

**Zeitschrift:** Helvetica Physica Acta  
**Band:** 20 (1947)  
**Heft:** III

**Artikel:** Die Ausbreitung der gedämpften H<sub>0,m</sub>-Welle in der Umgebung der Grenzfrequenz  
**Autor:** Käch, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-111807>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die Ausbreitung der gedämpften $H_{0,m}$ -Welle in der Umgebung der Grenzfrequenz

von A. Käch.

(Brown, Boveri & Cie., Baden, Schweiz.)

(3. IV. 1947)

Die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen im metallischen Hohlleiter ist in der Literatur schon umfassend beschrieben worden. Die Angaben sind jedoch lückenhaft, sobald die Rohrleitungsverluste in die Rechnung einbezogen werden. In diesem Fall wird das Verhalten lediglich unterhalb und oberhalb der Grenzfrequenz erklärt, während die Aussagen über die Wellenausbreitung im unmittelbaren Grenzgebiet durchwegs empirischen Charakter haben\*).

## Inhalt.

Es erfolgt die ausführliche Berechnung von Ausbreitung und Dämpfung der  $H_{0,m}$ -Welle (elektrisches Querfeld, magnetisches Längsfeld) im rechteckigen Wellenleiter mit besonderer Berücksichtigung der Leitungsverluste. Die Rechnung wird in engster Anlehnung an die Verhältnisse des idealen Wellenleiters (unendliche Leitfähigkeit) im Sinne einer Störungsrechnung erster Ordnung durchgeführt. Die hervorgehenden Ausdrücke sind allgemein und gelten durchgehend im gesamten interessierenden Frequenzgebiet; insbesondere ergibt sich eine Formel für die Dämpfung bei der Grenzfrequenz des Wellenleiters. Unterhalb und oberhalb der Grenzfrequenz sind die erhaltenen Ausdrücke identisch mit den in der Literatur angegebenen.

## Einleitung.

Die Energieverluste im Metall des Wellenleiters verformen die im Idealfall vorhandene Planwelle zu einer schwach ausgeprägten Kugelwelle. Eine exakte Berechnung der Feldverteilung (Lösung nach Eigenfunktionen) ist deshalb nicht mehr möglich. Infolge der grossen Leitfähigkeit des Wellenleiters und der hohen Frequenz der Rohrwelle (kleine Eindringtiefe) lässt sich jedoch eine sehr genaue Näherung herleiten. Namentlich bewirkt die ausserordent-

\*) Vgl. Abschnitt 9. 14 in S. Ramo and J. R. Whinnery, *Fields and Waves in Modern Radio*, New York 1945, S. 373.

lich kleine Eindringtiefe eine praktisch vollständige Entkettung der eindringenden Feldkomponenten. Ferner ist die Feldverzerrung so klein, dass sie in erster Näherung als linear betrachtet werden kann.

Bei der  $H_{0,m}$ -Welle haben die durch die Leitungsverluste verursachten Störkomponenten vorwiegend die Eigenschaften einer kleinen Welle des  $E$ -Typus. Wir berücksichtigen diese zusätzlichen Felder derart, indem wir der  $H$ -Welle formal noch eine  $E$ -Welle überlagern. Die Verknüpfung der beiden ist am Rande des Wellenleiters durch den Zusammenhang der Störkomponenten im Metallinnern gegeben.

### 1. Die Feldkomponenten.

Die Herleitung erfolgt, soweit sie mit den üblichen Literaturangaben übereinstimmt, in kurzgefasster Form.

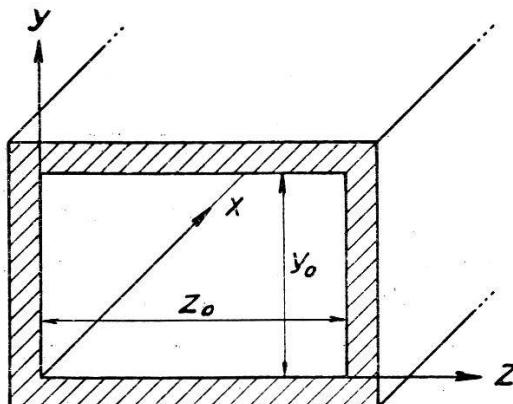


Fig. 1.

Definierende Koordinaten im Leiterhohlraum.

Für die Wellenausbreitung gelten die MAXWELLSchen Gleichungen in der allgemeinen Fassung

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{rot } E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{div } H = 0 \\ \text{div } E = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Die Feldstruktur (Planwelle) gestattet in der  $x$ -Richtung bei gleichzeitigem Übergang zum stationären Zustand den allgemeinen Ansatz

$$H = \mathfrak{H} e^{j\omega t - \gamma x}; \quad E = \mathfrak{E} e^{j\omega t - \gamma x}. \quad (2)$$

Mit Bezug auf die in Fig. 1 definierten Koordinaten gelten mithin für die Feldkomponenten der Rohrwelle die sechs Differentialgleichungen.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \mathfrak{E}_x \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} + \gamma \mathfrak{H}_z = (\sigma + j\omega \varepsilon) \mathfrak{E}_y \\ -\gamma \mathfrak{H}_y - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \mathfrak{E}_z \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} = -j\omega \mu \mathfrak{H}_x \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} + \gamma \mathfrak{E}_z = -j\omega \mu \mathfrak{H}_y \\ \gamma \mathfrak{E}_y + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} = j\omega \mu \mathfrak{H}_z. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Hierin bedeuten allgemein  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  die Dielektrizitätskonstante und  $\mu = \mu_0 \mu_r$  die Permeabilität, wobei  $\varepsilon_0 = (1/36\pi) 10^{-11} \text{ F/cm}$  und  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ H/cm}$ , ferner  $\sigma$  die Leitfähigkeit in  $\text{S/cm}$ ,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\gamma$  die Fortpflanzungskonstante.

