

<b>Zeitschrift:</b>	Helvetica Physica Acta
<b>Band:</b>	20 (1947)
<b>Heft:</b>	IV-V
<b>Artikel:</b>	Über eine Methode zur Messung sehr kleiner Änderungen elektrischer Kapazitäten und Phasenwinkel im Gebiete der Ton- und Niederfrequenz
<b>Autor:</b>	Wegmann, Lienhard
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-111810">https://doi.org/10.5169/seals-111810</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**Über eine Methode zur Messung sehr kleiner Änderungen  
elektrischer Kapazitäten  
und Phasenwinkel im Gebiete der Ton- und Niederfrequenz**  
von Lienhard Wegmann.

(10. VII. 1947.)

### 1. Einleitung.

Für die Messung von sehr kleinen Änderungen elektrischer Kapazitäten, dielektrischer Verlustwinkel und Dielektrizitätskonstanten werden wesentlich zwei Methoden verwendet, nämlich die SCHERING'sche Brücke<sup>1)</sup> und das Überlagerungsverfahren<sup>2)</sup>. Beide Methoden konnten im Laufe der Zeit von verschiedenen Autoren so verfeinert werden, dass heute im Gebiete der hohen Frequenzen ( $10^5$ — $10^6$  Hertz) allgemein eine Empfindlichkeit für relative Kapazitätsänderungen von  $E = 10^{-7} \frac{\Delta C}{C}$ /Skt. erreicht werden kann<sup>3)</sup> — in einer speziellen Anordnung wurde die Empfindlichkeit bis  $2 \cdot 10^{-8} \frac{\Delta C}{C}$ /Skt. gesteigert<sup>4)</sup>. Im Gebiete der mittleren und niederen Frequenzen ( $10^2$ — $10^4$  Hertz), wo nur noch die Brückenmethode für empfindliche Messungen anwendbar ist, blieb jedoch die Entwicklung jederzeit um etwa eine Grössenordnung zurück; die empfindlichsten Apparaturen führten bis  $E = 10^{-6} \frac{\Delta C}{C}$ /Skt.<sup>5)</sup>, und die mit grösster Sorgfalt angebrachten Verbesserungen von ASTIN<sup>6)</sup> ermöglichten noch, einen Wert von  $E = 5 \cdot 10^{-7} \frac{\Delta C}{C}$ /Skt. zu erreichen. Diese Grenze ist bis heute nicht überschritten worden; es scheint damit die Leistungsfähigkeit der Brückenmethode in diesem Frequenzbereich erreicht zu sein, und es ist nicht zu erwarten, dass die Methode bei Ton- und Niederfrequenz je gleiche Empfindlichkeiten zu liefern imstande

---

<sup>1)</sup> H. SCHERING, Z. Instrumentenkunde **40**, 120 (1920).

<sup>2)</sup> I. HERWEG, Z. f. Phys. **3**, 36 (1920).

<sup>3)</sup> R. W. SCHULZ, Z. f. Phys. **109**, 517 (1938).

<sup>4)</sup> W. BÜNGER, Z. f. Phys. **91**, 679 (1934).

<sup>5)</sup> J. C. BALBOUGH und A. HERZENBERG, J. Frank. Inst. **218**, 49 (1934).

<sup>6)</sup> A. V. ASTIN, J. of the Bur. of Stand. **21**, II/425 (1938).

ist, wie sie bei Hochfrequenz erreicht werden. Es ist deshalb die Frage, ob nicht vielleicht eine Steigerung der Empfindlichkeit durch einen Wechsel in der Wahl der Methode ermöglicht werden könnte. Solche Änderungen der Methode sind schon verschiedentlich versucht worden. Gewisse Erfolge zeitigte dabei die

## 2. Messung von Phasenwinkeln mit der Kathodenstrahlröhre.

In einer Arbeit von NIJENHUIS<sup>1)</sup> werden eine ganze Reihe von Anordnungen beschrieben, die eine Phasenwinkelmessung mit der Kathodenstrahlröhre gestatten. Es ist klar, dass sich eine empfindliche Messung nur dort verwirklichen lässt, wo der Messbereich derart verkleinert ist, dass die Verschiebung eines Bildpunktes über die ganze Bildfläche der Röhre nur einen kleinen Teil einer Phasenverschiebung um  $2\pi$  wiedergibt. Einen Ansatz zu einer solchen Steigerung der Empfindlichkeit enthält NIJENHUIS' Methode der LISSAJOUS-Figuren, wo nach jeder Phasenverschiebung von  $\pi/8$  der ganze Messbereich durchlaufen ist.

Um eine sehr viel stärkere Steigerung der Empfindlichkeit zu erreichen, kann der Messbereich auf folgende Weise eingeschränkt werden: Die sinusförmigen Wechselspannungen gleicher Frequenz, deren gegenseitige Phasendifferenz sichtbar gemacht werden soll, werden vorerst durch eine zweckmässige Schaltung in eine Reihe von „rechteckigen“ Impulsen verwandelt in der Weise, dass jeder positiven Halbwelle der Sinusspannung ein Impuls der rechteckigen Spannung entspricht, wie dies für eine einzelne Welle in Fig. 1a/b dargestellt ist. Diese Impulsreihe wird nun durch eine kapazitive Koppelung differenziert (Fig. 1c) und in dieser Form werden die zu vergleichenden Spannungen (Fig. 1c und c') auf die beiden Ablenkplattenpaare einer Kathodenstrahlröhre gegeben. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Impulsreihen wird nun beobachtet am stehenden Bild, das die beiden fast senkrechten Anstiege der entsprechenden Impulse beider Reihen miteinander erzeugen. Koinzidieren die beiden Impulse genau, so bilden ihre Anstiege auf dem Schirm der Kathodenstrahlröhre eine Gerade, die unter  $45^\circ$  (bei gleicher Ablenkleistung) gegen die Horizontale geneigt ist; verschiebt sich aber die Phase um nur ein Geringes, so erhält man Bilder von der Art der Fig. 1d. Der ganze Messbereich ist nun auf die kleine Zeit beschränkt, welche die Impulse aus Fig 1c zur Erreichung der Potentialspitze benötigen. Diese Zeit kann aber

---

<sup>1)</sup> W. NIJENHUIS, Philips techn. Rundschau **5**, 210 (1940).

sehr klein gegenüber der Schwingungsdauer gewählt werden, so dass eine solche Anordnung sehr empfindlich gestaltet werden kann.

Die beschriebene Methode wurde für die technische Frequenz (50 Hertz) untersucht. Für die Verwandlung der Sinusspannungen in rechteckige Impulsreihen wurden Multivibratoren verwendet, wie sie aus der Zählrohrtechnik bekannt sind<sup>1)</sup>. Die Ausgänge der Multivibratoren werden über Kapazität und Ableitwiderstand auf

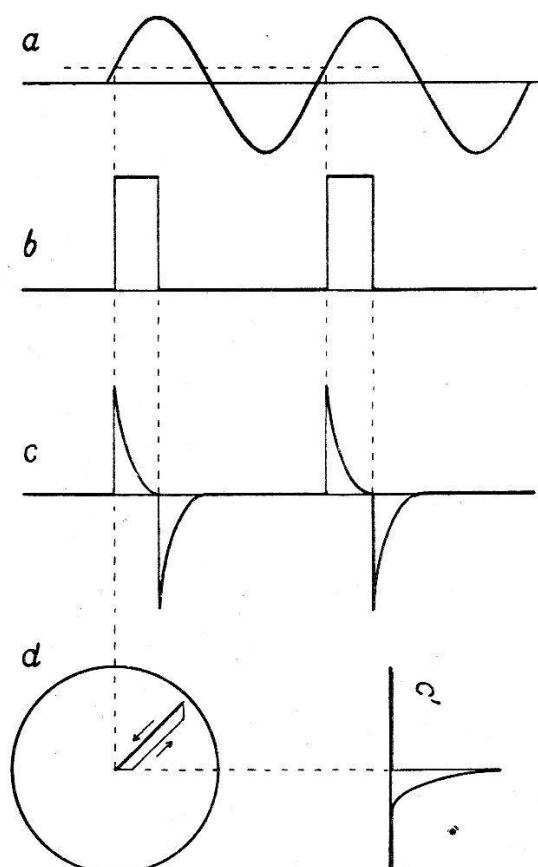


Fig. 1.

einen Kathodenstrahlzosillographen gegeben, wo das beschriebene Bild erscheint. Dieses Bild ist nun allerdings nicht konstant, sondern die zu beobachtende Linie zeigt starke Oszillationen um ihre Nulllage herum, welche angesichts der niedrigen Frequenz des Vorganges als eine Wirkung des Funkeleffektes der Glühkathoden gedeutet wurden. Dementsprechend konnten diese Oszillationen stark geschwächt werden durch Unterheizung der Röhren und Erhöhung der Elektrizitätsmenge auf dem Gitter (Gitter—Kathodenkapazität). Die gleichzeitige Abnahme der Ausgangsamplitude

<sup>1)</sup> J. STRONG, Mod. Phys. Lab. Pract., Blackie & Son Lim. (p. 284), London and Glasgow 1942. — H. J. REICH, Theor. o. Appl. of El. Tubes, II. Ed. (p. 362), McGraw-Hill Book Comp., New York 1944.

kann durch die Verwendung eines zweiten Multivibratorpaars wettgemacht werden, so dass sich eine Schaltung ergibt, wie sie in Fig. 2 dargestellt ist.

Die Methode eignet sich gut zur Beobachtung von Phasenverschiebungen bis  $\Delta\varphi \approx 10^{-4}$  abs.; für empfindlichere Messungen versagt sie wegen der immer noch vorhandenen Störungen durch den Funkeleffekt. Diese Störungen können behoben werden durch

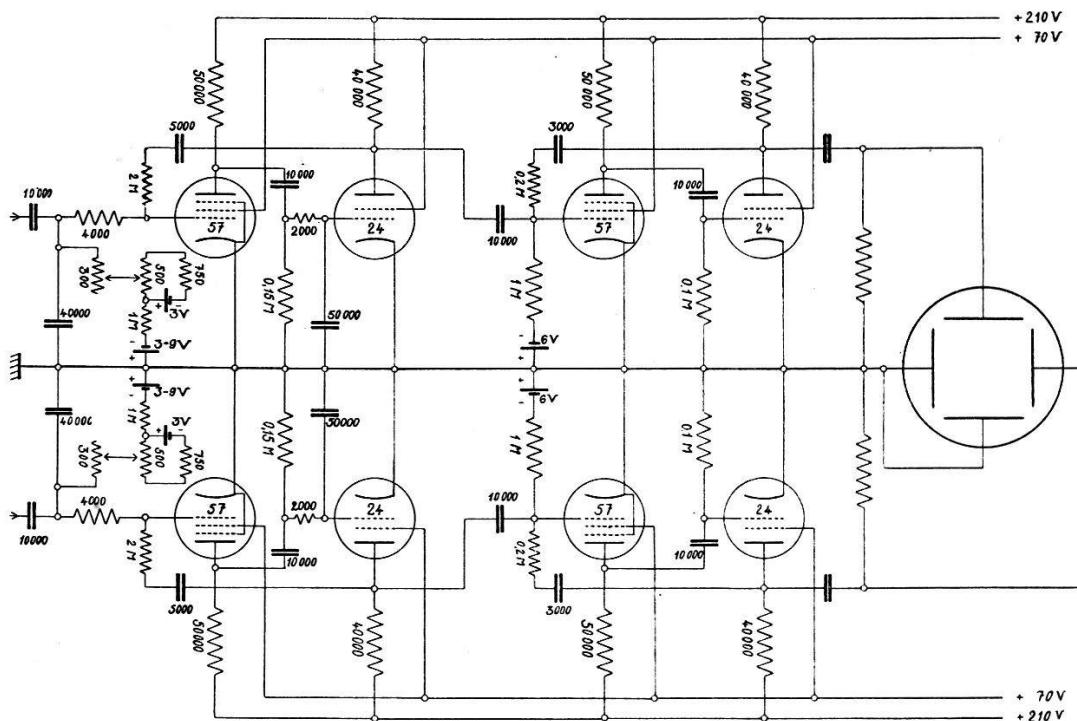


Fig. 2.

Mittelung über viele Perioden, zu welchem Zwecke jedoch vorerst die variable zeitliche Verschiebung zweier Impulsreihen in eine in der Amplitude entsprechend variierende Reihe von Einzelimpulsen verwandelt werden muss. Eine Schaltung, welche diese Transformation von Zeitdifferenzen in elektrische Impulse auszuführen vermag, ist die ebenfalls aus der Zählrohrtechnik bekannte Koinzidenzschaltung.

### 3. Die Koinzidenzschaltung.

Für diesen Zweck wurde ihrer grossen Steilheit wegen die von PICCRIONI angegebene Koinzidenzschaltung<sup>1)</sup> gewählt (Fig. 3), welche für koinzidierende Eingangsimpulse am Ausgang (A) einen starken positiven Impuls liefert, während Einzelimpulse am Eingang nur sehr schwache oder sogar negative Ausgangsimpulse hervorrufen.

<sup>1)</sup> O. PICCRIONI, Il nuovo Cimento 1, 56 (1943).

