Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 21 (1948)
Heft: I

Artikel: Über die Bildung des Strichfokus in Röntgenrohren
Autor: Ollendorff, Franz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111894

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Copyright 1948 by Schweizerische Physikalische Gesellschaft.
Société Suisse de Physique. — Società Fisica Svizzera.
Nachdruck verboten. — Tous droits réservés. — Printed in Switzerland.

Über die Bildung des Strichfokus in Röntgenröhren

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Laboratorium des Hebrew Technical College Haifa (Palestina).

von **Franz Ollendorff.**

(29. IX. 1947.)

Inhalt. 1. Das Modell der Röntgenröhre. 2. Das Primärfeld. 3. Das Sekundärfeld. 4. Die Grundgleichungen der zweidimensionalen Elektronenoptik. 5. Die Elektronenbahnen der Röntgenröhre.

1. Das Modell der Röntgenröhre.

Gegeben eine Glühkathoden-Röntgenröhre mit feststehender Anode. Es liegt die Aufgabe vor, die von der Kathode emittierten Elektronen in einem, auf der Anodenoberfläche liegenden (Strich-) Fokus — als Quelle der Röntgenstrahlen — zu sammeln; oder, elektronenoptisch gesprochen: das von den Elektronenstrahlen vermittelte Bild der Kathode soll gerade in die Anodenoberfläche fallen.

Der theoretischen Behandlung des Problemes legen wir ein *kartesisches* Rechtssystem x, y, z zugrunde. Die Kathode besitze die Gestalt eines Kreiszylinders vom Halbmesser ϱ_0, dessen Achse parallel zur z-Achse verläuft und die Ebene $z = 0$ im Punkte $(0, -t)$ schneidet (Fig. 1). Zum Schutze der Kathode gegen überstarke elektrische Felder befindet sich in der Ebene $y = 0$ eine leitende Platte, welche durch den symmetrisch zur z-Achse gelegenen Spalt der Breite $2d$ zwecks freien Durchtrittes der Elektronen unterbrochen ist. Die Anodenoberfläche verläuft im Abstande h planparallel zur Schutzplatte.

2. Das Primärfeld.

Das elektrische Feld des Röhrenmodelles ist unabhängig von z. Daher beschreiben wir es erschöpfend durch Angabe seines skalaren Potentiales $\varphi = \varphi(x, y)$, welches wir durch Hinzufügung der Stromfunktion $\psi = \psi(x, y)$ zum komplexen Potential $\chi = \varphi + i\psi$ $[i = \sqrt{-1}]$ ergänzen. Wir suchen zunächst dasjenige „Primärfeld" χ_P, welches allein von der Anode und der Schutzplatte (bei fortgedachter Kathode) erzeugt wird; als Randbedingungen gelten: $\varphi_P = \varphi_a$ auf der Anode, $\varphi_P = 0$ auf der Schutzplatte.

Wir setzen $x + iy = \zeta$ und bezeichnen in der hierdurch definierten, komplexen ζ-Ebene nach Fig. 1

$$A = (d, \pm 0); \quad B=(\infty, +0)=(\infty, +h); \quad C=(-\infty, +h)=(-\infty, +0),$$
$$D = (-d, \pm 0) \qquad E = (-\infty, -0) = (+\infty, -0).$$

Fig. 1.
Modell der untersuchten Röhre.

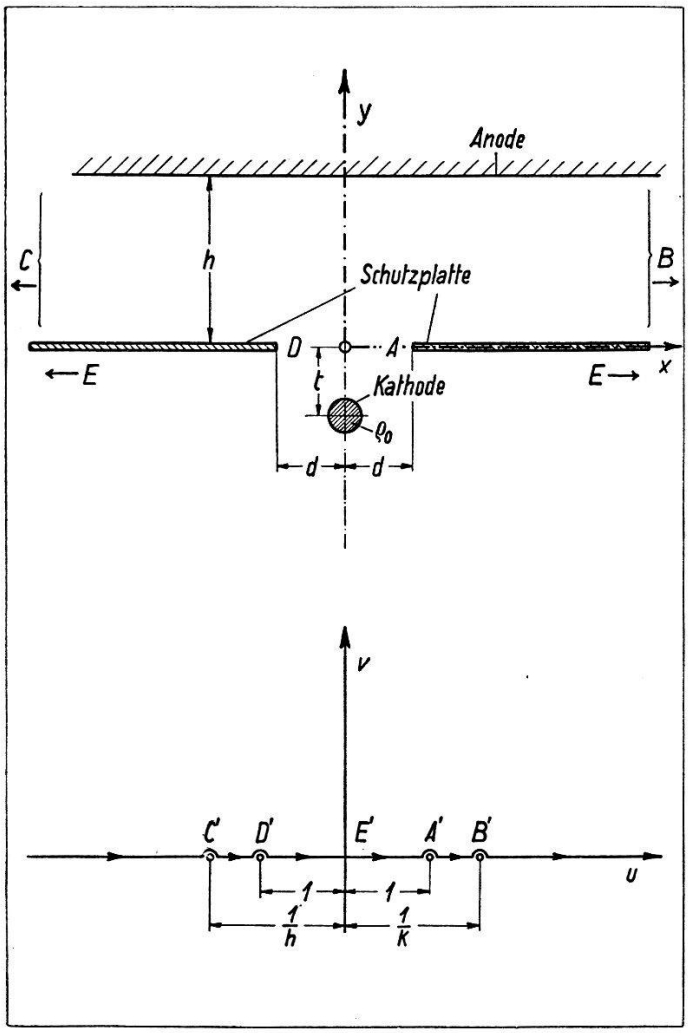

Fig. 2.
Konforme Abbildung auf die w-Ebene.

Nunmehr rufen wir eine komplexe $w = u + iv$-Ebene zu Hilfe, auf deren u-Achse wir den Umfang des Polygones $A\ B\ C\ D\ E\ A$ konform abbilden wollen. Dabei soll das Innere des umfahrenen Gebietes in die Halbebene $v > 0$ transformiert werden, und die Bildpunkte $A' \ldots E'$ der Ecken $A \ldots E$ sollen sich in

$$A' = (1, +0); \quad B' = (1/k, +0); \quad C' = (-1/k, +0); \quad D' = (-1, +0);$$
$$E' = (0, +0)$$

vorfinden (Bild 2); der reelle Modul $k > 1$ ist zunächst noch unbekannt.

