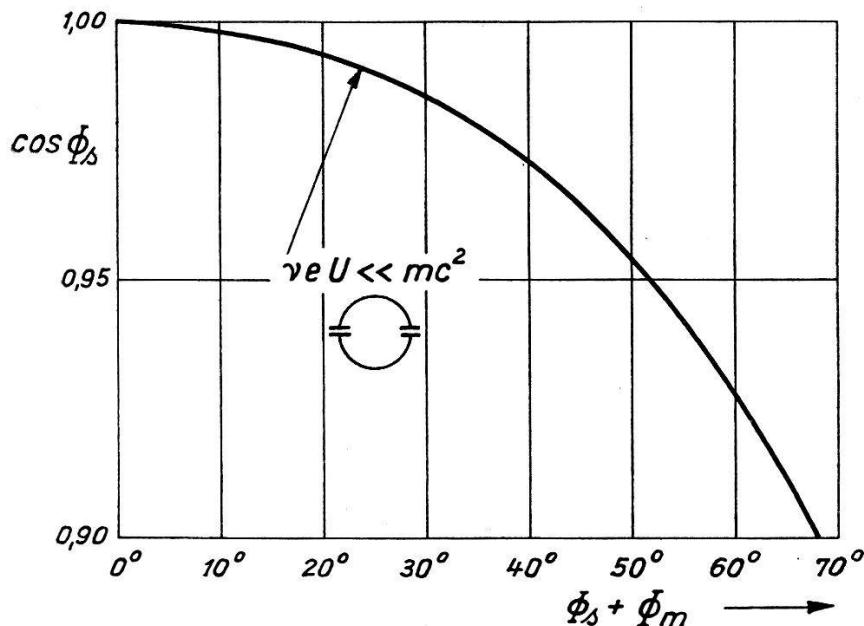


Fig. 13.

Der Firma H. W. EGLI AG. in Zürich danke ich verbindlichst, dass sie mir für Rechnungen in dieser Arbeit eine „Madas“ Rechenmaschine zur Verfügung gestellt hat.

### Literatur.

- <sup>1)</sup> W. DÄLLENBACH, Bulletin SEV, **37**, 699 (1946). Experientia II, 267 (1946).
- <sup>2)</sup> id., Helv. Phys. Acta, **20**, 267 (1947).
- <sup>3)</sup> id., Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **61**, 129 (1943).