Durch geeignete Wahl der Gitterkopplungselemente kann das Auflösungsvermögen der Schaltung verändert werden, d. h. es kann der maximale Zeitabstand zweier Impulse, welche noch als Koinzidenz registriert werden sollen, vorgegeben werden. Dieses Auflösungsvermögen ist nun aber nicht durch die Koinzidenzschaltung allein definiert, sondern variiert auch noch mit der Empfindlichkeit des die Koinzidenzimpulse registrierenden Verstärkers, was an Hand von Fig. 4 sofort einzusehen ist. Figg. I und II zeigen eine Anzahl von Impulsen, die zum Zwecke der Koinzidenzbestimmung auf die Gitter I und II der Koinzidenzschaltung gegeben werden; dabei ist die Zeitachse so normiert,

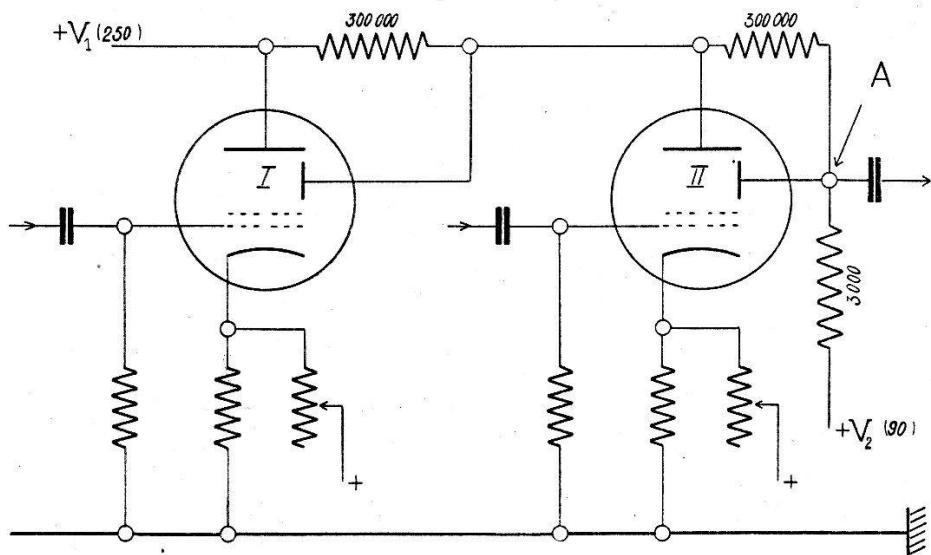


Fig. 3.

dass die Zeit, da ein Impuls auf Gitter I anlangt, durchgehend mit  $t_0$  bezeichnet wird, so dass in Fig. II die Koinzidenzzeit als  $|t - t_0| = \tau$  auftritt. Fig. III zeigt nun den zu jeder Koinzidenzzeit (Koinzidenzscharfe) zugehörigen Ausgangsimpuls der Koinzidenzschaltung (für unveränderte Gitterkopplungselemente und unveränderten Registrierverstärker). Die Amplitude der Koinzidenzimpulse bleibt demnach konstant bis zu einer Koinzidenzzeit  $\tau_1$  und nimmt dann kontinuierlich ab bei Annäherung an eine gewisse maximale Koinzidenzzeit  $\tau_2$ , bei welcher sie ganz verschwindet. Es ist nun offenbar, dass mit der Empfindlichkeit  $E$  (Fig. III) der Registrierschaltung auch das beobachtete Auflösungsvermögen der Koinzidenzschaltung, dessen Zeitkonstante  $\tau_A$  zwischen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  liegt, variiert. Ersetzt man die beiden Einzelimpulse durch zwei periodische Impulsreihen gleicher Frequenz  $v$ , so gibt auch die Koinzidenzschaltung eine Impulsreihe dieser Frequenz, deren Amplitude konstant bleibt, solange die Phasendifferenz zwischen

den beiden primären Impulsreihen konstant ist. Lassen wir dagegen die Phasendifferenz langsam den Bereich von  $\varphi = -\omega \tau_2$  bis  $\varphi = +\omega \tau_2$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ) überstreichen, so beschreibt die Amplitude der Koinzidenzimpulsreihe gerade die Kurve der Fig. III. Damit haben wir aber in den beiden kleinen Bereichen ( $\omega\tau_1 < \varphi < \omega\tau_2$ ) und ( $-\omega\tau_2 < \varphi < -\omega\tau_1$ ) eine auf Phasenverschiebungen empfindliche Beobachtungsmethode gewonnen, welche nun messbar ausgewertet werden soll.

Um die Messung empfindlich zu gestalten, muss verlangt werden, dass die Amplitudenkurve der Koinzidenzschaltung (Fig. 4/III) in

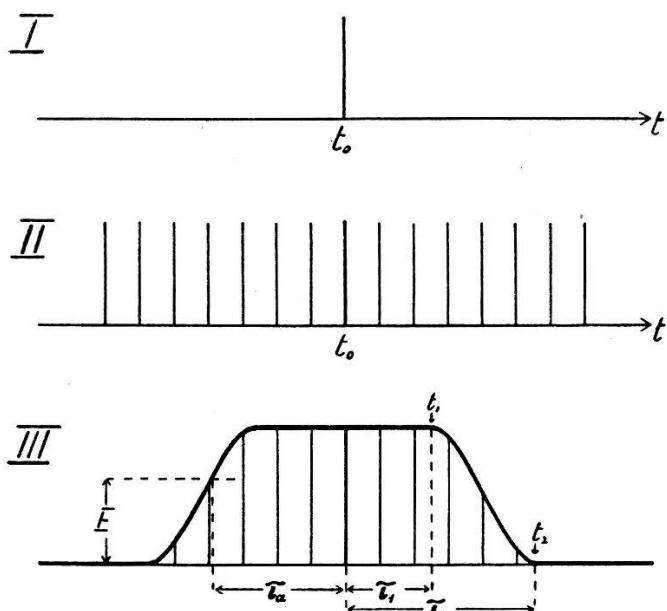


Fig. 4.

den Randbereichen zwischen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  grosse Steilheit aufweist, damit eine kleine Phasenverschiebung in diesen Bereichen eine möglichst grosse Amplitudenänderung zu erzeugen vermag. Es wurde deshalb die Abhängigkeit der Steilheit dieser Bereiche von der Wahl der Kopplungselemente untersucht, und zwar nach einer Methode, welche nicht von der speziellen Gegebenheit der periodischen Impulsreihen abhängig ist, sondern auch für statistische Impulsreihen Gültigkeit hat, indem nämlich die Reaktion der Schaltung auf ein einzelnes Impulspaar beobachtet wurde. Diese Impulspaare wurden hergestellt mittels eines HELMHOLTZ'schen Fallpendels<sup>1)</sup>, bei welchem die Koinzidenzzeit von  $t = 0$  an in Sprüngen von  $2 \cdot 10^{-6}$  sec. gewählt werden konnte. Die auf diese Art in ihrer Zeitdifferenz bekannten Impulspaare wurden nun direkt auf die Gitter der Multivibratorpaare aus Fig. 2 gegeben,

<sup>1)</sup> G. EICHHORN, Inaug.-Diss., Zürich 1901.

deren Ausgangsimpulse statt auf die Kathodenstrahlröhre jetzt auf die Koinzidenzschaltung von PICCIONI geleitet wurden. Die Registrierung der Koinzidenzen erfolgte durch einen Zweiröhrenverstärker mit Thyratron als Endröhre<sup>1)</sup>. Die Prüfung der Koinzidenzschaltung geschah nun dadurch, dass bei fest gewählten Gitterkopplungselementen die Koinzidenzzeit zwischen den beiden

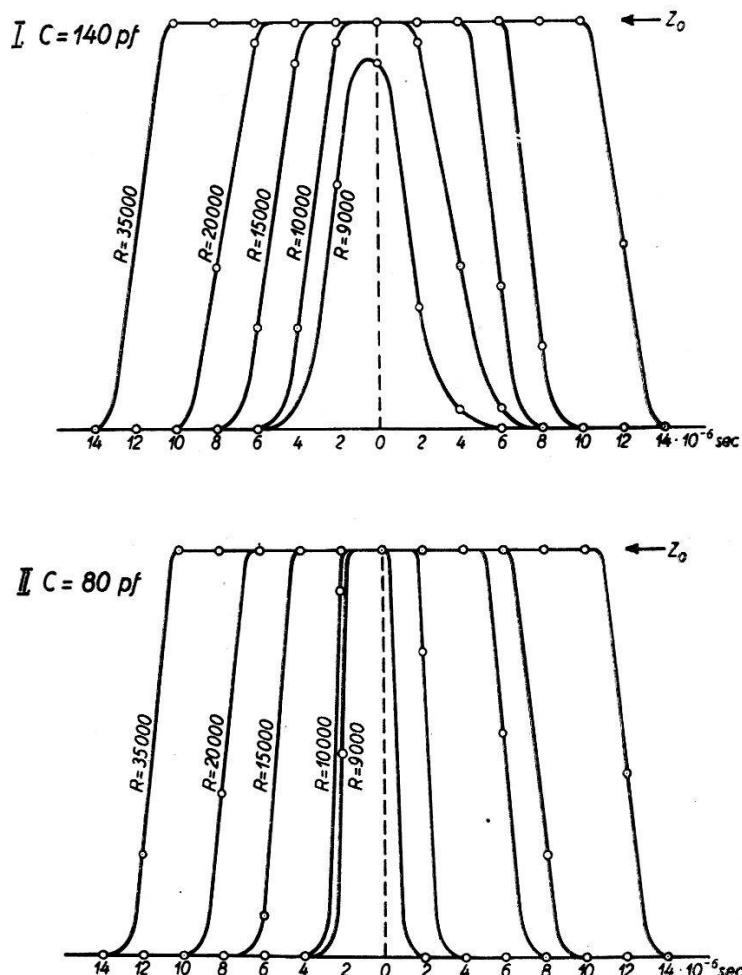


Fig. 5.

Eingangsimpulsen verändert wurde. Bei jedem einzelnen Wert dieser Koinzidenzzeit wurden eine bestimmte Anzahl Impulspaare ausgelöst und die Anzahl der registrierten Koinzidenzen gezählt. Diese Zahl entspricht also der relativen Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Impulspaar mit vorgegebener Koinzidenzzeit als Koinzidenz registriert wird. Bei Veränderung der Koinzidenzzeit muss sich deshalb wieder die in Fig. 4/III dargestellte Kurve ergeben. Eine Anzahl solcher experimentell aufgenommener Kurven zeigt Fig. 5. Die Abszisse enthält die Zeitdifferenz zwischen

<sup>1)</sup> H. BRADT und P. SCHERRER, Helv. Phys. Acta **16**, 252 (1943).

den beiden Impulsen, während die Ordinate die Anzahl  $z$  der auf  $z_0$  Eingangsimpulse gleicher Koinzidenzzeit registrierten Koinzidenzen zeigt. Als Parameter sind die Gitterableitwiderstände der Koinzidenzröhren gewählt; die Abhängigkeit der Kurven von den Kopplungskapazitäten ist durch Vergleich von Fig. I und Fig. II ersichtlich.

Aus diesen Untersuchungen lassen sich folgende Schlüsse ziehen: der Grenzbereich der Amplitudenkurve ist um so schmäler und steiler, je kleiner die Zeitkonstante  $RC$  der Gitterkoppelungen gewählt wird; bei gleicher Zeitkonstante  $RC$  nimmt die Steilheit des Grenzbereiches mit dem Verhältnis  $R/C$  zu. Es ist deshalb für unsere Zwecke eine Gitterkoppelung mit möglichst kleinen Elementen erwünscht, wobei vor allem die Kopplungskapazität klein zu wählen ist. In Übereinstimmung mit diesen Überlegungen wurde später festgestellt, dass die besten Resultate mit den Kopplungselementen  $C = 10 \text{ cm}$  und  $R = 15\,000 \Omega$  erreicht wurden. Bei kleinerer Zeitkonstante  $RC$  nimmt die Maximalamplitude rasch ab, wie dies schon in Fig. 5/I festzustellen ist, und der Gewinn an Steilheit wird damit illusorisch.

Die Asymmetrie der aufgenommenen Kurven dürfte ihren Grund in einer Unsymmetrie der Kopplungselemente haben; diese Frage interessiert hier nicht näher, indem wir uns ja auf die Betrachtung nur eines der beiden Bereiche beschränken können.

#### 4. Prinzip der Koinzidenzmethode.

Zur Ausarbeitung dieser empfindlicheren Methode wurde der technisch einfacheren Behandlung wegen eine Frequenz von 8000 Hertz gewählt. Die Prinzipschaltung der Methode ist in Fig. 6 dargestellt. Zur Herstellung einer sinusförmigen Wechselspannung von 8000 Hertz wurde ein Röhrengenerator ( $G$ ) berechnet, dessen Frequenz durch Anoden- und Gitterstabilisierung konstant gehalten wird<sup>1)</sup>. (Die Einzelheiten der Schaltungen sind aus der Gesamtschaltung, Fig. 12, ersichtlich.) An diesen Generator ist möglichst lose angekoppelt ein Dreiröhrenverstärker ( $V_I$ ) mit hochempfindlicher Mikrophonröhre als Eingang. Dadurch können Rückwirkungen auf den Generator stark unterdrückt werden, und eine drahtlose Ankoppelung, wie sie bei der Überlagerungsmethode für empfindliche Messungen notwendig ist<sup>2)</sup>, wird überflüssig, insbesondere da ja bei der vorliegenden

<sup>1)</sup> F. E. TERMAN, Radio Eng. Handb. I. Ed., p. 487, Type i. (McGraw-Hill Book Comp., New York and London 1943).

<sup>2)</sup> R. W. SCHULZ, Z. f. Phys. 109, 517 (1938).

Methode in der ganzen Apparatur nur eine einzige Frequenz verwendet wird. Die auf diese Weise verstärkte Sinusspannung wird nun einerseits auf einen Multivibrator ( $M_I$ ) gegeben, wo sie in die gewünschte Impulsreihe verwandelt werden soll, andererseits auf eine Schaltung ( $C$ ), worin sich die Kapazität befindet, deren Änderungen gemessen werden sollen. Da hier die Amplitude der Wechselspannung wieder stark heruntergesetzt wird, muss an ihrem Ausgang ein zweiter Verstärker ( $V_{II}$ ) angeschlossen werden, der die

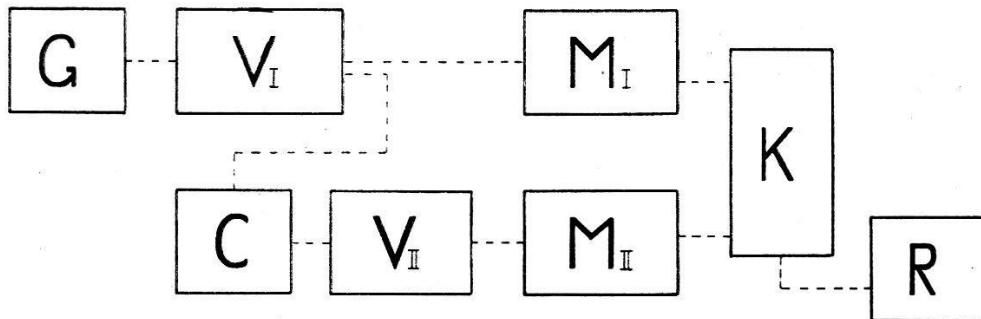


Fig. 6.

nun in der Phase etwas verschobene Sinusspannung auf den zweiten Multivibrator ( $M_{II}$ ) leitet. Die Ausgänge der beiden Multivibratoren endlich steuern die Koinzidenzschaltung ( $K$ ), deren Ausgangsamplitude zur Registrierung ( $R$ ) der Phasendifferenz dienen wird.

Die wesentlichen Punkte in der Schaltung sind nun offenbar einerseits die Steilheit der Koinzidenzschaltung, wie sie im vorhergehenden Abschnitt geschildert wurde, und andererseits die Steilheit der Impulsreihen, die die Multivibratoren liefern.