Der SCHWARZ-CHRISTOFFEL'sche Satz führt auf die Differentialgleichung der verlangten Abbildung:

$$\frac{d\zeta}{dw} = C\,\frac{1-w^2}{w^2}\,\frac{1}{1-k^2w^2} \equiv C\left[\frac{1}{w^2} - \frac{1-k^2}{k}\,\frac{k}{1-k^2w^2}\right] \tag{1}$$

wobei C — neben k — eine weitere Konstante bedeutet. Durch elementare Integration folgt also

$$\zeta = C\left[-\frac{1}{w} - \frac{1-k^2}{2k}\ln\frac{1+kw}{1-kw}\right]. \tag{2}$$

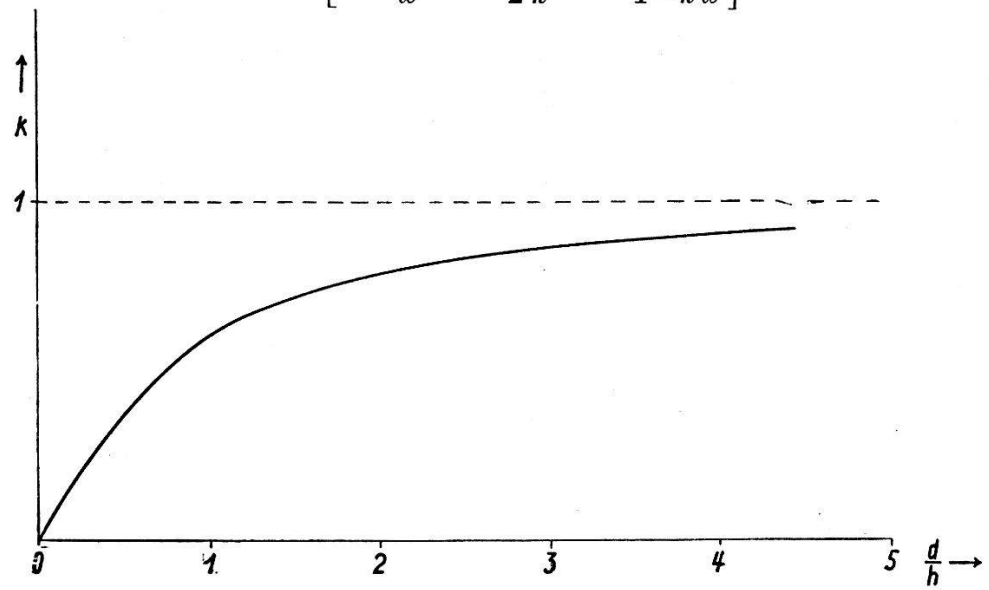

Fig. 3.
Der Modul k in Abhängigkeit von den Daten des Röhrenmodelles.

Dabei soll weiterhin als Logarithmus jener „Hauptwert" benutzt werden, dessen Imaginärteil zwischen $(-\pi)$ und $(+\pi)$ liegt. Wählen wir daher eine hinreichend kleine, relle Zahl $\varepsilon > 0$, so liefern die Abbildungsbedingungen

$$ih = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\zeta\left(\frac{1}{k}+\varepsilon+i\,0\right) - \zeta\left(\frac{1}{k}-\varepsilon+i\,0\right)\right\} = -i\pi C\,\frac{1-k^2}{2k}. \tag{3}$$

Weiter wird für $w = 1 + i\cdot 0$

$$d = C\left[-1 - \frac{1-k^2}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right]. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) entspringt die Modulgleichung

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{2k}{1-k^2} + \ln\frac{1+k}{1-k}\right] = \frac{d}{h} \tag{5}$$

welche in Fig. 3 graphisch dargestellt ist. Nachdem somit k und C als bekannt gelten dürfen, lautet die Abbildung (2) explizit

$$\zeta = \frac{h}{\pi}\left[\frac{2k}{1-k^2}\,\frac{1}{w} + \ln\frac{1+kw}{1-kw}\right]. \tag{6}$$

Die in die w-Ebene übertragenen Randbedingungen lauten:

$$\varphi_P = \varphi_a \text{ für } |u| > \frac{1}{k}; \qquad \varphi_P = 0 \text{ für } |u| < \frac{1}{k}.$$

Sie werden von dem komplexen Potential befriedigt

$$\chi_P = \frac{\varphi_a}{i\pi} \ln \frac{1+kw}{1-kw}; \qquad w = \frac{i}{k} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\chi_P}{\varphi_a} \tag{7}$$

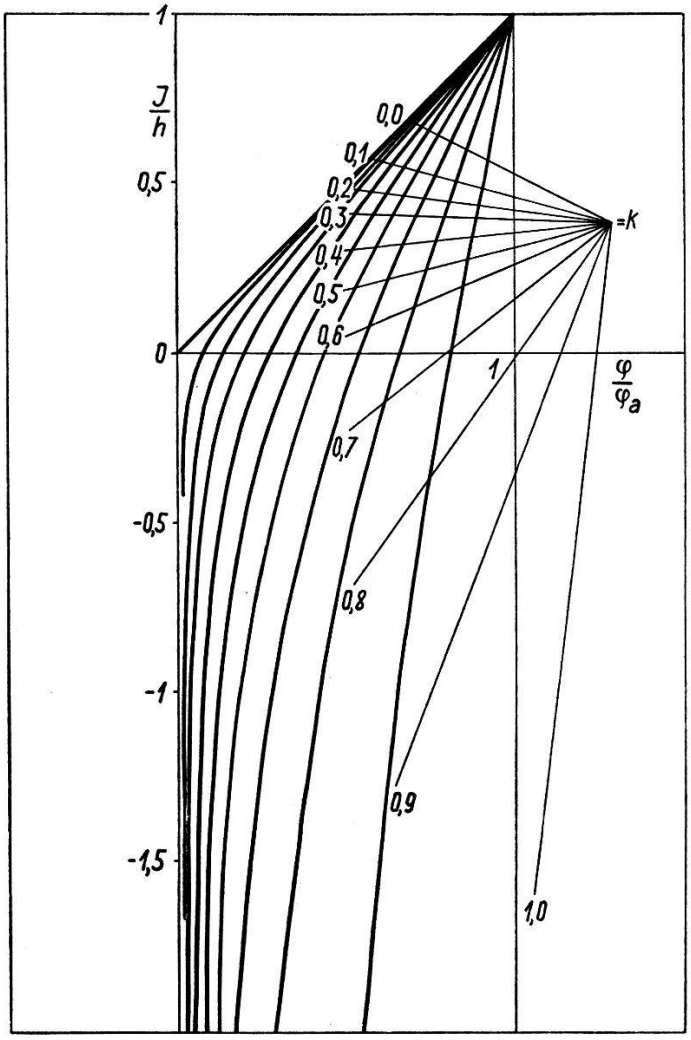

Fig. 4.
Potentialverlauf längs der Symmetrieebene.

so dass man durch Einsetzen in (6) findet

$$\zeta = i\,h \left[\frac{\chi_P}{\varphi_a} - \frac{1}{\pi} \frac{2\,k^2}{1-k^2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} \frac{\chi_P}{\varphi_a} \right]. \tag{8}$$

Insbesondere verschwindet hiernach die Stromfunktion längs der y-Achse, so dass dort das Potential φ_P aus

$$y = h \left[\frac{\varphi_P}{\varphi_a} - \frac{1}{\pi} \frac{2\,k^2}{1-k^2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} \frac{\varphi_P}{\varphi_a} \right] \tag{8a}$$

zu berechnen ist; Fig. 4 vermittelt das Ergebnis der numerischen

Auswertung. Um die längs der y-Achse herrschende Feldstärke $E_P \equiv E_{P_y} = -\frac{\partial \varphi_P}{\partial y}$ zu finden, differenzieren wir (8a) nach y:

$$1 = \frac{h}{\varphi_a}\left[1 + \frac{k^2}{1-k^2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\varphi_P}{\varphi_a}}\right]\frac{\partial \varphi_P}{\partial y}. \tag{9}$$