### 5. Die Multivibratoren.

Bei der Beobachtung von Kippschwingungen eines Multivibrators macht man die Feststellung, dass in der Regel der Spannungsabfall steiler verläuft als der Spannungsanstieg, und zwar an jeder der beiden Anoden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei kapazitiver Ankoppelung die massgebende Zeitkonstante für die Entladung der Kapazität kleiner ist als für die Aufladung, da für die Entladung im wesentlichen nur der Röhrenwiderstand wirksam ist. Da nun die Koinzidenzschaltung von PICCIONI positive Steuerimpulse verlangt, sind die Ausgangsimpulse der Multivibratoren nicht direkt zur Steuerung zu verwenden, sondern es wird vorerst in einer Umkehrröhre ein steiler Potentialabfall in einen steilen Anstieg verwandelt (Fig. 7, Röhre IV). Dies ist deshalb

möglich, weil für die erwähnte Zeitkonstante bei der Umkehrröhre nur die kleine Kopplungskapazität  $C_K$  zur Koinzidenzschaltung in Betracht fällt, beim Multivibratorausgang jedoch zusätzlich noch die viel grössere Rückkopplungskapazität  $C_R$  wirksam ist.

Es ist verständlich, dass ein Multivibrator, an dessen erstem Steuergitter eine Sinusspannung liegt, eine Impulsreihe liefert, die nicht von der Steilheit ist, die bei Steuerung mit einer Reihe von steilen Impulsen zu erwarten wäre. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, wurden zwei Multivibratoren hintereinandergeschaltet, wie dies früher schon beschrieben wurde (Fig. 2). Es zeigte sich jedoch, dass mit einer eleganten Lösung noch bessere Resultate erzielt werden, indem nämlich die zwei Multivibratoren mit einer gemeinsamen Röhre gekoppelt werden, so dass ein Dreiröhren-Multivibrator entsteht (Fig. 7). Die erste Röhre hat dabei, zu-

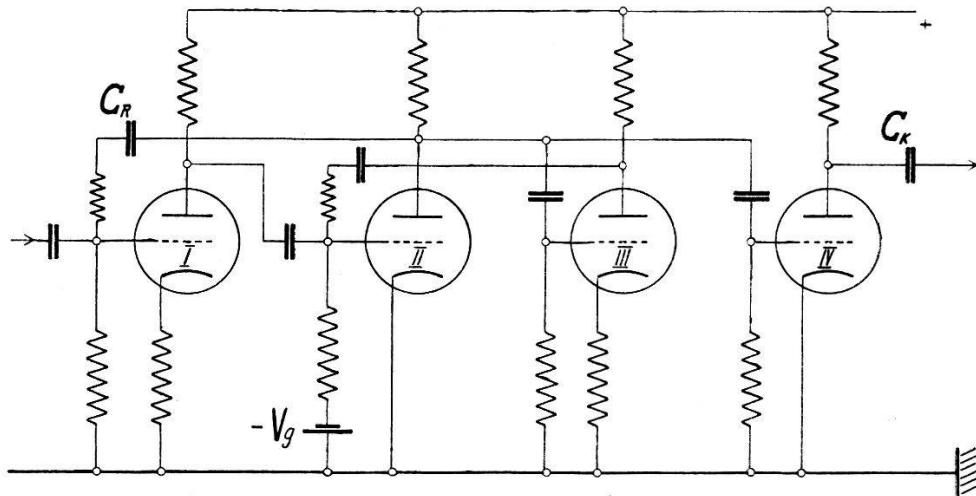
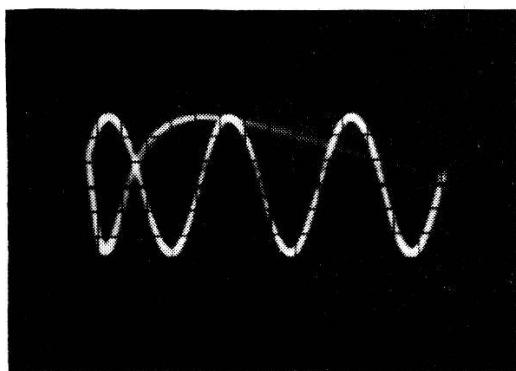


Fig. 7.

sammen mit der Röhre II, die Funktion eines sehr steilen Verstärkers, während die Röhren II und III zusammen die eigentliche Kippschaltung bilden, welche nun durch eine Schwingung mit steilen Amplituden gesteuert wird und dementsprechend sehr steile Impulsreihen liefert. Die beschriebene Funktion der einzelnen Röhren ist aus der oszillographischen Aufnahme ihrer Anodenpotentiale in Fig. 8 ersichtlich. Bild 1 zeigt die von Oszillator und Vorverstärkern gelieferte Sinusspannung, die auf das Gitter von Röhre I gelangt und an deren Anode bereits zur Kurve von Bild 2 verzerrt ist. Der zur Weiterverstärkung benutzte steile Potentialabfall an der Anode von Röhre II ist in Bild 3 sehr deutlich sichtbar, während Bild 4 den entsprechenden steilen Potentialanstieg an der Anode der Röhre IV zeigt. Zur Deutlichmachung des steilen Anstieges zeigt Bild 5 eine zeitliche Vergrösserung von

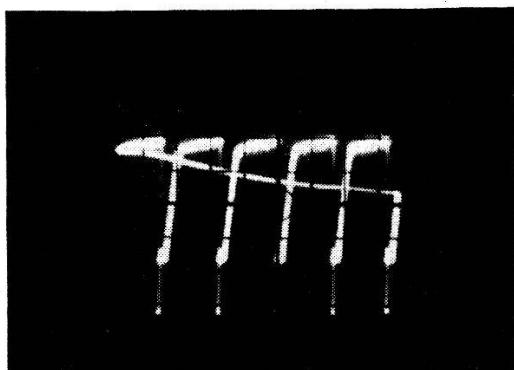
1



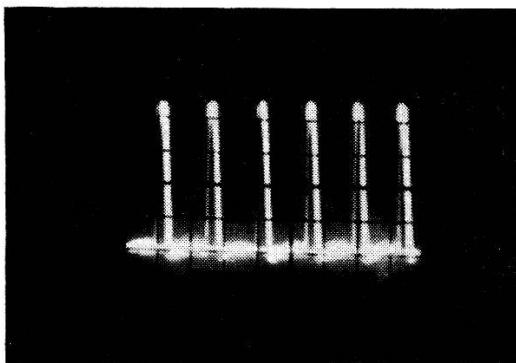
2



3



4



5

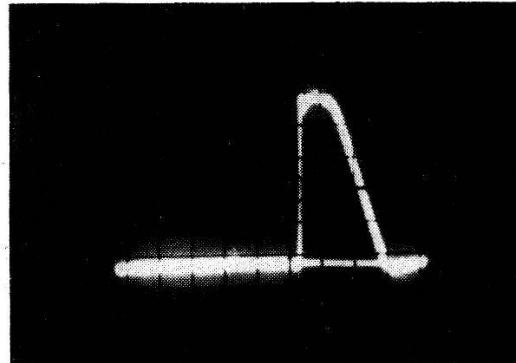


Fig. 8.

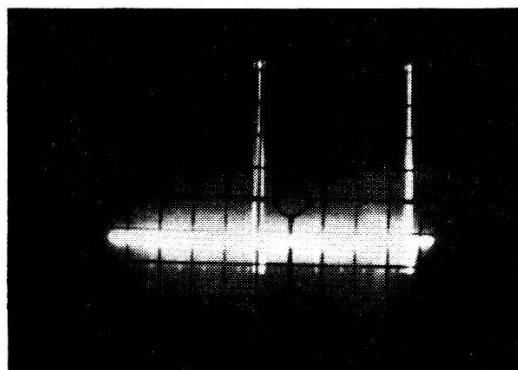


Fig. 9.

Bild 4. Diese letzte Impulsreihe gelangt nun auf das eine Steuer-gitter der Koinzidenzschaltung, während von der zweiten Multivibratorschaltung her die genau gleiche, jedoch in der Phase etwas verschobene Impulsreihe auf das zweite Gitter der Koinzidenzschaltung geführt wird. Bei genügend kleiner Phasendifferenz der beiden Reihen erzeugt die Koinzidenzschaltung selbst wieder eine Impulsreihe, deren Form Fig. 9 zeigt. Die Amplitude dieser Impulsreihe gibt nun das Mass für die Phasendifferenz zwischen den Kippschwingungen der Multivibratoren. (Da diese Impulse sehr kurz sind, musste zum Zwecke genügender Synchronisierung bei der Aufnahme eine höhere Ablenkfrequenz gewählt werden.)

## 6. Die Registrierung.

Die maximale Ausgangsamplitude der Koinzidenzschaltung beträgt einige Volt. Wie aus Fig. 9 ersichtlich ist, sind die Impulse an dieser Stelle sehr schmal. Um eine empfindliche Messung zu ermöglichen, müssen deshalb die Impulse verstärkt und vor allem verbreitert werden, was in einem weiteren Verstärker geschieht. (Vgl. Gesamtschaltung, Fig. 12.) Die so verstärkte Impulsreihe ist in Fig. 10 wiedergegeben. Diese Impulsreihe gelangt nun auf die

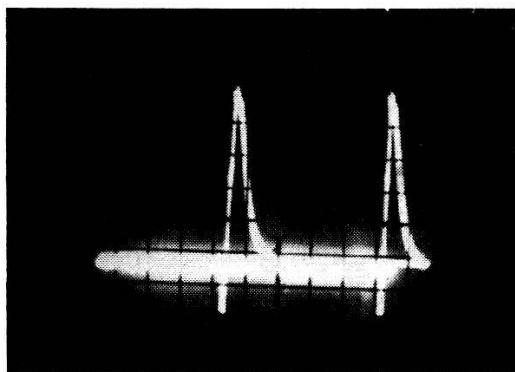


Fig. 10.

Endröhre, welche folgendermassen geschaltet ist (Fig. 11). Die Röhre ist durch eine negative Vorspannung gesperrt. In Serie zu einem Anodenwiderstand von  $1000 \Omega$  befindet sich ein Galvanometer (*MA*) mit einem Messbereich von 1 Milliampère und kleinem Innenwiderstand; parallel zum Anodenwiderstand ist ein Spiegelgalvanometer (*G*) geschaltet, das mit  $10000 \Omega$  innerem Widerstand eine Empfindlichkeit von  $6 \cdot 10^{-10}$  Amp./Skt. besitzt. Der pulsierende Strom, welcher durch die auf die Endröhre gelangenden

Koinzidenzimpulse ausgelöst wird, mittelt sich in den Galvanometern und erzeugt einen Ausschlag, der in dieser Anordnung einem Gleichstrom von einigen Milliampère maximal entspricht, d. h. bei „vollständiger“ Koinzidenz. Bei Verschlechterung der Koinzidenzscharfe nimmt der Ausschlag ab und wird schliesslich beinahe Null. Der Nullstrom im Spiegelgalvanometer kann bei guter Isolation auf einen Wert von ca.  $10^{-8}$  Amp. heruntergesetzt werden. Dieser Reststrom ist zeitlich konstant und für die Messung unwesentlich. Selbstverständlich ist das Spiegelgalvanometer nicht bis zum Maximalstrom verwendbar, weshalb das zweite, unempfindlichere Galvanometer angebracht ist, das zur Einstellung des richtigen Messbereiches dient. Um den Messbereich des Spiegel-

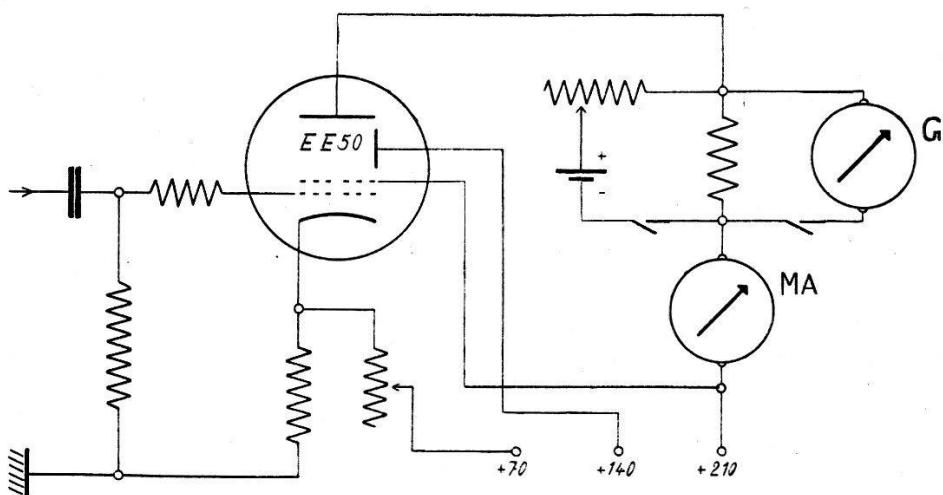


Fig. 11.

galvanometers zu erweitern, kann eine Kompensationsspannung an den Anodenwiderstand gelegt werden (Fig. 11). Dies wird zur Erreichung grosser Empfindlichkeit notwendig, da sich der Ausschlag bei kleinen Koinzidenzamplituden ungefähr proportional dem Quadrate der Phasenverschiebung ändert; sobald eine gewisse mittlere Stromstärke erreicht ist, wird der Ausschlag dagegen in weitem Bereich proportional der Phasenverschiebung, was noch durch Messresultate belegt werden wird.

Dem Proportionalitätsbereich entspricht nun aber bei den auf die Koinzidenzschaltung gelangenden Impulsreihen ein ganz bestimmter Bereich der Phasendifferenzen; es muss daher die Möglichkeit bestehen, jede in der Apparatur auftretende Phasendifferenz so zu kompensieren, dass sie in diesen Bereich hinein zu liegen kommt. Die diesem Zwecke dienenden Vorrichtungen lassen sich am besten an der Gesamtschaltung der Apparatur aufzeigen.