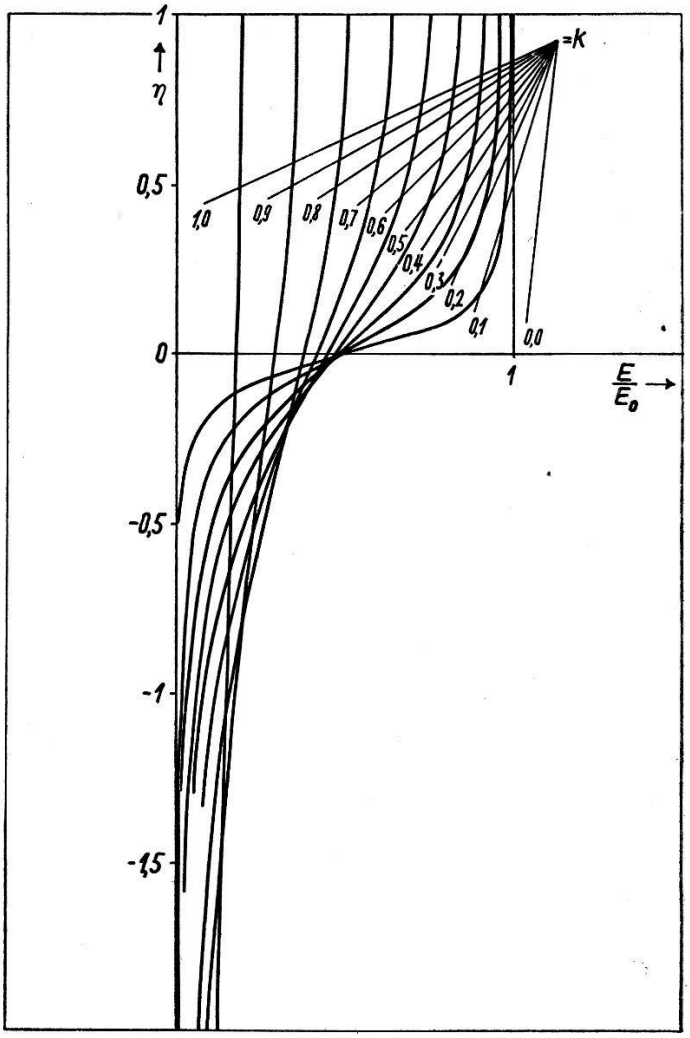

Fig. 5.
Feldverlauf in der Symmetrieebene.

Wir führen die im Falle der ungeschlitzten Schutzplatte ($d \to 0$) resultierende Feldstärke $E_0 = -\frac{\varphi_a}{h}$ ein und erhalten in

$$\frac{E_P}{E_0} = \frac{1}{1+\frac{k^2}{1-k^2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{\varphi_P}{\varphi_a}}} \tag{9a}$$

zusammen mit (8) eine Parameterdarstellung für E_P/E_0, welche durch Fig. 5 veranschaulicht wird.

In der Regel wählt man $d \ll h$, sodass der Modul k klein gegen 1 ausfällt. Daher erhalten wir eine hinreichend genaue Darstellung des Primärfeldes in der Umgebung der Schutzplatten-Öffnung, indem wir zur Grenze $k \to 0$ übergehen. Zu diesem

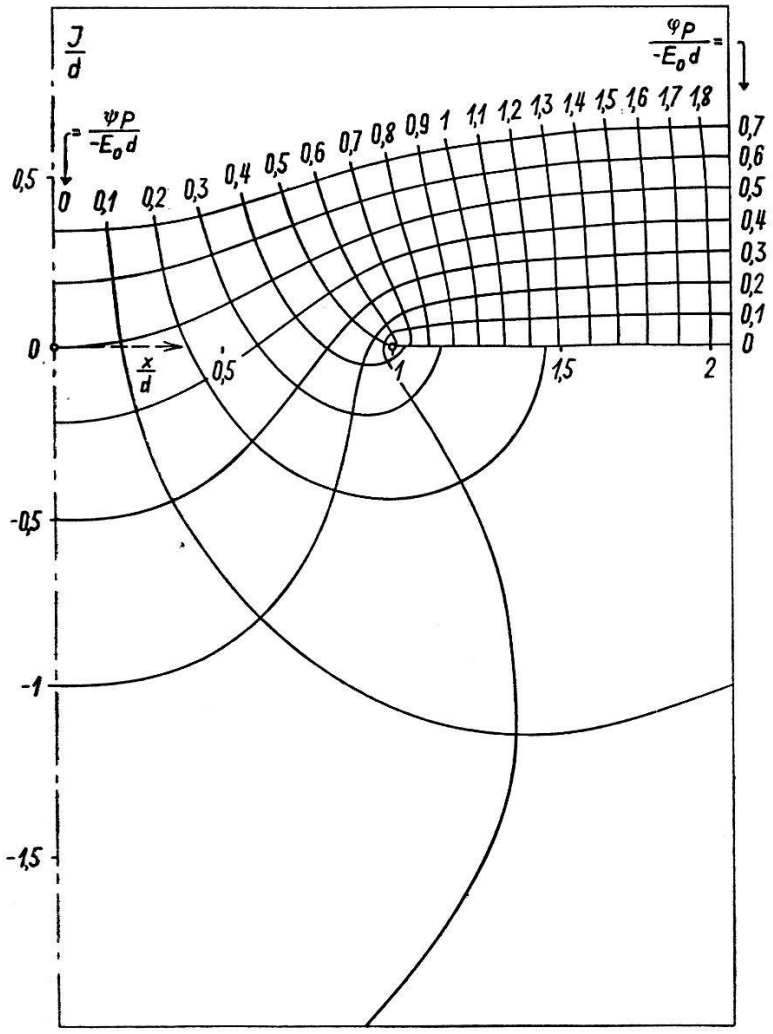

Fig. 6.

Feldbild in der Umgebung der Schutzplatten-Öffnung.