## 7. Gesamtschaltung (Fig. 12).

Die beiden primären Sinuswellen, welche aus dem Verstärker  $V_I$  hervorgehen, zeigen bereits eine relativ grosse Phasendifferenz, hervorgerufen durch die verschiedenartige Ankoppelung. Während nun die eine Welle direkt durch den Multivibrator  $M_I$  auf die Koinzidenzschaltung  $K$  gelangt, durchläuft die zweite Welle nach Passieren der Schaltung  $C$ , in welcher die zu messende Phasendrehung stattfinden wird, den Verstärker  $V_{II}$  und gelangt erst jetzt durch den Multivibrator  $M_{II}$  auf die Koinzidenzstufe. Diese Welle II hat also bei der Ankunft auf  $V_{II}$  in Bezug auf die Welle I eine grosse Phasendifferenz, welche natürlich bis zur Ankunft in der Koinzidenzschaltung zum grössten Teil rückgängig gemacht werden muss. Dies geschieht durch eine ungeradstufige Verstärkung in  $V_{II}$ , in Zusammenwirkung mit einer Selbstinduktion in der dritten Stufe, die, als Primärseite eines Transformators, durch die Belastung der Sekundärseite verändert werden kann. Mit Hilfe dieser Phasenkorrekturen ist es leicht, grobe Phasendifferenzen auszugleichen, so dass für den Einbau der Messkapazität je nach der gewünschten Empfindlichkeit eine beliebige Schaltung gewählt werden kann. Dagegen ist es mit Hilfe dieser Mittel nicht möglich, eine Feinabgleichung durchzuführen, wie sie bei grosser Empfindlichkeit notwendig wird. Da nun zwischen Kippschwingung des Multivibrators und erzeugender Sinuswelle eine Phasendifferenz besteht, die von der Amplitude der Sinuswelle abhängt (vgl. Figg. 1a/b), so kann durch Änderung der Ausgangsamplituden der Verstärker eine Phasenkorrektur in beliebiger Richtung erzeugt werden. Zur Feineinstellung wurde deshalb die Anordnung  $W$  zwischen  $V_I$  und  $M_I$  angebracht, welche aus zwei Regulierwiderständen  $W_1$  und  $W_2$  verschiedener Grösse besteht. Mit Hilfe dieser Mittel ist es möglich, für jede gewünschte Schaltung der Messkapazität (vgl.  $C$  in Fig. 12) die Phasendifferenzen in der Apparatur so weit zu kompensieren, dass das Milliampèremeter  $MA$  in der Endröhre einen Ausschlag zeigt. (Zur bequemeren Einstellung können bis dahin die Phasendifferenzen mittels eines Kathodenstrahloszillographen beobachtet werden (vgl. Abschnitt 2)). Nun wird dieser Ausschlag durch die Feinkorrektion der Phase bei  $W_1$  und  $W_2$  gerade zum Verschwinden gebracht, worauf das Spiegelgalvanometer  $G$  eingeschaltet werden kann. Durch eine kleine Korrektur an  $W_2$  in entgegengesetzter Richtung wird nun auf  $G$  ein Ausschlag erzeugt, der in den Proportionalitätsbereich hineinfällt, womit die Apparatur messbereit ist. Eine kleine Ände-

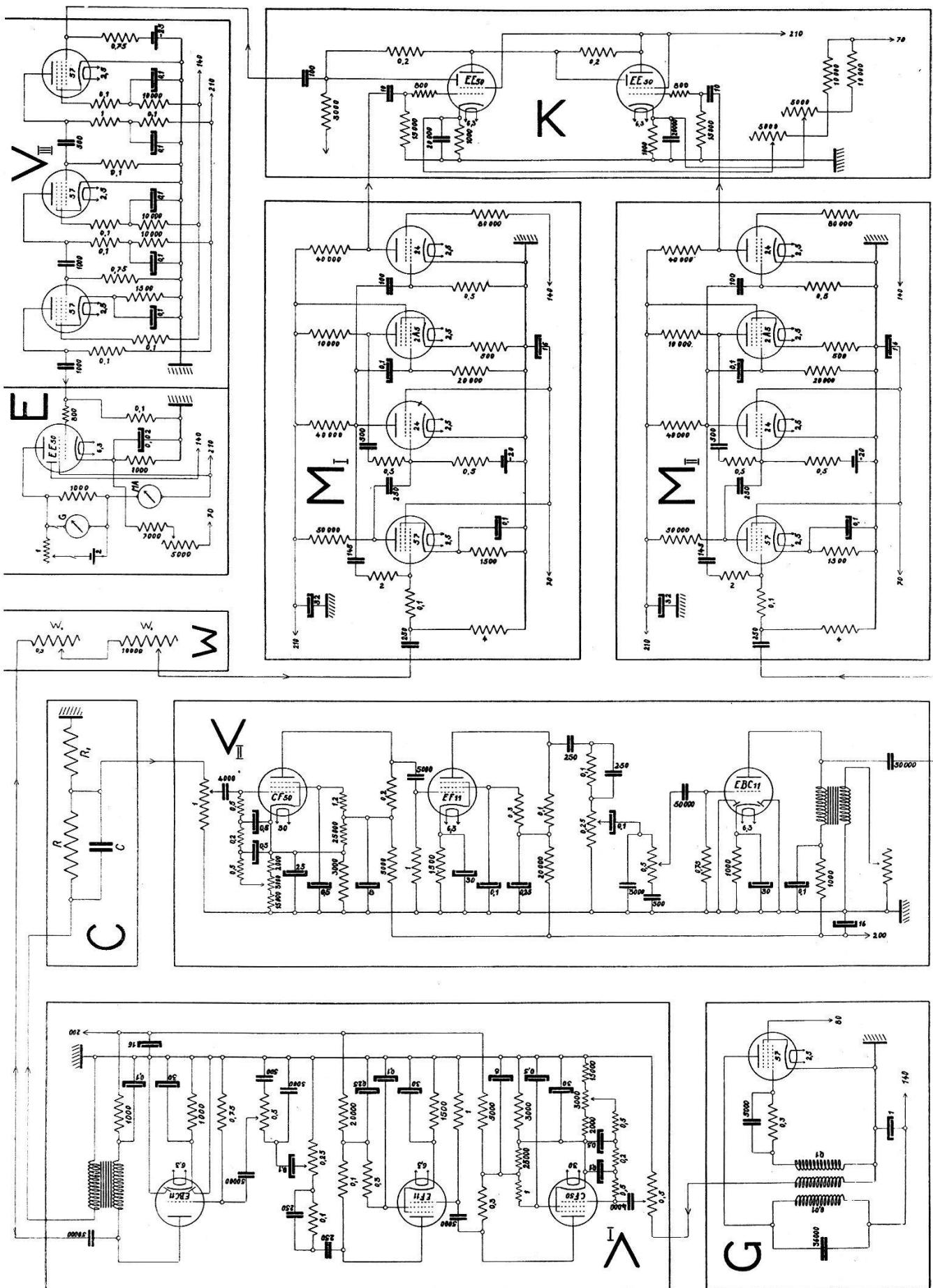


Fig. 12.

rung der Grösse der Messkapazität  $C$  oder ihres Verlustwinkels macht sich jetzt durch eine Änderung des Ausschlages am Spiegelgalvanometer bemerkbar. Die Messung dieser Änderung kann geschehen in der Art einer Nullmethode, indem die Änderung der Kapazität  $C$  durch die Änderung einer kleinen parallelgeschalteten Kapazität kompensiert wird, oder aber in einer Eichung der Apparatur.

Die ganze Apparatur ist erwartungsgemäss sehr empfindlich auf Körper- und Handkapazitäten, weshalb jede Stufe für sich in einen allseitig abgeschlossenen, geerdeten Kasten eingebaut wurde. Da die Multivibratoren auf Änderungen der Eingangsspannung sehr empfindlich sind, müssen vor allem die Anoden- und Heizspannungen der vor ihnen liegenden Teile sehr gut stabilisiert sein; es zeigte sich denn auch, dass nur Batterien oder Akkumulatoren die Anforderungen an die Konstanz der Spannungen befriedigten. Sämtliche Röhrenheizungen und Gittervorspannungen, wie auch die Anodenspannung für den Generator und die Vorverstärker mussten aus Batterien gespeist werden, während die restlichen Anodenspannungen aus einem stabilisierten Netzanschlussgerät entnommen werden konnten, wobei auf eine gute Entkopplung zu achten ist ( $2 \times 32 \text{ MF}$ ), andernfalls die Multivibratoren in Phase schwingen. Um kurzzeitige Schwankungen auszugleichen, musste ein Messgalvanometer mit grosser Schwingungsdauer und starker Dämpfung gewählt werden, was natürlich eine Verminderung der Empfindlichkeit bedeutet; ein eventueller Verlust an Empfindlichkeit in der Galvanometerschaltung kann aber in einfacher Weise durch eine weitere Verstärkerstufe ausgeglichen werden. Für die Fernhaltung der Störungen durch das elektrische Netz der Stadt und vor allem durch die nahe Strassenbahn war die Abschirmung der Apparatur immer noch ungenügend, so dass alle Messungen nachts vorgenommen werden mussten.

Durch alle diese Massnahmen konnten die Schwankungen der Apparatur so vermindert werden, dass die später angegebene Maximalempfindlichkeit von  $E = 3,5 \cdot 10^{-7} \frac{4C}{C}/\text{Skt.}$  erreicht werden konnte, d. h. dass bei dieser Empfindlichkeit die Schwankungen während einer gewissen Zeit den Betrag von ca. einem Viertel eines Skalenteils nicht überschritten, so dass ein Ausschlag auf einen Skalenteil genau abgelesen werden kann. Diese Zeiten betragen einige Minuten. Dann erfolgen Nullpunktsänderungen, welche im allgemeinen 10 bis 20 Skt. betragen, so dass die Fälschung einer Messung in der überwiegenden Zahl der Fälle dem Auge sofort sichtbar wird durch die gestörte Einstellgeschwindigkeit des Ausschlages. Nach einer solchen Änderung des Nullpunktes folgt jeweils eine neue Periode von einigen Minuten, welche die für Messungen notwendige Konstanz aufweist. Selbstverständlich können auch Nullpunktsänderungen von wenigen Skt. eintreten; solche Fälschungen können nur durch wiederholte Messungen erkannt werden. Die folgende Messreihe gibt ein Bild von den Schwan-

kungen eines solchen Nullausschlages; die Ablesungen folgen sich im Abstande von 20 sec — die Empfindlichkeit ist ca.  $3,5 \cdot 10^{-7}$ :

825	825	790	773,5	794
825	825	790	773,5	794
825	820	790	773,5	794
825	811	790	773,5	794
825	795	790	773,5	794
825	790	790	773,5	794
825	790	791,5	773,0	794
825	790	773,5	794	794
825	790	773,5	794	803

### 8. Eichung der Apparatur, Kapazitätsempfindlichkeit.

Die Kapazitätsempfindlichkeit der Apparatur ist definiert als  $E_c = \frac{1}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta C}{C}$ , wo  $\Delta A$  die durch eine bestimmte Kapazitätsänderung  $\Delta C$  der Messkapazität  $C$  hervorgerufene Ausschlagsänderung des Spiegelgalvanometers bedeutet. Die Schwierigkeit dieser Eichung liegt vor allem in der Herstellung einer mit genügender Genauigkeit bekannten Kapazitätsänderung in der Grösse

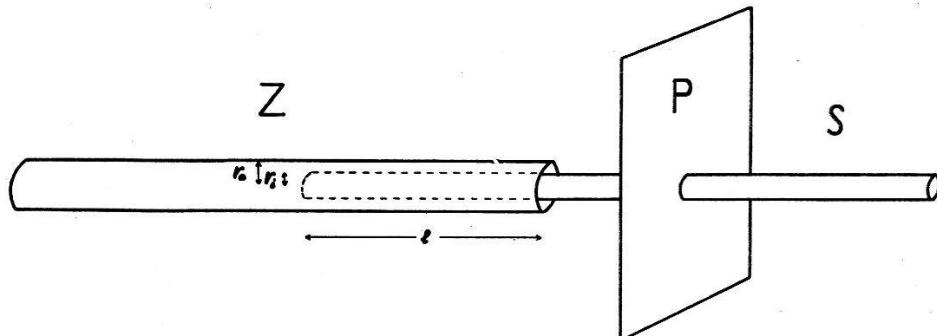


Fig. 13.

einiger Hundertstel cm, wie sie notwendig ist, wenn als Messkapazität ein Kondensator in der normalen Grössenordnung von 100 bis 1000 cm benutzt werden soll. Die wohl einfachste Lösung dieses Problems liegt in der Verwendung eines Zylinderkondensators, wie er in Fig. 13 dargestellt ist. Der Zylinder  $Z$  und die Metallplatte  $P$  sitzen — elektrisch voneinander isoliert, aber mechanisch fest verbunden — auf einer optischen Bank. Die innere Elektrode  $S$  ist auf wenige Hundertstel mm genau in der Achse des Zylinders  $Z$  zentriert und kann mit einer Mikrometerschraube verschoben werden.  $S$  ist leitend mit  $P$  verbunden; auf diese Weise wird erreicht, dass sich bei einer Verschiebung von  $S$  die Rand-

wirkung am rechten Ende des Zylinders nicht ändert. Ausserdem aber ist zu erwarten, dass bei einer genügend kleinen Verschiebung von  $S$  sich auch die Randwirkung am linken Ende von  $S$  nicht merkbar ändert, sofern nur das über das Ende von  $S$  hinausragende Stück des Zylinders lang genug gewählt wird. Unter dieser Voraussetzung hat eine Verschiebung von  $S$  um die Länge  $\Delta l$  nur eine Vergrösserung des homogenen Teils des Feldes im Zylinderkondensator zur Folge, so dass die Berechnung der auf diese Weise hervorgerufenen Kapazitätsänderungen einwandfrei ist. Da sich die Kapazität des Zylinderkondensators unter Vernachlässigung der Randwirkung zu  $C_k = \frac{l}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}}$  berechnet, wäre also eine solche Kapazitätsänderung zu berechnen als  $\Delta C_k = k \cdot \Delta l$ , wo  $k = \frac{1}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}}$ . Unter diesen Voraussetzungen, deren Richtigkeit noch geprüft werden wird, wurde der Zylinderkondensator zur Bestimmung der Kapazitätsempfindlichkeit benutzt. Die Dimensionen des Kondensors waren dabei folgende:

Länge des Zylinders ( $Z$ ): 20 cm  
 Innerer Radius des Zylinders: 0,655 cm  
 Radius der Stange  $S$ : 0,3 cm,  
 so dass  $k = 0,640 \pm 0,006$  wird.