Zwecke schreiben wir zunächst (6) mit Beachtuug von (5) in der Form

$$\zeta = d \frac{\frac{1}{w} + \frac{1-k^2}{2k} \ln \frac{1+kw}{1-kw}}{1 + \frac{1-k^2}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}} \tag{10}$$

aus welcher wir entnehmen

$$\lim_{k \to 0} \zeta = d \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{w} + w \right]. \tag{10a}$$

Gleichzeitig entsteht aus (7), mit abermaliger Benutzung von (5)

$$\chi_P = \varphi_a \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{1}{i} \frac{\ln \frac{1+kw}{1-kw}}{\frac{2k}{1-k^2} + \ln \frac{1+k}{1-k}}; \qquad \lim_{k \to 0} \chi_P = \varphi_a \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{w}{2i} \tag{11}$$

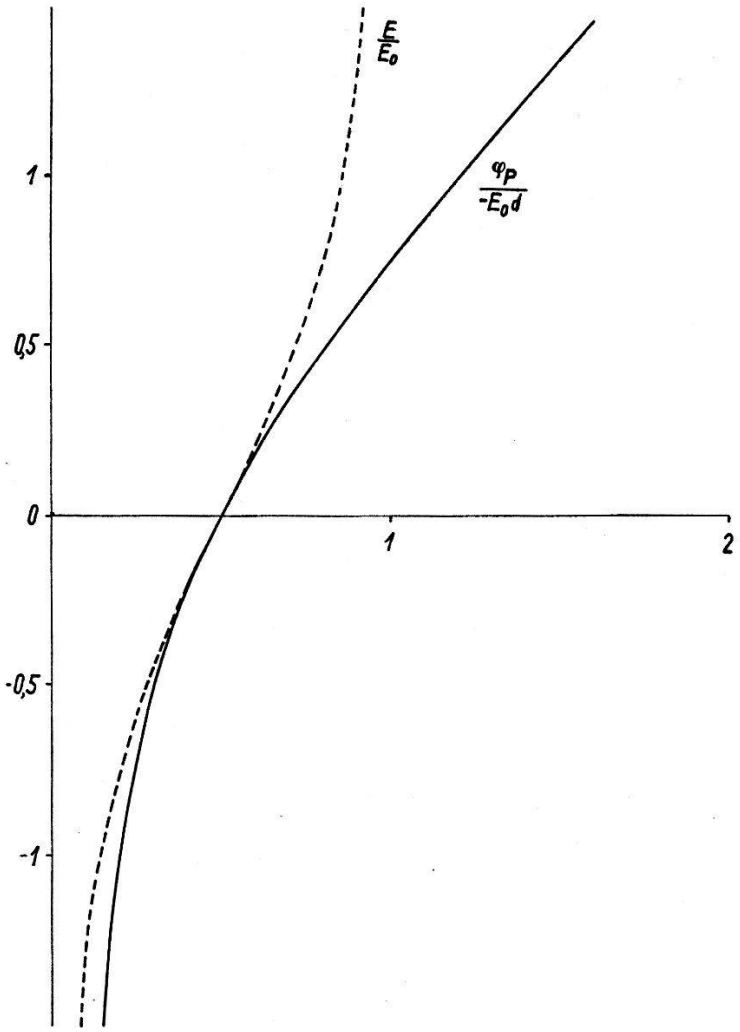

Fig. 7.

Potential- und Feldverlauf in der Symmetrieebene für $h \to \infty$.

also durch Einsetzen in (10a)

$$\frac{\zeta}{d} = \frac{1}{2i} \left[\frac{-E_0 \cdot d}{2\chi_P} - \frac{2\chi_P}{-E_0 \cdot d} \right]. \tag{12}$$

Fig. 6 zeigt das Netz der Aequipotential — und Feldlinien, welches diesem komplexen Potential entspricht. Längs der y-Achse gilt insbesondere

$$\frac{y}{d} = \frac{1}{2} \left[\frac{2\varphi_P}{-E_0 d} - \frac{-E_0 d}{2\varphi_P} \right]. \tag{12a}$$

Man berechnet hieraus

$$\frac{\varphi_P}{-E_0 d} = \frac{1}{2}\left[\frac{y}{d} + \sqrt{\left(\frac{y}{d}\right)^2 + 1}\right] \tag{12b}$$

sowie

$$\frac{E_P}{E_0} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\frac{y}{d}}{\sqrt{\left(\frac{y}{d}\right)^2 + 1}}\right]. \tag{12c}$$

Der Inhalt der Gleichungen (12b) und (12c) wird durch Fig. 7 veranschaulicht.

3. Das Sekundärfeld.

Dem Primärpotential χ_P superponiert sich das Sekundärpotential χ_s der Kathode: Sei λ ihre Linienladung je Längeneinheit des Kathodenzylinders; sie erteilt seiner Oberfläche das — vorerst unbekannte — Potential φ_{s_K}, während gleichzeitig φ_s sowohl auf der Anode wie auf der Schutzplatte verschwindet.

Zur Lösung des hierdurch umschriebenen Potentialproblemes übertragen wir die Kathode aus der ζ-Ebene in die w-Ebene: Aus (6) entnehmen wir, mit $\zeta = it$ für den Ort $w_K = 0 + iv_K$, welcher als Spur der transformierten Zylinderachse erscheint, die Gleichung

$$t = \frac{h}{\pi}\left[\frac{2k}{1-k^2}\frac{1}{v_K} - 2 \operatorname{arctg} k v_K\right]. \tag{13}$$

Es genügt für unsere Zwecke, sich auf den Fall $d \ll h$ zu beschränken, so dass wir aus (10a) entnehmen

$$t = \frac{d}{2}\left[\frac{1}{v_K} - v_K\right]; \quad v_K = -\frac{t}{d} + \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 + 1}. \tag{13a}$$

Welches ist der Halbmesser ϱ_K des in die w-Ebene übertragenen Kathodendrahtes? Wir setzen $\varrho_0 \ll d$ voraus; dann ist, mit hinreichender Genauigkeit,

$$\frac{\varrho_K}{\varrho_0} = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=-t} = \frac{1}{d}\left[1 - \frac{\frac{t}{d}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}\right]. \tag{14}$$

Nun lautet die Lösung des Potentialproblemes in der w-Ebene

$$\chi_s = \frac{\lambda}{2\pi\Delta} \ln \frac{w + iv_K}{w - iv_K}; \quad \Delta = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}}. \tag{15}$$

Insbesondere findet sich hieraus das sekundäre Kathodenpotential selbst zu

$$\varphi_{s_K} = \frac{\lambda}{2\pi\Delta} \ln \frac{2v_K}{\varrho_K} = \frac{\lambda}{2\pi\Delta} \ln \frac{2d\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}{\varrho_0}. \tag{15a}$$

Indem wir nun das Primärpotential hinzufügen, ergibt sich mit Rücksicht auf (12b) — nach Substitution von $(-E_0) = \varphi_a/h$ — als Gesamtpotential der Kathode

$$\varphi_K = \frac{1}{2}\frac{d}{h}\varphi_a\left[\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}} - \frac{t}{d}\right] + \frac{\lambda}{2\pi\Delta} \ln \frac{2d\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}{\varrho_0}. \tag{16}$$

Hieraus folgt der auf die Längeneinheit der Kathode entfallende Anteil der Freien Feldenergie

$$f_K = \frac{1}{2}\lambda\varphi_K \tag{17}$$

und die entsprechende mechanische Kraft K in Richtung der positiven y-Achse ist

$$K = \frac{\partial f_K}{\partial t} = \frac{\lambda}{2d}\left[\frac{1}{2}\frac{d}{h}\varphi_a\left\{\frac{\frac{t}{d}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}} - 1\right\} + \frac{\lambda}{2\pi\Delta}\frac{\frac{t}{d}}{1+\frac{t^2}{d^2}}\right]. \tag{18}$$

Nun befindet sich die Kathode, von dem Spannungsabfall ihres Heizstromes abgesehen, in der Regel auf dem Potential der Schutzplatte, welches wir als Basis gewählt hatten: Aus der Bedingung $\varphi_K = 0$ folgt

$$\frac{\lambda}{2\pi\Delta} = -\frac{1}{2}\frac{d}{h}\varphi_a \frac{\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}} - \frac{t}{d}}{\ln\frac{2d\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}{\varrho_0}}. \tag{19}$$

Daher findet man durch Substitution in (18)

$$K = \frac{\pi\Delta}{\ln\frac{2d\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}{\varrho_0}} \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{d}{h}\varphi_a\right)^2\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}} - \frac{t}{d}\right)^2}{d\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}\left[1 + \frac{1}{\ln\frac{2d\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}{\varrho_0}} \cdot \frac{\frac{t}{d}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{d^2}}}\right]. \tag{18a}$$

Im Lichte dieser Gleichung eröffnet sich die Möglichkeit, die mechanische Kraft auf Null zu kompensieren, indem man die Kathode oberhalb der Schutzplatte anordnet [$t < 0$]: Die in Richtung der positiven y-Achse gerichtete „Fremdkraft" des Primärfeldes

auf die geladene Kathode steht im Gleichgewicht mit der entgegengesetzt wirkenden „Eigenkraft" des Sekundärfeldes. Indessen wird sich herausstellen, dass eine solche Lage der Kathode — abgesehen von den hierbei auftretenden Schwierigkeiten der Elektronenemission — nur durch einen Verzicht auf die Fokussierung erkauft werden kann, es sei denn, man sieht zu diesem Zwecke zusätzliche elektronenoptische Steuerorgane vor; wir werden deshalb die genannte Lage weiterhin nicht in Betracht ziehen.

4. Grundgleichungen der zweidimensionalen Elektronenoptik.

Gegeben sei in einem *kartesischen* Koordinatensysteme x, y, z das von z unabhängige elektrische Skalarpotential $\varphi(x,y)$. Dieses Feld sei symmetrisch zur Ebene $x = 0$ verteilt, und überdies sei in dieser Ebene selbst $\varphi = f(y)$ explizit bekannt. Wie lautet die Potentialfunktion in der Nachbarschaft der Symmetrieebene?

Wir gehen von der FOURIER'schen Integraldarstellung aus

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imy}\, dm \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{-im\lambda}\, d\lambda . \tag{20}$$

Nun genügt φ der LAPLACE'schen Gleichung; vermöge der vorausgesetzten Symmetrie lautet daher das FOURIER'sche Integral des Potentiales für einen beliebigen Aufpunkt

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imy} \cosh m\, x\, dm \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{-im\lambda}\, d\lambda . \tag{21}$$

Wir benutzen die Reihenentwicklung

$$\cosh m\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{2k} x^{2k}}{(2k)!} . \tag{22}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Eigenschaften von $f(\lambda)$ diese Operation gestatten, vertauschen wir in (21) die Reihenfolge von Integration und Summation und finden

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m^{2k} e^{imy}\, dm \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{-im\lambda}\, d\lambda . \tag{21a}$$

Aus dem Vergleich mit (20) entnimmt man also

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^{2k} f}{d y^{2k}} \tag{21b}$$

und hieraus ergibt sich für die elektrische Feldkomponente E_x

$$E_x = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \frac{d^{2k} f}{dy^{2k}}. \tag{23}$$

Insbesondere folgt für die unmittelbare Nachbarschaft der Symmetrieebene bis auf Glieder höherer Ordnung

$$E_x = x \frac{d^2 f}{dy^2}. \tag{23a}$$

Nun treiben wir GAUSS'sche Elektronenoptik, indem wir in der Ebene $z = 0$ die Bahn von Elektronen verfolgen, welche der Symmetrieachse benachbart sind. Falls das Elektron (Masse m, Ladung q) die Kathode ($\varphi = 0$) mit sehr (unendlich) kleiner Geschwindigkeit verlässt, ist dann seine achsenparallele Geschwindigkeitskomponente v_y aus der Gleichung zu berechnen

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{dv_y}{dt} = q \frac{df}{dy} \tag{24}$$

oder (Energie-Integral)

$$\frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = qf. \tag{24a}$$

Hier darf trotz der in Röntgenröhren angewandten Höchstspannungen die relativistische Änderung der Elektronenmasse ausser Betracht bleiben, solange wir uns auf die Umgebung der Kathode und der Schutzplatte beschränken und gleichzeitig, wie es in den vorangehenden Abschnitten geschah, den Abstand der Anode von diesem Elektrodensystem als hinreichend gross voraussetzen. In der nämlichen Genauigkeit unterliegt die quer zur Achse gerichtete Geschwindigkeitskomponente dem Gesetze

$$m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -qE_x. \tag{25}$$

Nun ist, für achsennahe Strahlen,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{26}$$

Daher entsteht aus (25) mit Rücksicht auf (23a) die Differentialgleichung der Elektronenbahn

$$\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{f'(y)}{f(y)} \frac{dx}{dy} + \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f(y)} x = 0. \tag{27}$$

5. Die Elektronenbahnen der Röntgenröhre.

Wir kehren zu dem untersuchten Röhrenmodell zurück. In ihm ist die Kathode, gemäss der Annahme $\varrho_0 \ll d$, als „Nadelelektrode" zu charakterisieren: schon in äusserst kleinem Abstande von ihrer emittierenden Oberfläche geht das Gesamtpotential merklich in das Potential allein des Primärfeldes über. Daher dürfen wir in hinreichender Genauigkeit für die Funktion f der Gleichung (27) den Ausdruck (12b) substituieren. Wir setzen vereinfachend, indem wir d als sozusagen natürliche Längeneinheit des Problemes einführen, $\xi = x/d$ und $\eta = y/d$ („numerische Koordinaten") und erhalten für die gesuchten Elektronenbahnen die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\xi}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\frac{d\xi}{d\eta} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\eta^2)^{3/2}(\eta+\sqrt{1+\eta^2})}\xi = 0. \qquad (28)$$

Infolge der verwickelten Gestalt ihrer Koeffizienten kann man — meines Wissens nach — ihre Lösung nicht mittels schon bekannter Funktionen ausdrücken. Wir haben daher die vorgelegte Differentialgleichung numerisch integriert. Hierbei verbürgt uns ihr linearer Charakter, dass wir sie mit der Kenntnis zweier, linear voneinander unabhängiger Lösungen $g_1(\eta)$ und $g_2(\eta)$ vollständig beherrschen; diese Fundamentalintegrale seien den Anfangsbedingungen unterworfen

$$\left.\begin{aligned} g_1(0) &= 0; \quad \left(\frac{dg_1}{d\eta}\right)_0 = 1 \\ g_2(0) &= 1; \quad \left(\frac{dg_2}{d\eta}\right)_0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

In der folgenden Tafel sind die Funktionen g_1 und g_2 samt ihren ersten Differentialquotienten g_1' und g_2' numerisch angegeben, während die Figuren 8 und 9 ihren Verlauf veranschaulichen mögen.