Die Eichung der Apparatur wurde nun vorgenommen, indem zu einer bekannten Kapazität  $C_0 = 247$  pF (222 cm)<sup>1)</sup> der beschriebene Zylinderkondensator parallelgeschaltet und durch Verschieben der Stange  $S$  um die Länge  $\Delta l$  ein Ausschlag  $\Delta A$  erzeugt wurde. Es ergibt sich bei dieser Anordnung folgende Berechnung der Empfindlichkeit:

$$E_e = \frac{1}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \frac{k \cdot \Delta l}{C_0 + k \cdot l} = \frac{\Delta l}{\Delta A} \cdot \frac{k}{C_0 + C_k},$$

wo  $\Delta l/\Delta A$  die zu messende Grösse ist. Es zeigt sich nun, dass diese Grösse mit Änderung der Widerstände  $R$  und  $R_1$  in der Schaltung der Messkapazität (vgl.  $C$  in Fig. 12) stark variiert, und zwar lässt sich leicht rein experimentell zu einem festen  $R_1$  ein optimaler Wert für  $R$  bestimmen, bei dem die Grösse  $\Delta l/\Delta A$  ein Minimum wird, so dass also an diesem Punkt eine Maximalempfindlichkeit vorliegt. Für die vorläufige Eichung ergab sich bei einem  $R_1$  von 1000  $\Omega$  ein  $R$  von 80000  $\Omega$  als günstigster Wert. Unter diesen

---

<sup>1)</sup> Geeicht vom Eidg. Amt für Mass und Gewicht, Bern, zu  $(247 \pm 1)$  pF.

Bedingungen wurde  $\Delta l/\Delta A$  bei einem  $\Delta l$  von 0,015 bis 0,025 cm bestimmt zu  $(1,25 \pm 0,025) \cdot 10^{-4}$  cm/Skt. Die Länge der inneren Elektrode betrug 10 cm, was einer Kapazität  $C_k = l \cdot k$  von 6,4 cm gleichkommen würde, ohne Berücksichtigung der inneren Randwirkungen und der verteilten Kapazität. Diese dürften schätzungsweise die Kapazität um ca. 25% vergrössern, so dass sich für  $C_k$  ein Wert von 8 cm ergibt, behaftet mit einem Fehler von maximal 1,5 cm, d. h. die Grösse  $C_0 + C_k$  beträgt  $(230 \pm 2)$  cm. Es ergibt sich aus diesen Angaben im Proportionalitätsbereich eine Empfindlichkeit von

$$E_c = (3,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-7} \frac{\Delta C}{C} / \text{Skt.}$$

Die Prüfung der gemachten Voraussetzung, nämlich der Darstellung  $\Delta C_k = k \cdot \Delta l$ , kann nun aber nicht durch die Messung der Ausschlagsänderungen  $\Delta A$  selbst erfolgen, da ja die Empfindlichkeit bei ändernder Gesamtkapazität nicht konstant bleiben muss. Es wurde deshalb für diese Messung eine Kompensationsmethode gewählt, bei welcher die Gesamtkapazität konstant bleibt. Die Änderung des Zylinderkondensators wurde kompensiert durch eine entsprechende Änderung eines Plattenkondensators, und zwar in der Weise, dass die Änderung  $\Delta x$  des Plattenabstandes  $x$  immer von derselben Grösse war und von demselben  $x$  ausging. Die diesem  $\Delta x$  entsprechende Ausschlagsänderung wurde nun durch eine Änderung des Zylinderkondensators rückgängig gemacht und dabei das Verhältnis  $\Delta l/\Delta x$  bestimmt bei verschiedenen Längen  $l$  des Zylinderkondensators. Dieses Verhältnis muss über einen bestimmten Bereich konstant sein, wenn unsere Voraussetzung richtig war. Die Resultate dieser Messung sind folgende:

Um die Genauigkeit der Messung zu steigern, wurde die Empfindlichkeit um ungefähr das Zehnfache herabgesetzt, wodurch es möglich war, zehnmal grössere Verschiebungen  $\Delta l$  und  $\Delta x$  zu verwenden.

$l$	4 cm	7 cm	10 cm	13 cm	16 cm	18 cm
$\Delta l/\Delta x$	1,87	1,88	1,885	1,875	2,035	2,08
$\pm$	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03

Es ist daraus ersichtlich, dass die Beziehung  $\Delta C_k = k \cdot \Delta l$  mit einem Fehler von 1% in  $k$  in der Umgebung von  $l = 10$  cm zu Recht benutzt worden ist.

Es wäre noch interessant, zu wissen, ob der Fehler von 3% in der Bestimmung der Empfindlichkeit im wesentlichen durch die

Methode der Eichung bedingt ist, d. h. ob die Apparatur selbst bei einer genaueren Eichmethode eine genauere Empfindlichkeitsbestimmung zuliesse. Dies kann durch folgenden Versuch entschieden werden: Am Plattenkondensator  $C_p$  (vgl. Fig. 14) wird ein Metallstift  $S$  fest montiert, der vorerst elektrisch isoliert ist und dessen eines Ende in den freien Raum zwischen den beiden Platten hineinragt. Dadurch, dass nun dieser Stift geerdet wird, wird die wirksame Kapazität in genau definierter, wenn auch nicht angebbarer Weise geändert, so dass also hier ein mit grosser Genauigkeit reproduzierbares  $\Delta C$  hergestellt werden kann.

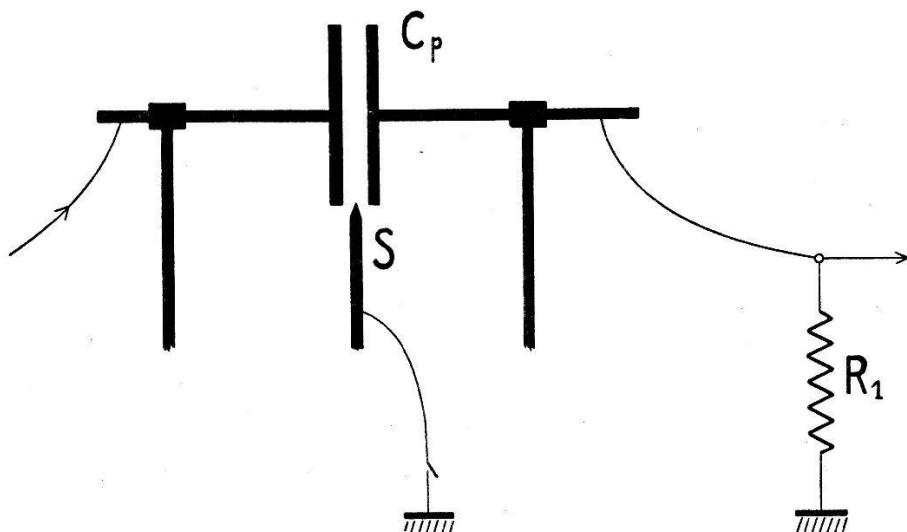


Fig. 14.

Dieses  $\Delta C$  wurde so eingestellt, dass es bei der oben bestimmten Maximalempfindlichkeit einen Ausschlag von 32,5 Skalenteilen hervorrief, welcher durch viele Messungen an verschiedenen Stellen des Proportionalitätsbereiches als unbeschränkt reproduzierbar festgestellt wurde, so dass gesagt werden kann, dass die Unschärfe der Empfindlichkeitsbestimmung zum überwiegenden Teil den Mängeln der Eichmethode zuzuschreiben ist, die Apparatur also leistungsfähiger ist als die beschriebene Eichung.

Die Verwendung derselben Anordnung zur Bestimmung des Proportionalitätsbereiches ist angesichts der Genauigkeit dieser Methode zu empfehlen. Es sei hier eine zu diesem Zwecke aufgenommene Reihe von Ausschlägen wiedergegeben:

*Nullpunkt (S isoliert):*

603,5	647	680	733	768,5	841	895,5	963
-------	-----	-----	-----	-------	-----	-------	-----

*Ausschlag (S geerdet):*

27,0	29,5	31,5	32,5	32,5	32,5	32,5	32,5
------	------	------	------	------	------	------	------

### 9. Phasenempfindlichkeit.

Wie schon angedeutet wurde, ist nun allerdings die gemessene Kapazitätsempfindlichkeit keine Apparaturkonstante, da sie ja je nach der Schaltung der Messkapazität eine ganz verschiedene ist — wir werden sehen, dass nicht einmal die gemessene Maximalempfindlichkeit eine Konstante ist, sondern mit wachsender Grösse der Messkapazität stark abnimmt. Als Grundlage für die Wahl der geeigneten Schaltung kann deshalb die Kapazitätsempfindlichkeit nicht verwendet werden; die Apparaturkonstante, die diesen Zweck erfüllt, kann nur die Phasenempfindlichkeit sein, wie ja nach der Art der Konstruktion der Apparatur zu erwarten ist. Diese Phasenempfindlichkeit ist definiert als  $E_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta A}$ , wo  $\Delta\varphi$  die auf irgend eine Weise erzeugte Änderung der Phasendifferenz zwischen den beiden Zweigen der Gesamtschaltung bedeutet. Da dieses  $\Delta\varphi$  einer direkten Messung nicht zugänglich ist, kann die Phasenempfindlichkeit nur auf dem Wege über ein messbar herstellbares  $\Delta C$  bestimmt werden, wobei nach der Beziehung

$$E_\varphi = \frac{1}{\Delta A} \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{\Delta A} \cdot \frac{d\varphi}{dC} \cdot \Delta C$$

die differentielle Änderung des Phasenwinkels mit der Messkapazität bekannt sein muss. Wählen wir speziell die schon verwendete Schaltung für  $C$ , für welche die Kapazitätsempfindlichkeit als  $E_c = \frac{1}{\Delta A} \cdot \frac{\Delta C}{C}$  gemessen wurde, so ergibt sich die Beziehung

$$E_\varphi = E_c \cdot \left( C \cdot \frac{d\varphi}{dC} \right), \quad (1)$$

d. h. es bleibt nur noch die Grösse der Funktion  $C \cdot \frac{d\varphi}{dC}$  zu bestimmen.

Um die Art der Abhängigkeit des Phasenwinkels von der Messkapazität  $C$  zu zeigen, müssen wir auf die Darstellung der Gesamtschaltung (Fig. 12) zurückgreifen. Es soll die durch eine infinitesimale Änderung  $dC$  der Messkapazität  $C$  hervorgerufene Änderung  $d\varphi$  der Phasendifferenz  $\varphi = \varphi_{II} - \varphi_I$  ermittelt werden, wo  $\varphi_I$  und  $\varphi_{II}$  die Phasenwinkel der auf die Gitter der Koinzidenzschaltung  $K$  auftreffenden Impulsreihen bedeuten, wobei es nicht von Bedeutung ist, dass diese Impulsreihen keine sinusförmigen Spannungen sind, da ja die Multivibratoren zu den Grössen  $\varphi_I$  und  $\varphi_{II}$  nur je eine Konstante beitragen. Da zudem durch eine kleine Änderung von  $C$  der Phasenwinkel  $\varphi_I$  keine Änderung erleidet, können wir

unsere Betrachtung auf die Grösse von  $\varphi_{II}$  beschränken. Wir wollen  $\varphi_{II}$  in folgende Summanden zerlegen:

$$\varphi_{II} = \varphi_{V_I} + \varphi_C + \varphi_{V_{II}} + \varphi_{M_{II}} + \text{Const.},$$

wo die einzelnen Glieder jeweils den Winkel angeben, um welchen die Phase in der im Index bezeichneten Schaltung gedreht wird; die Konstante stellt die Relation zu  $\varphi_I$  her. Eine Änderung  $dC$  der Messkapazität bewirkt nun vor allem eine direkte Änderung von  $\varphi_C$ , ausserdem aber auch eine Änderung der Amplitude der Sinusspannung, wodurch die übrigen Glieder ebenfalls geändert werden. Die Endröhre des Verstärkers  $V_I$  ist so dimensioniert, dass die Belastung durch die Schaltung  $C$  klein ist, so dass die Amplitudenänderung an dieser Stelle nicht in Betracht fällt. Es kann also  $\varphi_{V_I}$  als konstant angesehen werden. Dagegen werden  $\varphi_{V_{II}}$  und vor allem  $\varphi_{M_{II}}$  mit der Amplitudenänderung an  $R_1$  eine Änderung erfahren, deren Grösse gegenüber der Änderung von  $\varphi_C$  in Betracht fallen könnte. Wir müssen demnach den gesamten Phasenwinkel  $\varphi_{II}$  in zwei Terme aufspalten, wobei ein Term ( $\varphi_C$ ) direkt von  $C$  abhängig ist, während der zweite ( $\varphi_{V_{II}} + \varphi_{M_{II}}$ ) nur auf dem Umweg über die Amplitude  $a$  der Sinusspannung an  $R_1$  von  $C$  abhängt; ein dritter konstanter Term stellt wieder die Relation zu  $\varphi_I$  her:

$$\varphi_{II} = \varphi'(C) + \varphi''(a(C)) + \text{Const.}$$

Der gesuchte Differentialquotient wird also

$$\frac{d\varphi_{II}}{dC} = \frac{d\varphi}{dC} = \frac{d\varphi'}{dC} + \frac{d\varphi''}{da} \cdot \frac{da}{dC}. \quad (2)$$

Es bedeutet nun keine Schwierigkeit, die Grössen  $\frac{d\varphi'}{dC}$  und  $\frac{da}{dC}$  zu berechnen; dagegen ist natürlich  $\frac{d\varphi''}{da}$  einer Bestimmung nicht leicht zugänglich. Es ist jedoch an Hand von Fig. 1 a/b eine grobe Schätzung der Grösse  $\frac{d\varphi''}{da/a}$ , d. h. der Änderung des Phasenwinkels im Multivibrator mit der relativen Änderung der Eingangsspannung möglich. Diese Abschätzung ergibt, dass der zweite Term von  $\frac{d\varphi}{dC}$  höchstens den Betrag von einigen Prozenten des ersten Terms erreichen kann, so dass es gegeben erscheint, die Phasenempfindlichkeit vorerst nur auf Grund des ersten Terms zu berechnen, um nachher mit Hilfe dieser Näherung eine Korrektur zu berechnen, welche den Einfluss des zweiten Terms wiedergibt.