In unserer Normierung befindet sich die Kathode am Orte $\tau = -t/d$ der η-Achse. Um den etwa existierenden Fokus der von diesem Punkte emittierten Elektronen zu finden, genügt es, den — vom Ausgangspunkt verschiedenen — Schnittpunkt eines beliebigen Strahles mit der η-Achse aufzusuchen; denn vermöge der Gaussschen Optik ist dann der so gefundene Bildpunkt allen der Kathode entspringenden Strahlen gemeinsam, wie man natürlich auch unmittelbar aus der Lösung der Differentialgleichung ersieht. Wir dürfen hiernach als Anfangsbedingungen der „Kontrollbahn" festsetzen

$$\xi = 0; \quad \frac{d\xi}{d\eta} = 1 \qquad \text{für } \eta = -\tau. \qquad (30)$$

η	g_1	g_1'	g_2	g_2'	η	g_1	g_1'	g_2	g_2'
− 5,0	− 4,747	0,570	− 3,312	1,070	− 2,5	− 2,871	0,979	− 0,640	1,015
− 4,9	− 4,690	0,583	− 3,205	1,073	− 2,4	− 2,773	0,999	− 0,539	1,003
− 4,8	− 4,632	0,596	− 3,098	1,076	− 2,3	− 2,673	1,019	− 0,439	0,990
− 4,7	− 4,572	0,609	− 2,990	1,078	− 2,2	− 2,571	1,039	− 0,340	0,975
− 4,6	− 4,551	0,622	− 2,882	1,079	− 2,1	− 2,467	1,060	− 0,242	0,959
− 4,5	− 4,449	0,636	− 2,774	1,080	− 2,0	− 2,359	1,080	− 0,146	0,941
− 4,4	− 4,385	0,650	− 2,666	1,081	− 1,9	− 2,251	1,100	− 0,052	0,921
− 4,3	− 4,320	0,664	− 2,558	1,082	− 1,8	− 2,140	1,130	+ 0,040	0,898
− 4,2	− 4,254	0,679	− 2,450	1,082	− 1,7	− 2,027	1,149	0,130	0,873
− 4,1	− 4,186	0,694	− 2,342	1,082	− 1,6	− 1,192	1,168	0,217	0,845
− 4,0	− 4,117	0,709	− 2,234	1,082	− 1,5	− 1,795	1,185	0,302	0,814
− 3,9	− 4,046	0,725	− 2,126	1,081	− 1,4	− 1,676	1,202	0,383	0,780
− 3,8	− 3,973	0,741	− 2,018	1,080	− 1,3	− 1,556	1,271	0,461	0,742
− 3,7	− 3,899	0,757	− 1,910	1,079	− 1,2	− 1,434	1,230	0,535	0,700
− 3,6	− 3,823	0,774	− 1,802	1,077	− 1,1	− 1,311	1,240	0,605	0,653
− 3,5	− 3,764	0,791	− 1,694	1,075	− 1,0	− 1,187	1,246	0,670	0,603
− 3,4	− 3,667	0,808	− 1,586	1,072	− 0,9	− 1,062	1,247	0,730	0,550
− 3,3	− 3,586	0,826	− 1,481	1,069	− 0,8	− 0,937	1,245	0,785	0,492
− 3,2	− 3,503	0,844	− 1,374	1,065	− 0,7	− 0,812	1,237	0,834	0,431
− 3,1	− 3,419	0,862	− 1,267	1,060	− 0,6	− 0,688	1,223	0,877	0,367
− 3,0	− 3,333	0,881	− 1,161	1,055	− 0,5	− 0,566	1,202	0,914	0,301
− 2,9	− 3,245	0,900	− 1,055	1,049	− 0,4	− 0,446	1,174	0,944	0,234
− 2,8	− 3,155	0,919	− 0,950	1,042	− 0,3	− 0,329	1,139	0,967	0,169
− 2,7	− 3,063	0,939	− 0,846	1,034	− 0,2	− 0,215	1,097	0,984	0,107
− 2,6	− 2,967	0,959	− 0,743	1,025	− 0,1	− 0,105	1,050	0,995	0,050
− 2,5	− 2,871	0,979	− 0,640	1,015	0,0	0,000	1,000	1,000	0,000

η	g_1	g_1'	g_2	g_2'	η	g_1	g_1'	g_2	g_2'
0,0	0,000	1,000	1,000	0,000	2,5	1,400	0,362	0,580	– 0,160
0,1	0,095	0,950	0,995	– 0,050	2,6	1,436	0,355	0,564	– 0,157
0,2	0,185	0,898	0,986	– 0,092	2,7	1,471	0,348	0,549	– 0,154
0,3	0,270	0,847	0,975	– 0,126	2,8	1,505	0,341	0,534	– 0,152
0,4	0,350	0,798	0,960	– 0,151	2,9	1,593	0,335	0,519	– 0,150
0,5	0,425	0,751	0,943	– 0,170	3,0	1,572	0,329	0,504	– 0,148
0,6	0,496	0,708	0,925	– 0,183	3,1	1,604	0,323	0,489	– 0,146
0,7	0,563	0,669	0,908	– 0,192	3,2	1,636	0,318	0,475	– 0,144
0,8	0,626	0,634	0,888	– 0,197	3,3	1,667	0,313	0,461	– 0,142
0,9	0,686	0,602	0,868	– 0,200	3,4	1,698	0,308	0,447	– 0,140
1,0	0,743	0,573	0,848	– 0,201	3,5	1,728	0,303	0,433	– 0,138
1,1	0,797	0,547	0,828	– 0,200	3,6	1,758	0,299	0,419	– 0,136
1,2	0,849	0,524	0,808	– 0,198	3,7	1,788	0,295	0,406	– 0,134
1,3	0,899	0,503	0,788	– 0,196	3,8	1,817	0,291	0,393	– 0,132
1,4	0,947	0,484	0,769	– 0,193	3,9	1,846	0,287	0,380	– 0,130
1,5	0,994	0,468	0,750	– 0,190	4,0	1,874	0,283	0,367	– 0,128
1,6	1,040	0,455	0,730	– 0,187	4,1	1,901	0,279	0,354	– 0,126
1,7	1,084	0,442	0,717	– 0,184	4,2	1,929	0,276	0,341	– 0,125
1,8	1,127	0,430	0,699	– 0,181	4,3	1,966	0,273	0,329	– 0,124
1,9	1,169	0,419	0,681	– 0,178	4,4	1,993	0,270	0,317	– 0,123
2,0	1,210	0,408	0,663	– 0,175	4,5	2,020	0,267	0,305	– 0,122
2,1	1,250	0,397	0,646	– 0,172	4,6	2,046	0,264	0,293	– 0,121
2,2	1,289	0,387	0,629	– 0,169	4,7	2,072	0,261	0,281	– 0,120
2,3	1,327	0,378	0,612	– 0,166	4,8	2,098	0,258	0,269	– 0,119
2,4	1,364	0,370	0,596	– 0,163	4,9	2,124	0,255	0,257	– 0,118
2,5	1,400	0,362	0,580	– 0,160	5,0	2,149	0,252	0,245	– 0,117