Wir setzten deshalb vorerst  $\frac{d\varphi}{dC} = \frac{d\varphi'}{dC}$ , welche Grösse nun zu berechnen ist. Die Grösse  $d\varphi'$  bedeutet dabei nach unserer Definition die durch die Kapazitätsänderung  $dC$  direkt bewirkte Phasenverschiebung, also die Verschiebung zwischen den Sinusspannungen  $\varepsilon_0$  und  $\varepsilon$  in Fig. 15. Da die Belastung der Schaltung am Ausgang

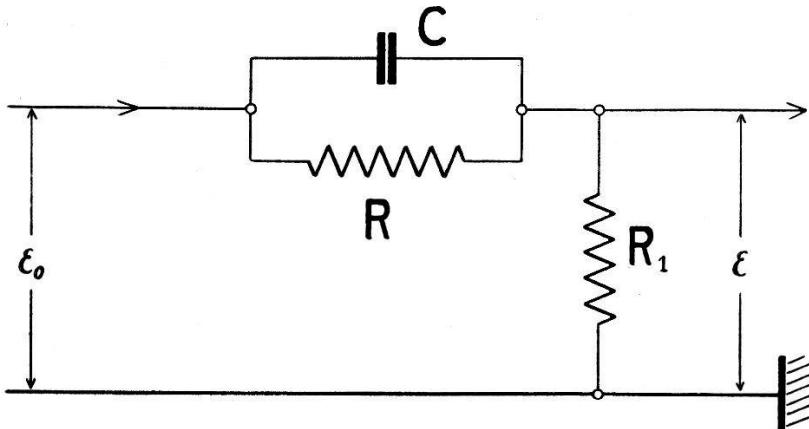


Fig. 15.

klein ist (Belastungswiderstand  $\approx 10^3 \cdot R_1$ ), lässt sich die Spannung in dieser Schaltung symbolisch ausdrücken als

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{R_1 + j\omega R R_1 C}{R + R_1 + j\omega R R_1 C}, \quad (3)$$

woraus sich die Tangente des Phasenwinkels zwischen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_0$  berechnet zu:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega R^2 C}{R + R_1 + \omega^2 R^2 R_1 C^2} = x.$$

Die differentielle Änderung von  $\varphi$  mit  $C$  ergibt sich daraus leicht auf folgende Weise:

$$\frac{d\varphi}{dC} = \frac{d \operatorname{arctg} x}{dC} = \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} \frac{dx}{dC} = \frac{dx}{dC} \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

wo  $x = \operatorname{tg} \varphi$  einzusetzen ist, so dass sich, wenn wir gleich die für die Empfindlichkeitsbestimmung zu verwendende Grösse anschreiben, folgendes Resultat zeigt:

$$C \cdot \frac{d\varphi}{dC} = \omega R^2 C \cdot \frac{R + R_1 - \omega^2 R^2 R_1 C^2}{(R + R_1 + \omega^2 R^2 R_1 C^2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega R^2 C}{R + R_1 + \omega^2 R^2 R_1 C^2}\right)^2}. \quad (4)$$

Um vorerst einen Überblick über den Verlauf einer solchen Kurve zu erhalten, greifen wir den Bereich heraus, wo die beiden

Summenglieder  $R_1$  und  $\omega^2 R^2 R_1 C^2$  gegenüber  $R$  vernachlässigt werden können, so dass sich folgende einfache Darstellung ergibt:

$$C \cdot \frac{d\varphi}{dC} = \omega R C \cdot \frac{1}{1 + (\omega R C)^2}. \quad (5)$$

Diese Funktion erreicht für feste Werte von  $\omega$  und  $C$  offensichtlich ein Maximum bei einem optimalen  $R$ , und zwar erhält man durch Differenzieren nach  $R$  die Extremumsbedingung  $\omega R C = 1$ , d. h. die Funktion erreicht bei einem optimalen Wert

$$R_{\text{opt}} = \frac{1}{\omega C} \quad (6)$$

das Maximum

$$C \cdot \frac{d\varphi}{dC} (R_{\text{opt}}) = 0,5. \quad (7)$$

Ist nun die Phasenempfindlichkeit  $E_\varphi$  eine Apparaturkonstante, so muss die Kapazitätsempfindlichkeit  $E_c$  nach Gleichung (1) an eben dieser Stelle ein Minimum werden; die experimentelle Feststellung einer optimalen Kapazitätsempfindlichkeit bei einem  $R_{\text{opt}}$  findet damit eine einfache Deutung.

Die Gleichungen (5) bis (7) gelten streng für  $R_1 = 0$ , und zwar ist in dieser Grenze die grösste Empfindlichkeit  $E_c$  dann erreicht, wenn die Wechselstromwiderstände von  $R$  und  $C$  einander gleich sind (6). Physikalisch sind diese einfachen Beziehungen bei kleinen Kapazitäten zu verwirklichen; mit wachsendem  $C$  nehmen die Abweichungen von (4) sehr rasch zu und das Maximum von  $C \cdot \frac{d\varphi}{dC}$  sinkt unter den Grenzwert 0,5, so dass  $E_c$  abnimmt.

Fig. 16 gibt einen Überblick über den Verlauf der Gleichung (4) als Funktion von  $R$ , für drei Kapazitätswerte berechnet bei  $R_1 = 1000 \Omega$  und  $\omega = 5 \cdot 10^4$  Hz. Die punktiert dargestellte Kurve gibt den Verlauf von  $(C \cdot \frac{d\varphi}{dC})_{\text{max}}$  als Funktion von  $R$  wieder; weiter ist zur Bestimmung von  $R_{\text{opt}}$  dessen Abhängigkeit von  $C$  dargestellt, ebenso wie zur Abschätzung der Empfindlichkeit der Verlauf von  $(C \cdot \frac{d\varphi}{dC})_{\text{max}}$  mit  $C$ .

Wir haben nun  $C \cdot \frac{d\varphi}{dC}$  zu berechnen an der Stelle, an welcher  $E_c$  gemessen wurde, d. h. unter folgenden Bedingungen: Die Frequenz des Generators wurde mit Hilfe eines Tongenerators auf 8000 Hertz eingestellt, so dass  $\omega = (5,03 \pm 0,03) \cdot 10^4$  Hertz war. Weiter war  $R = 8 \cdot 10^4 \Omega$  und  $R_1 = 10^3 \Omega$ , beide mit Fehlern von einem Pro-

mille behaftet. Die Messkapazität war nach den früheren Betrachtungen  $(256 \pm 2) \cdot 10^{-12}$  Farad. Daraus ergibt sich nach (4):

$$C \cdot \frac{d\varphi}{dC} = 0,49 \pm 0,01$$

und

$$E_\varphi = (1,7 \pm 0,05) \cdot 10^{-7},$$

welche Grösse nun im Gegensatz zu  $E_c$  eine Apparaturkonstante, d. h. von der speziellen Schaltung der Messkapazität unabhängig ist. Diese Unabhängigkeit wird noch bewiesen werden.

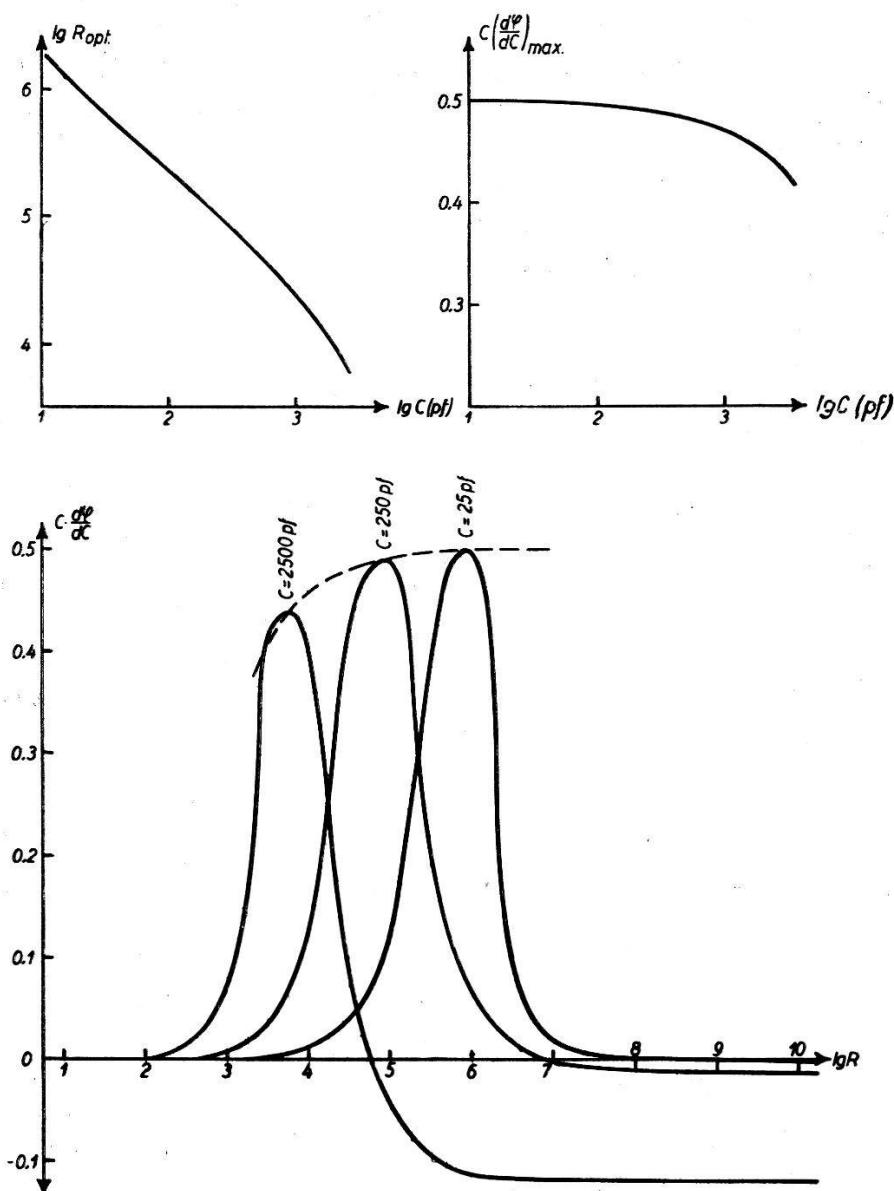


Fig. 16.

Als Voraussetzung für die obige Bestimmung von  $E_\varphi$  wurde angenommen, dass in Gleichung (2) der zweite Term klein sei gegenüber dem ersten Term. Dies muss noch gezeigt werden. Wir

wollen erst die Grösse  $\frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dC}$ , das ist die differentielle Änderung der relativen Amplitude der Sinusspannung mit der Messkapazität, berechnen. Diese Änderung  $da/a$  entsteht in der Schaltung der Messkapazität selbst und ist gleich der Änderung des Verhältnisses  $\varepsilon/\varepsilon_0$  (Fig. 15). Weiter ist eine zusätzliche Amplitudenänderung im Verstärker  $V_{II}$  zu erwarten. Bei der Aufspaltung der zu bestimmenden Grösse  $\frac{d\varphi''(a(C))}{dC}$  in die Faktoren  $\frac{d\varphi''(a)}{da}$  und  $\frac{da(C)}{dC}$  können wir nun aber diese weitere Amplitudenänderung in  $V_{II}$  bereits als Phasenverschiebung auffassen und zum ersten Term hinzuschlagen, so dass für den zweiten Term nur die Amplitudenänderung  $d\varepsilon/\varepsilon_0$  bleibt. Physikalisch bedeutet dies einfach, dass die Grösse  $\frac{d\varphi''}{da}$  gemessen werden muss, indem eine bekannte Amplitudenänderung nicht erst am Eingang von  $M_{II}$ , sondern schon am Eingang von  $V_{II}$  erzeugt wird. Die Berechnung ergibt nach dieser Aufspaltung folgendes: Nach (3) ist

$$a = |\varepsilon| = |\varepsilon_0| \cdot \frac{R_1 + \omega R R_1 C}{R + R_1 + \omega R R_1 C},$$

somit wird

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dC} = \frac{\omega R^2}{(1 + \omega R C) \cdot (R + R_1 + \omega R R_1 C)}. \quad (8)$$

Der Betrag dieser Grösse bei den Werten  $\omega = 5 \cdot 10^4$ ,  $R = 8 \cdot 10^4$ ,  $R_1 = 10^3$  und  $C = 2,5 \cdot 10^{-10}$  Farad wird gleich  $2 \cdot 10^9$  Farad $^{-1}$ . Dieser Wert ändert mit  $R$  nur langsam im Vergleich zu  $\frac{d\varphi}{dC}$ ; die Funktion (8) durchläuft kein Maximum im Bereich positiver Werte von  $R$ .

Weiter ist noch die Grösse  $a \cdot \frac{d\varphi''}{da}$  zu bestimmen, was experimentell geschehen kann, wenn wir aufspalten in die beiden Differentialquotienten  $\frac{d\varphi''}{dA}$  und  $a \cdot \frac{dA}{da}$ , wo  $\frac{d\varphi''}{dA}$  nichts anderes ist als die Phasenempfindlichkeit  $E_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta A}$ , da wir uns ja im Proportionalitätsbereich bewegen; diese ist aber näherungsweise bekannt. Es bleibt also die experimentelle Bestimmung von  $\frac{\Delta A}{\Delta a/a}$ , d. h. des Ausschlages des Galvanometers  $G$  für eine relative Amplitudenänderung am Eingang von  $V_{II}$ , gemessen bei der maximalen Empfindlichkeit der Apparatur. Diese einfache Messung ergab den Wert von  $9 \cdot 10^4$  Skt. Dieser Wert gilt für eine Ausgangsamplitude von ca. 50 Volt; es ist nach Fig. 1 klar, dass bei kleineren

Amplituden der Wert von  $\frac{dA}{da}$  zunimmt und sodann die folgenden Betrachtungen nicht gültig sein können.

Damit sind alle zur Bestimmung der Korrektur der Phasenempfindlichkeit notwendigen Größen bekannt, und es wird

$$\frac{d\varphi''}{dC} = E_\varphi \cdot \left( a \cdot \frac{\Delta A}{\Delta a} \right) \cdot \left( \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dC} \right) = 3,2 \cdot 10^{-7},$$

oder bei  $C = 2,56 \cdot 10^{-10}$

$$C \cdot \frac{d\varphi}{dC} = C \cdot \frac{d\varphi'}{dC} + C \cdot \frac{d\varphi''}{dC} = 0,49 + 0,008,$$

d. h. die Korrektur durch die Amplitudenänderung liegt gerade noch innerhalb des für die Näherungsgröße  $C \cdot \frac{d\varphi'}{dC}$  bestimmten Fehlers ( $\pm 0,01$ ). Wir dürfen uns deshalb mit dieser näherungsweisen Bestimmung der Korrektur begnügen und für  $C \cdot \frac{d\varphi}{dC}$  den neuen Wert  $0,5 \pm 0,01$  angeben, so dass wir als endgültigen Wert für die Phasenempfindlichkeit erhalten

$$\underline{E_\varphi = (1,75 \pm 0,05) \cdot 10^{-7}}.$$

Da mit variierendem  $R$  die Funktion  $C \cdot \frac{d\varphi}{dC}$  rascher ändert als die Korrektur, gilt diese Berechnung nur für Messungen in der Nähe des optimalen Widerstandes.

Es ist nun auf Grund dieser Phasenempfindlichkeit möglich, die Kapazitätsempfindlichkeit für eine beliebige Schaltung der Messkapazität nach der Beziehung (1) zu berechnen, sofern die gemachten Voraussetzungen berücksichtigt werden, da dann diese Phasenempfindlichkeit konstant bleibt. Anhand der Kurve aus Fig. 16 ist deshalb vorauszusagen, dass die maximal erreichbare Kapazitätsempfindlichkeit bei der verwendeten Schaltung für größere Kapazitätswerte  $C$  stark abnimmt, für kleinere  $C$  dagegen konstant auf  $2 \cdot E_\varphi$  bleibt, also auf ungefähr der Empfindlichkeit, welche bei  $C = 250 \text{ pF}$  bestimmt wurde. Es wäre interessant, diese Kapazitätsempfindlichkeit für Kapazitäten von einigen Pikofarad zu beweisen, was mit Hilfe der bereits verwendeten Mittel möglich ist, wenn auch natürlich mit einiger Einbusse an Genauigkeit. Zu dieser Empfindlichkeitsbestimmung muss jedoch eine Kapazität von der Größe einiger Zentimeter mit einiger Genauigkeit bekannt sein, wofür ein Kreisplattenkondensator mit einem Plattenradius von 5 cm bei Plattenabständen von 1 bis 2 cm verwendet wurde.

## 10. Die Kapazität des Plattenkondensators.

Die Kapazität dieses Kondensators im Bereich relativ grosser Plattenabstände, wo die Berechnung der Korrekturen für die Randwirkung versagt, lässt sich nämlich mittels unseres bekannten  $\Delta C_k$  ermitteln. Diese Bestimmung gestaltet sich mit Hilfe unserer Apparatur folgendermassen. Wir schalten als Messkapazität  $C$  drei Kondensatoren parallel, nämlich den Zylinderkondensator  $C_k$ , den Plattenkondensator  $C_p$  und eine Kapazität  $C_0$  von beliebiger Grösse. Nach Ermittlung des optimalen Widerstandes  $R$  werden folgende Messungen durchgeführt: Bei verschiedenen Plattenabständen  $x$  des Plattenkondensators  $C_p$  wird eine Änderung  $\Delta x$  des jeweiligen Abstandes durch eine Änderung  $\Delta l$  der Länge des Zylinderkondensators  $C_k$  so kompensiert, dass der Ausschlag der Apparatur gerade Null bleibt. Dies bedeutet, dass die Änderungen der betreffenden Kondensatoren von gleicher Grösse sind; es gilt also unabhängig von der Gesamtkapazität:

$$\Delta C_p = \Delta C_k = k \cdot \Delta l. \quad (9)$$

Stellen wir nun die Kapazität des Kreisplattenkondensators mit der Korrektur für die Randwirkung in der bekannten Weise dar

$$C_p = \frac{R^2}{4x} \cdot (1 + p(x)),$$

wo  $p(x)$  eine Potenzreihe darstellt, so können wir  $\Delta C_p$  als Funktion von  $\Delta x$  berechnen und erhalten:

$$\Delta C_p = \left\{ -\frac{R^2}{4x^2} \cdot (1 + p(x)) + \frac{R^2}{4x} \cdot \frac{dp(x)}{dx} \right\} \cdot \Delta x,$$

gültig für genügend kleine Werte von  $\Delta x$ . Diesen Ausdruck setzen wir in (9) ein und erhalten so, wenn wir noch setzen:

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dC_p}{dx} = q(x) \quad (10)$$

die Beziehung

$$\frac{dp(x)}{dx} - \frac{1}{x} \cdot p(x) - \left\{ \frac{1}{x} + \frac{4k}{R^2} \cdot q(x) \cdot x \right\} = 0, \quad (11)$$

eine allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung in  $p(x)$  mit variablen Koeffizienten.

Der wesentliche Ausdruck in dieser Gleichung ist für uns natürlich die Funktion  $q(x)$ , deren Verlauf mit dem Plattenabstand  $x$  experimentell zu bestimmen ist, wobei die Bedingung gilt, dass  $\Delta x$  immer möglichst klein gewählt werden muss. Die Messungen

wurden deshalb mit Werten für  $\Delta x$  ausgeführt, welche zwischen 0,01 und 0,05 cm liegen, und ergaben folgende Resultate:

Alle für  $q(x)$  angegebenen Werte sind definitionsgemäß negativ, vgl. (9) und (10); der Einfachheit halber sind sie durchgehend ohne Vorzeichen aufgeführt.

$x$	0,8 cm	1,2 cm	1,6 cm	2,0 cm	2,4 cm
$q(x)$	16,59	7,87	4,63	2,94	1,89
$\pm$	0,25	0,05	0,04	0,03	0,02

Es ist nun naheliegend, diese Werte zu vergleichen mit den Werten für  $q(x)$ , wie sie sich theoretisch ergeben, wenn man  $C_p$  als bekannt annimmt, und zwar können wir für  $C_p$  näherungsweise die Grösse  $\frac{R^2}{4x}$  oder aber eine der Funktionen als Grundlage des Vergleichs wählen, welche die Kapazität des Plattenkondensators mit Einbeziehung der Randwirkung darstellen, jedoch nur für kleine Plattenabstände gültig sind und die Feldstreuung in der Umgebung nicht berücksichtigen. Zu diesem Zwecke sei die KIRCHHOFF'sche Darstellung benutzt, und zwar die einfachere Form

$$C_p^* = \frac{R^2}{4x} + \frac{R}{4\pi} \cdot \left( \ln \frac{16 R \pi}{x} - 1 \right). \quad (12)$$

Die Funktion  $q(x)$  berechnet sich aus (10) im ersten Fall zu  $-\frac{R^2}{4kx^2}$ , während die KIRCHHOFF'sche Darstellung

$$q^*(x) = - \left\{ \frac{R^2}{4kx^2} + \frac{R}{4k\pi x} \right\} \quad (13)$$

ergibt; die numerischen Werte sind zusammen mit den experimentellen Ergebnissen in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

$x$	$\frac{R^2}{4kx^2}$	$q^*(x)$	$q(x)_{\text{exp}}$
0,8	15,26	16,05	16,59
1,2	6,78	7,30	7,87
1,6	3,82	4,21	4,63
2,0	2,44	2,76	2,94
2,4	1,695	1,953	1,89

Es ist aus dieser Tabelle sofort ersichtlich, dass die experimentellen Werte näher an den Werten von  $q^*(x)$  liegen. Das gegebene Vorgehen ist deshalb, die KIRCHHOFF'sche Darstellung als Näherungslösung der Gleichung (11) zu betrachten und aus den experi-

mentellen Werten von  $q(x)$  eine Korrektur zu berechnen. Wir schreiben also

$$q(x) = q^*(x) + q'(x), \quad (14)$$

wo  $q'(x)$  den Unterschied der experimentellen Werte zu  $q^*(x)$  bedeutet.

Setzten wir nun in der Differentialgleichung (11) die Darstellung (14) für  $q(x)$  ein, so zeigt die Integration, dass sich die Lösung  $p(x)$  in zwei entsprechende Terme aufspalten lässt:

$$p(x) = p^*(x) + p'(x), \quad (15)$$

wo  $p^*(x)$  natürlich die KIRCHHOFF'sche Darstellung für  $p(x)$  ergeben muss, nämlich

$$p^*(x) = \frac{x}{\pi R} \cdot \left( \ln \frac{16 R \pi}{x} - 1 \right),$$

was leicht zu verifizieren ist. Für  $p'(x)$  bleibt dann folgender Ausdruck:

$$p'(x) = + \frac{4 k x}{R^2} \int_{x_0}^x q'(x) dx.$$

Um diese Integration durchzuführen, ist  $q'(x)$  in einer Potenzreihe darzustellen, welche die experimentellen Werte wiedergibt. Beschränken wir uns auf zwei Glieder, so finden wir die einfache Darstellung:

$$q'(x) = -x + 0,455 x^2.$$

Die Werte, die diese Kurve durchläuft, ergeben mit den experimentellen Werten folgenden Vergleich:

$x$	0,8 cm	1,2 cm	1,6 cm	2,0 cm	2,4 cm
$q'_{\text{theor}}$	-0,509	-0,545	-0,435	-0,180	+0,175
$q'_{\text{exp}}$	-0,54	-0,57	-0,42	-0,18	+0,063
$\pm$	0,25	0,05	0,04	0,03	0,02

Die Tabelle zeigt, dass die angegebene Potenzreihe den experimentellen Werten bis zu einem Plattenabstand von 2 cm mit genügender Genauigkeit folgt, dagegen bei 2,4 cm zu stark abweicht; dieser Bereich wird deshalb im Weiteren ausgeschlossen.

Die Integration für  $p'(x)$  ist nun sofort durchgeführt; beachtet man, dass die Korrektur für sehr kleine  $x$ -Werte Null werden muss, so ergibt sich

$$p'(x) = -\frac{1}{R^2} \cdot (1,28 x^3 - 0,388 x^4)$$

oder nach (12) und (15)

$$C_p = C_p^* - (0,32 x^2 - 0,097 x^3). \quad (16)$$

Die Darstellung ist für den verwendeten Plattenkondensator in der einmal gewählten Aufstellung bis  $x = 2$  cm gültig.

Die folgende Tabelle gibt einen Vergleich zwischen den Kapazitätswerten  $C_p$  und den beiden theoretischen Näherungen.

$x$	$\frac{R}{4x}$	$C_p^*$	$C_p$
0,4	15,63 cm	17,80 cm	(17,75) cm
0,8	7,81 cm	9,70 cm	9,54 $\pm$ 0,05 cm
1,2	5,21 cm	6,94 cm	6,64 $\pm$ 0,04 cm
1,6	3,906 cm	5,520 cm	5,10 $\pm$ 0,1 cm
2,0	3,125 cm	4,651 cm	4,147 $\pm$ 0,15 cm

## 11. Empfindlichkeit bei sehr kleinen Kapazitäten.

Es ist nun leider auch bei Kenntnis der wahren Kapazität des Plattenkondensators nicht möglich, mit den vorhandenen Mitteln die beste erreichbare Empfindlichkeit bei kleinen Messkapazitäten zu bestimmen, da diese Bestimmung die Herstellung eines entsprechend kleinen  $C$  voraussetzen würde, was bei dem vorhandenen Plattenkondensator nicht mit der notwendigen Genauigkeit möglich ist. Da wir jedoch die Maximalempfindlichkeit für grössere Kondensatoren kennen, kann es uns genügen, bei beliebig unempfindlicherer Apparatur eine Empfindlichkeitsbestimmung vorzunehmen — vorausgesetzt, dass die Herabsetzung der Empfindlichkeit auf eine Weise geschieht, welche die Funktion der Apparatur nicht prinzipiell beeinflusst. Gelingt es uns, diese neue Empfindlichkeit bei Verwendung grösserer und kleinerer Messkapazitäten mit hinreichend genauer Übereinstimmung zu erhalten, so darf daraus geschlossen werden, dass die genannte Maximalempfindlichkeit  $E_e = 3,5 \cdot 10^{-7}$  auch für Messungen an sehr kleinen Kapazitäten erreicht wird.

Eine solche Herabsetzung der Maximalempfindlichkeit um ungefähr das Hundertfache kann erreicht werden durch Ausschalten einer Verstärkerstufe von  $V_{III}$ . Durch geeignete Wahl der Kopplungselemente der Schaltungen  $K$  und  $E$  wird erreicht, dass der Proportionalitätsbereich bei der gewünschten Empfindlichkeit auftritt.

Das Prinzip dieser Messungen ist folgendes: Die Kenntnis der Grösse des Plattenkondensators  $C_p$  genügt natürlich nicht zur Berechnung des zur Empfindlichkeitsbestimmung verwendeten  $\Delta C/C$ , da in der Grösse  $C$  auch die verteilten Kapazitäten  $\bar{C}$  der Schaltung der Messkapazität eingehen; die Kapazität  $C$  setzt sich also aus zwei Summanden zusammen, von welchen nur der eine bekannt ist:

$$C = C_p + \bar{C}. \quad (17)$$

Es gibt jedoch auch hier eine Näherungsmethode, welche mit Erfolg angewendet werden kann, solange  $\bar{C}$  nicht die Grösse von  $C_p$  erreicht. Betrachten wir nämlich die Darstellung der Phasenempfindlichkeit

$$E = \frac{\Delta \varphi}{\Delta A} = \frac{d\varphi}{dC} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta A} = \frac{d\varphi}{dC} \cdot \frac{dC}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta A}, \quad (18)$$

so ist ersichtlich, dass die Grösse  $C$  einzig im Faktor  $\frac{d\varphi}{dC}$  mit beiden Summanden eingeht, während  $\frac{dC}{dx}$  eine Funktion von  $C_p$  allein ist, da ja nach der Art, wie  $C_p$  bestimmt wurde, dieses alle Grössen enthält, welche sich mit  $x$  ändern. Es ist also nach (10) und (14):

$$\frac{dC}{dx} = \frac{dC_p}{dx} = k \cdot (q^*(x) + q'(x)_{\text{theor}}).$$

Der Faktor  $\frac{d\varphi}{dC}$  wird für Kapazitäten der Grössenordnung von  $C_p$  in weiter Umgebung des optimalen Widerstandes  $R$  gleich der vereinfachten Darstellung (5), also

$$\frac{d\varphi}{dC} = \omega R \cdot \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \quad (19)$$

(die Korrektur für die Amplitudenänderung darf hier vernachlässigt werden). Betrachten wir diesen Ausdruck auf seine Veränderlichkeit mit der Variablen  $C$  hin, so existieren offenbar zwei recht unterschiedliche Bereiche, nämlich ein Bereich, nach oben begrenzt durch  $\omega RC < 1$ , in welchem  $\frac{d\varphi}{dC}$  relativ schwach von  $C$  abhängig ist, und ein Bereich  $\omega RC > 1$ , worin  $\frac{d\varphi}{dC}$  stark von  $C$

abhängig wird. Es muss deshalb möglich sein, mit einem nur näherungsweise bekannten  $C$  im ersten Bereich eine Empfindlichkeit zu bestimmen, deren relativer Fehler kleiner ist als derjenige von  $C$ . Andererseits lässt sich umgekehrt mit relativ grosser Genauigkeit  $C$  bestimmen, wenn wir aus einer im zweiten Bereich gemessenen Kapazitätsempfindlichkeit durch Vergleich mit der im ersten Bereich bestimmten Phasenempfindlichkeit die Grösse von  $\frac{d\varphi}{dC}$  bestimmen. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies folgenden Vorgang:

a) Zu einer bestimmten Kapazität  $C$ , deren Näherungswert  $C_\varphi$  bekannt ist, wird ein Widerstand  $R$  so gewählt, dass  $\omega RC < 1$ . Nun wird der Ausschlag  $\Delta A$  der Apparatur für eine Verschiebung  $\Delta x$  des Plattenabstandes von  $C_\varphi$  gemessen und daraus die Phasenempfindlichkeit berechnet:

$$E_\varphi^{(1)} = \left( \frac{d\varphi}{dC} \right)^{(1)} \cdot \left| \frac{dC}{dx} \right| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\Delta A} \right| \quad (20)$$