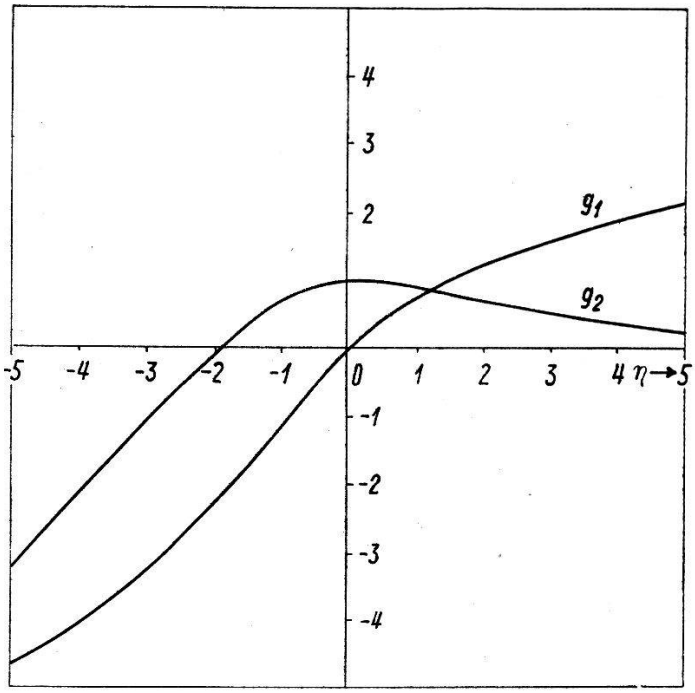

Fig. 8.

Fundamentallösungen g_1 und g_2 der Strahlgleichung.

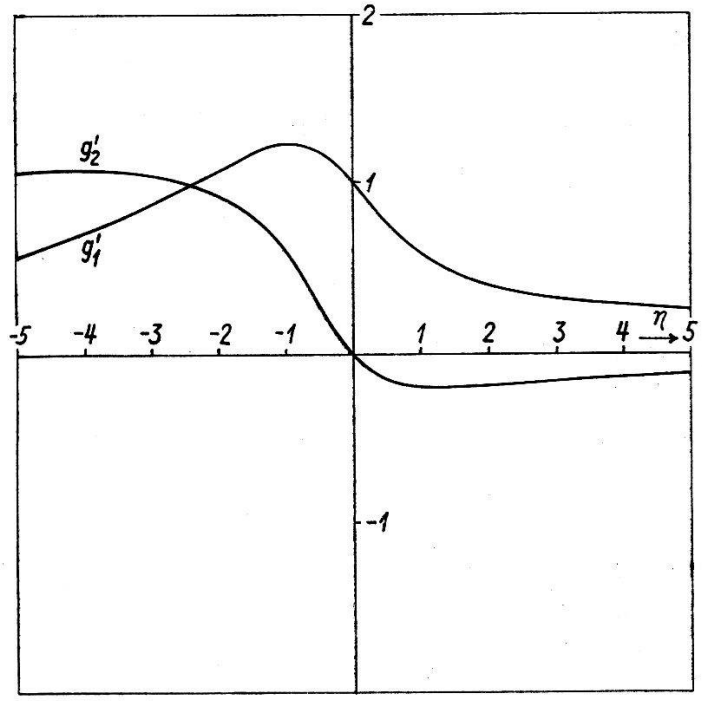

Fig. 9.

Erster Differentialquotient der Funktionen g_1 und g_2.

Die entsprechende Lösung der Differentialgleichung (28) mag in der Form angesetzt werden

$$\xi = \alpha_1 g_1(\eta) + \alpha_2 g_2(\eta). \tag{31}$$

Daher entstehen für die Konstanten α_1 und α_2 die Gleichungen

$$\alpha_1 g_1(-\tau) + \alpha_2 g_2(-\tau) = 0;\ \alpha_1 g_1'(-\tau) + \alpha_2 g_2'(-\tau) = 1 \tag{31a}$$

aus welchen man entnimmt

$$\alpha_1 = \frac{g_2(-\tau)}{g_2(-\tau) g_1'(-\tau) - g_2'(-\tau) g_1(-\tau)};\quad \alpha_2 = -\frac{g_1(-\tau)}{g_2(-\tau) g_1'(-\tau) - g_2'(-\tau) g_1(-\tau)}. \tag{31b}$$

In Fig. 10 sind die hienach berechneten Kontrollbahnen für verschiedene Lagen der Kathode gezeichnet worden; dabei ist der Anschaulichkeit halber jedesmal die berechnete Bahn durch ihr Spiegelbild bezüglich der Strahlachse ergänzt worden, und das von ihnen begrenzte Gebiet wurde sozusagen als „Elektronenbündel" durch Schraffierung hervorgehoben; es bedarf wohl keines Hinweises, dass dieser Ausdruck nur bildlich — im Sinne der Bedingungen (30) — zu verstehen ist. Man entnimmt aus den Diagrammen, dass für $\tau > -1{,}85$ das Elektronenbündel divergiert; erst für $\tau < -1{,}85$ kommt ein Fokus zustande. Über seine Lage η_F unterrichtet die Gleichung

$$g_1(\eta_F)\, g_2(-\tau) - g_2(\eta_F)\, g_1(-\tau) = 0;\quad \frac{g_1(\eta_F)}{g_2(\eta_F)} = \frac{g_1(-\tau)}{g_2(-\tau)}. \tag{32}$$

Fig. 11 zeigt die hieraus zu entnehmende, gleichzeitige Lage von Kathode und Fokus als eine der Konstruktionsgrössen des Röhrenmodelles.

Schliesslich fragen wir nach der Grösse des im Fokus manifesten Kathodenbildes im Verhältnis zum Original. Die Kathode ist also nunmehr als ein in der Ebene $\eta = -\tau$ gelegener Körper endlicher Ausdehnung zu behandeln; wir dürfen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, den Kontrollstrahl wählen

$$\xi = \beta_1 g_1(\eta) + \beta_2 g_2(\eta) \tag{33}$$

welcher den Anfangsbedingungen unterliegt

$$\xi = 1; \qquad \frac{d\xi}{d\eta} = 0 \qquad \text{für } \eta = -\tau. \tag{34}$$

Sie werden erfüllt durch

$$\beta_1 = \frac{-g_2'(-\tau)}{g_2(-\tau) g_1'(-\tau) - g_1(-\tau) g_2'(-\tau)};\ \beta_2 = \frac{g_1'(-\tau)}{g_2(-\tau) g_1'(-\tau) - g_1(-\tau) g_2'(-\tau)}. \tag{34a}$$