$E_\varphi^{(1)}$  ist ein Näherungswert, dessen Fehler aber kleiner ist wie der Fehler von  $C$ .

b) Nun wird der Widerstand  $R$  bis zu einem Wert  $R'$  erhöht, wo  $\omega R' C > 1$  wird. Dann wird ein neuer Quotient  $\left( \frac{\Delta x}{\Delta A} \right)'$  bestimmt, woraus sich berechnet:

$$\left( \frac{d\varphi}{dC} \right)^{(2')} = \frac{E_\varphi^{(1)}}{\left| \frac{dC}{dx} \right| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\Delta A} \right|'} \quad (21)$$

Nach (19) ergibt sich daraus ein neuer Näherungswert für  $C$ :

$$C^{(2)} = \frac{1}{\omega R'} \sqrt{\frac{\omega R'}{\left( \frac{d\varphi}{dC} \right)^{(2')}} - 1} \quad (22)$$

c) Diese neue Näherung ist wiederum besser als die Näherung  $\left( \frac{d\varphi}{dC} \right)^{(2')}$ , so dass aus ihr eine bessere Näherung als  $\left( \frac{d\varphi}{dC} \right)^{(1)}$ , berechnet werden kann:

$$\left( \frac{d\varphi}{dC} \right)^{(2)} = \omega R \cdot \frac{1}{1 + (\omega R C^{(2)})^2} \quad (23)$$

Aus diesem Wert lässt sich eine neue Näherung für  $E_\varphi$  berechnen, deren Fehler nun wesentlich kleiner ist als der Fehler von  $E_\varphi^{(1)}$ :

$$E_\varphi^{(2)} = \left( \frac{d\varphi}{dC} \right)^{(2)} \cdot \left| \frac{dC}{dx} \right| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\Delta A} \right| \quad (24)$$

\*

d) Dieser Wert wird verglichen mit einer Bestimmung von  $E_\varphi$  bei  $C = 250$  cm. Stimmen diese Werte überein, so ist gezeigt, dass die zur Berechnung von  $\frac{d\varphi}{dC}$  verwendete Beziehung (19) für Kapazitäten von einigen Zentimetern gültig ist, dass also auch bei solchen Kapazitäten eine Kapazitätsempfindlichkeit  $E_c = 2 \cdot E_\varphi$  erreicht werden kann.

Es ist zu beachten, dass die Werte von  $R$  und  $R'$  nicht sehr verschieden sein dürfen, da sonst in (17) der Wert von  $\bar{C}$  nicht mehr als konstant betrachtet werden kann. Um diesen Fehler möglichst zu vermeiden, wurden die Werte  $R$  und  $R'$  durch Serie- und Parallelschaltung ein und derselben Widerstände hergestellt. Um aber gleichzeitig eine Kontrolle für die Konstanz der Grösse  $\bar{C}$  zu gewinnen, wurden die Messungen je an drei verschiedenen Kapazitätswerten  $C_p$  vorgenommen. Die Resultate dieser Messungen sind, nach dem genannten Vorgehen geordnet und im praktischen Maßsystem gerechnet:

a)  $R = 1,75 \cdot 10^6$ .

$x$	$C_p$	$\left  \frac{\Delta x}{\Delta A} \right $	$E_\varphi^{(1)}$
1,2	$(7,38 \pm 0,04) \cdot 10^{-12}$	$(0,51 \pm 0,025) \cdot 10^{-4}$	$(1,76 \pm 0,08) \cdot 10^{-5}$
1,6	$(5,66 \pm 0,11) \cdot 10^{-12}$	$(0,71 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$	$(1,65 \pm 0,07) \cdot 10^{-5}$
2,0	$(4,61 \pm 0,17) \cdot 10^{-12}$	$(1,08 \pm 0,07) \cdot 10^{-4}$	$(1,71 \pm 0,12) \cdot 10^{-5}$

b) Aus a) ergibt sich ein mittlerer Näherungswert  $E_\varphi^{(1)} = (1,71 \pm 0,09) \cdot 10^{-5}$ . Damit ergeben sich bei  $R' = 5 \cdot 10^6$  folgende Resultate:

$x$	$\left  \frac{\Delta x}{\Delta A} \right '$	$C^{(2)}$	$\bar{C}^{(2)} = C^{(2)} - C_p$
1,2	$(0,680 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$	$(8,51 \pm 0,26) \cdot 10^{-12}$	$(1,13 \pm 0,30) \cdot 10^{-12}$
1,6	$(0,744 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$	$(6,42 \pm 0,19) \cdot 10^{-12}$	$(0,76 \pm 0,22) \cdot 10^{-12}$
2,0	$(0,956 \pm 0,04) \cdot 10^{-4}$	$(5,54 \pm 0,17) \cdot 10^{-12}$	$(0,93 \pm 0,17) \cdot 10^{-12}$

c) Der letzte Wert, welcher die Grösse der verteilten Kapazitäten angibt, sollte hier als Konstante erscheinen; um weiter zu rechnen, können wir deshalb  $\bar{C}$  bei allen drei Werten von  $C^{(2)}$  gleichsetzen, und zwar nehmen wir den höchsten Wert  $(1,13 \cdot 10^{-12})$ , da unsere Näherung natürlich ein zu kleines  $\bar{C}$  ergeben muss.

Indem wir also setzen  $C^{(2)} = C_p + 1,13 \cdot 10^{-12}$ , berechnen wir nach (23)  $\left(\frac{d\varphi}{dC}\right)^{(2)}$  und nach (24)  $E_\varphi^{(2)}$ , was folgende Resultate ergibt:

$x$	$C^{(2)}$	$E_\varphi^{(2)}$
1,2	$(8,51 \pm 0,26) \cdot 10^{-12}$	$(1,60 \pm 0,07) \cdot 10^{-5}$
1,6	$(6,79 \pm 0,20) \cdot 10^{-12}$	$(1,52 \pm 0,06) \cdot 10^{-5}$
2,0	$(5,74 \pm 0,18) \cdot 10^{-12}$	$(1,58 \pm 0,1) \cdot 10^{-5}$

Die mittlere Empfindlichkeit ergibt sich also zu  $E_\varphi^{(2)} = (1,57 \pm 0,08) \cdot 10^{-5}$ . Die Näherungswerte konvergieren nicht sehr gut, so dass dieser Wert noch nicht als gute Näherung angesprochen werden kann. Dagegen können durch einfache Rechnung bessere Werte gewonnen werden, indem der ganze Weg von Gleichung (21) an nochmals zurückgelegt wird mit neuen Indices. Die Rechnung ergibt, dass sich  $E_\varphi^{(3)}$  und  $E_\varphi^{(4)}$  nur noch um 2% unterscheiden, so dass uns  $E_\varphi^{(4)}$  als Endresultat genügen dürfte. Es wird so

$$\underline{E_\varphi^{(4)} = (1,50 \pm 0,07) \cdot 10^{-5}}.$$

d) Die Bestimmung der Phasenempfindlichkeit bei  $C \approx 250 \text{ pF}$  erfolgte auf die in den Abschnitten 8 und 9 eingehend beschriebene Art und ergab den Wert  $E_\varphi = (1,62 \pm 0,04) \cdot 10^{-5}$ , was mit dem oben genannten Wert bei kleinen Messkapazitäten übereinstimmt, wenn man beachtet, dass die verhältnismässig grosse Abweichung der Schwierigkeit entspricht, die Apparatur bei den grossen Kapazitätsunterschieden unter den gleichen Bedingungen arbeiten zu lassen.

Es ist noch die Frage, welche Grösse die systematischen Fehler erreichen könnten. Zum Vergleich seien die erhaltenen Werte in der vierten Näherung für  $\bar{C}$  angegeben:

$x = 1,2$	$\bar{C} = 1,84$
1,6	1,36
2,0	1,49

Diese Abweichungen dürfen angesichts der Bestimmung dieser Werte aus der Differenz  $C - C_p$  nicht als zu gross betrachtet werden. Es ist sogar fraglich, ob der Gang dieser Werte mit  $x$  reell ist, da die zufälligen Fehler grösser sind als die Abweichung vom Mittelwert. Immerhin wäre ein solcher Gang zu erwarten, da ja die Behandlung der Korrektur  $\bar{C}$  als additive Konstante auch nur eine Näherungsdarstellung sein kann, indem die Zusammensetzung dieser Konstanten aus verteilten Kapazitäten und Selbstinduktionen ganz unbekannt ist und deren Einfluss auf die Phase mit der Grösse der totalen Kapazität  $C$  nicht absolut konstant bleiben muss. — Man darf deshalb annehmen, dass die systematischen Fehler die angegebenen Fehlergrenzen nicht übersteigen.

Es darf nach diesen Betrachtungen geschlossen werden, dass die optimale Kapazitätsempfindlichkeit von  $E_c = 3,5 \cdot 10^{-7} \frac{\Delta C}{C}$ /Skt. auch bei Kapazitäten bis zur Grösse von wenigen Zentimetern erreicht werden kann, dass also die Empfindlichkeit in Richtung kleinerer Kapazitätswerte nicht abnimmt. Dies ist ein grosser Vorzug dieser Methode gegenüber der Brückenmethode.

## 12. Zusammenfassung.

Die beschriebene Methode zur Messung von sehr kleinen Kapazitäts- oder Phasenwinkeländerungen mit Hilfe einer Koinzidenzschaltung erlaubt die Ausführung solcher Messungen bei Tonfrequenz mit einer Empfindlichkeit von

$$E_c = 3,5 \cdot 10^{-7} \frac{\Delta C}{C}$$

oder

$$E_\varphi = 1,8 \cdot 10^{-7} \Delta \varphi$$

Die Methode bedeutet also in der vorliegenden Ausführung gegenüber der Brückenmethode keine wesentliche Verbesserung, solange die Messkapazitäten in der Grössenordnung 100 pF und darüber liegen. Dagegen bleibt die oben angegebene Empfindlichkeit auch für Kapazitäten von wenigen pF erhalten, was gegenüber der Brückenmethode einen wesentlichen Fortschritt bedeutet. Der Nachteil dieser Methode liegt darin, dass ein und dieselbe Schaltung nur Messungen in einem kleinen Frequenzbereich zulässt; dies vor allem der Eigenfrequenz der Multivibratoren wegen. Immerhin bedeutet es keine Schwierigkeit, durch geeignete Änderung der Schaltelemente die Schaltung zur Aufnahme beliebiger Frequenzen zwischen 50 und 50000 Hertz zu modifizieren.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. EDGAR MEYER, möchte ich meinen Dank aussprechen für die Unterstützung dieser Arbeit durch seine wertvollen Anregungen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

# Zur Kristallitgrösse dünner Antimonschichten

von W. Lotmar.

(3. VII. 1947.)

Vor einiger Zeit wurde hier über polarisationsoptische Befunde an im Vakuum aufgedampften Antimonschichten von einigen hundert Å Dicke berichtet<sup>1)</sup>. Ausser einer makroskopischen Sphäritstruktur der Kristallite war noch eine „Körnung“ von der Grössenordnung  $10 \mu$  gefunden worden. Diese Körner wurden als mehr oder weniger einheitliche Kristallite angesprochen, was durch die Rauigkeit der Interferenzbögen von Elektronenbeugungsaufnahmen gestützt erschien.

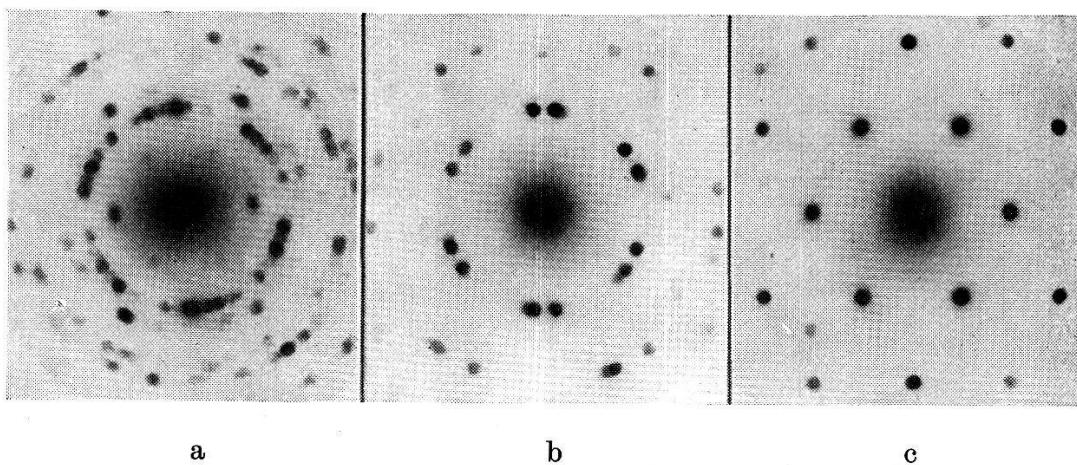


Fig. 1.

Diese Vermutung konnte nun durch neue Beugungsaufnahmen mit wesentlich kleinerem Strahldurchmesser, welche durch Umbau der verwendeten Apparatur möglich wurden, noch besser gesichert werden. Während nämlich der Strahldurchmesser am Ort des Präparates bei den früheren Aufnahmen etwa  $300 \mu$  betrug, war er bei den neuen nur etwa  $30 \mu$ . Die Anordnung war dabei derart, dass durch eine Elektronenlinse die Kathode verkleinert auf das Präparat und gleichzeitig eine Blende vergrössert auf den Leuchtschirm abgebildet wurde<sup>2)</sup>. Die Beugungsflecke sind dann ebenfalls Bilder dieser Blende.

Die Erwartung, dass durch einen Strahldurchmesser von  $30 \mu$  nur noch wenige Kristallite erfasst würden, bestätigte sich nun vollkommen, wie aus den Abbildungen 1a—c hervorgeht. Diese