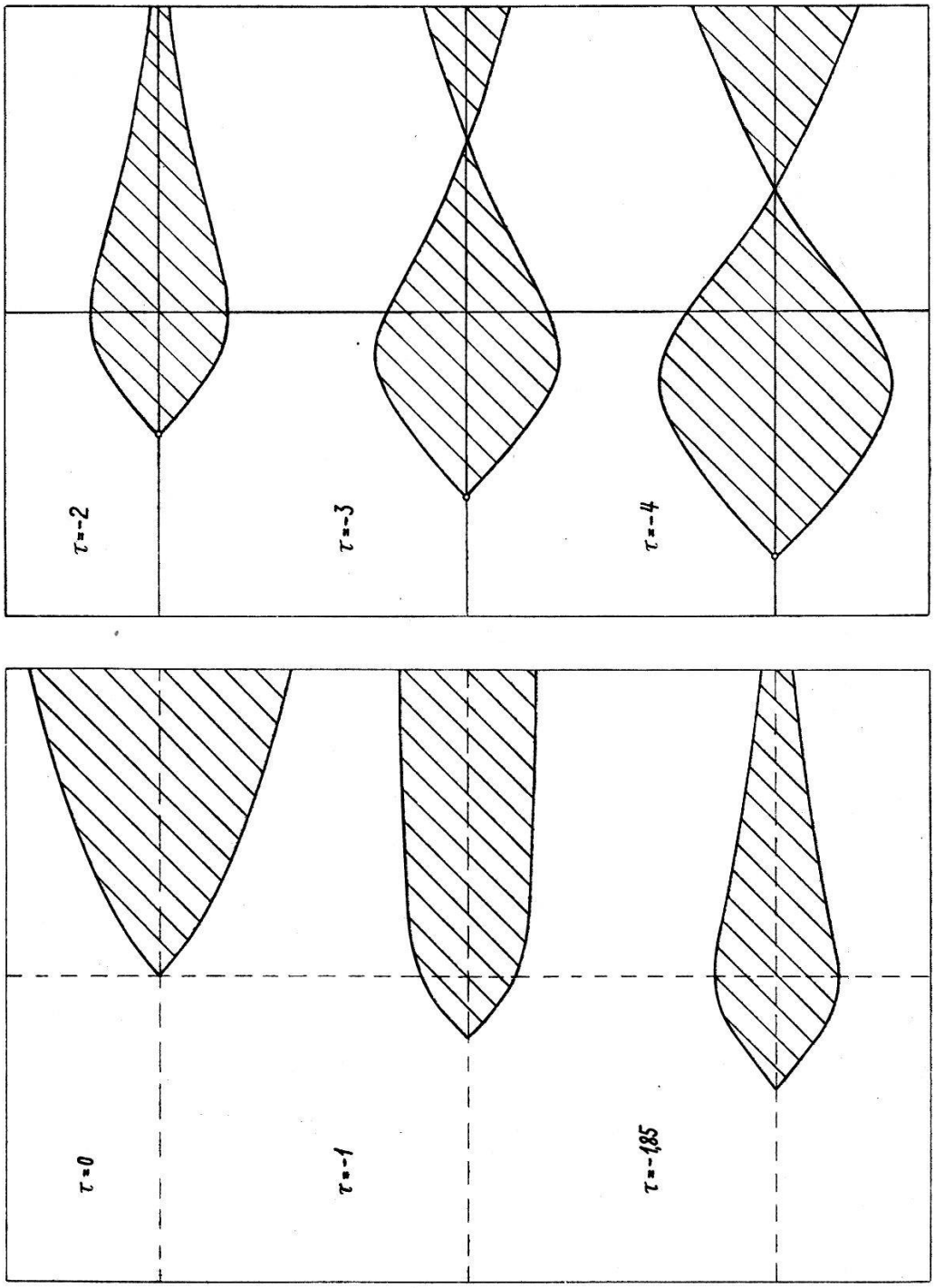

Fig. 10. Gestalt des Elektronenbündels für verschiedene Lagen der Kathode.

daher zeigt der Kontrollstrahl in der Fokalebene die Achsenabweichung

$$\xi_F = \frac{g_2(\eta_F)\, g_1'(-\tau) - g_1(\eta_F)\, g_2'(-\tau)}{g_2(-\tau)\, g_1'(-\tau) - g_1(-\tau)\, g_2'(-\tau)} \tag{35}$$

Fig. 11.
Gleichzeitige Lage von Kathode und Anode zwecks Fokusbildung.

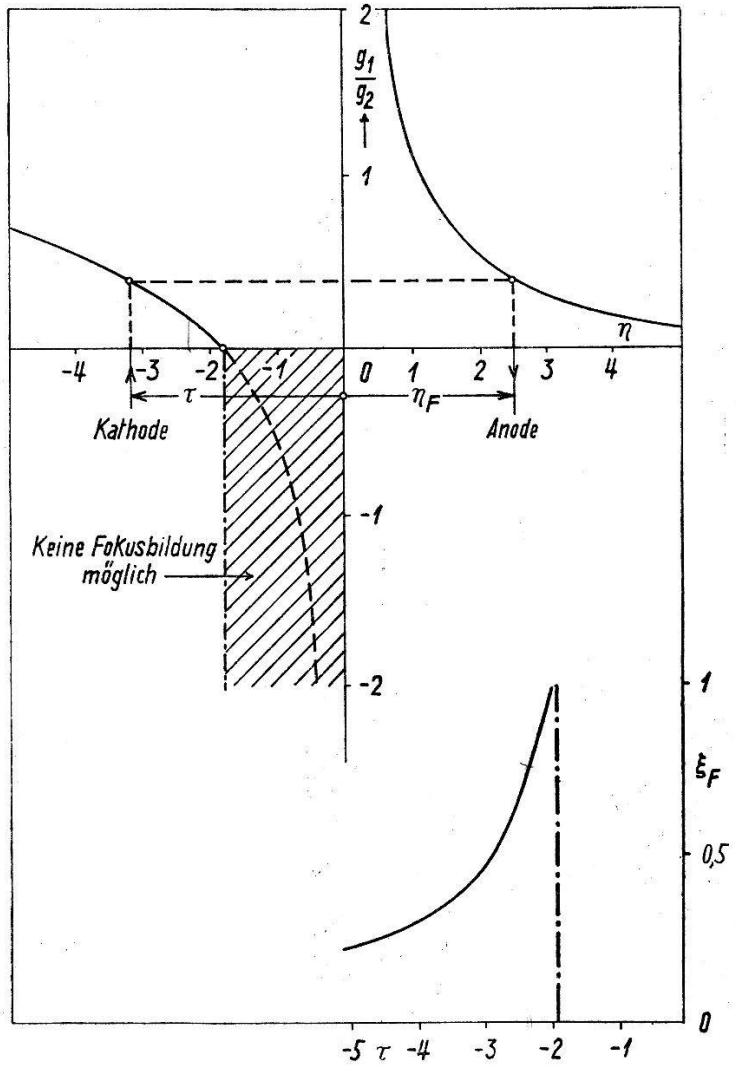

Fig. 12.
Strichbreite des Fokus im Verhältnis zum Kathodendurchmesser.

und eben diese Zahl schildert entsprechend Fig. 12 die Grösse des Bildes im Verhältnis zum Original: Die Breite des Strichfokus relativ zum Durchmesser des Kathodenzylinders.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Dipl. Ing. Denes für freundliche Hilfe bei der Herstellung des Manuskriptes herzlichst zu danken.