Die Auflösung dieses Gleichungssystems führt beim idealen Wellenleiter bekanntlich auf die Komponenten zweier simultaner Wellentypen, die  $H$ -Welle, charakterisiert durch  $\mathfrak{E}_x = 0$  und die  $E$ -Welle, charakterisiert durch  $\mathfrak{H}_x = 0$ . Bei endlicher Leitfähigkeit entstehen durch die ins Leitermetall eindringenden Felder zusätzlich noch weitere Komponenten, die bei der  $H$ -Welle vorwiegend die Eigenschaften einer kleinen  $E$ -Welle aufweisen, insbesondere ist  $\mathfrak{E}_x \neq 0$  (vgl. Abschnitt 2). Hierin liegt die Möglichkeit zur Erfassung der Leitungsdämpfung, wozu wir zunächst rein formal der  $H$ -Welle noch eine  $E$ -Welle überlagern. In der Rechnung nehmen wir der Einfachheit halber das Dielektrikum im Leiterhohlraum als verlustfrei (Luft) an. Im Falle eines verlustbehafteten Dielektrikums erhalten wir dann die Ausbreitungskonstante unmittelbar aus der ursprünglichen, indem wir dort an Stelle von  $j\omega \varepsilon$  einfach den Wert  $j\omega \varepsilon + \sigma = j\omega \varepsilon(1 - j \operatorname{tg} \delta)$  setzen ( $\delta$  = Verlustwinkel).

Zur Ermittlung der Feldkomponenten bestimmen wir zunächst die Funktionen von  $\mathfrak{H}_x$  und  $\mathfrak{E}_x$  im Leiterhohlraum. Sie haben den beiden unabhängigen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial z^2} = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) \mathfrak{H}_x \quad (5)$$

und

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} = -(\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) \mathfrak{E}_x \quad (6)$$

zu genügen, wie unmittelbar aus (3) und (4) nach Eliminierung der übrigen Unbekannten hervorgeht.

Die Lösung von (5) findet sich mit Hilfe des Produktansatzes

$$\mathfrak{H}_x = \overline{H} p(y) \cdot q(z),$$

worin  $p(y)$  nur eine Funktion von  $y$  und  $q(z)$  nur eine Funktion von  $z$  bedeutet. Dieser Forderung genügen die Eigenfunktionen

$$p(y) = a_1 \sin(A_1 y) + \cos(A_1 y)$$

$$q(z) = a_2 \sin(A_2 z) + \cos(A_2 z);$$

mithin ist die Lösung von der Art

$$\mathfrak{H}_x = \bar{H} \{a_1 \sin(A_1 y) + \cos(A_1 y)\} \{a_2 \sin(A_2 z) + \cos(A_2 z)\}, \quad (7)$$

worin  $a_1$ ,  $a_2$  und  $A_1$ ,  $A_2$  noch näher zu bestimmende Konstanten bedeuten.

In analoger Weise ergibt sich die Lösung von (6). Wir schreiben sie in der allgemeinen Form

$$\mathfrak{E}_x = \bar{E} \{b_1 \cos(B_1 y) - \sin(B_1 y)\} \{b_2 \cos(B_2 z) - \sin(B_2 z)\} \quad (8)$$

mit den noch unbestimmten Konstanten  $b_1$ ,  $b_2$  und  $B_1$ ,  $B_2$ . Unbekannt ist ebenfalls die Feldstärke  $\bar{E}$ ; sie wird sich später wie alle andern Konstanten aus den Randbedingungen ergeben. Vorläufig besteht einzig der Zusammenhang

$$A_1^2 + A_2^2 = B_1^2 + B_2^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon, \quad (9)$$

wie sich durch Einsetzen von (7) in (5) und (8) in (6) unschwer nachprüfen lässt.

Damit können wir auch die übrigen Komponenten angeben. Sie finden sich unmittelbar aus den Verknüpfungsgleichungen (3) und (4) zu

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_y &= -\frac{1}{k^2} \left\{ \gamma \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - j \omega \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} \right\} \\ \mathfrak{E}_y &= -\frac{1}{k^2} \left\{ \gamma \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + j \omega \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \right\} \\ \mathfrak{H}_z &= -\frac{1}{k^2} \left\{ \gamma \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} + j \omega \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} \right\} \\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{1}{k^2} \left\{ \gamma \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - j \omega \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wobei

$$k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon.$$

Setzt man weiter (7) und (8) ein, so erhält man etwas umständliche Ausdrücke von der Form (z. B. aus der ersten Gleichung von (10))

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_y &= -\frac{\gamma}{k^2} \bar{H} A_1 \{a_1 \cos(A_1 y) - \sin(A_1 y)\} \{a_2 \sin(A_2 z) + \cos(A_2 z)\} - \\ &- \frac{j \omega \varepsilon}{k^2} \bar{E} B_2 \{b_1 \cos(B_1 y) - \sin(B_1 y)\} \{b_2 \sin(B_2 z) + \cos(B_2 z)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Sie lassen sich aber sofort vereinfachen, indem wir schon hier eine Bedingung einführen, deren Notwendigkeit erst später aus der Rechnung hervorgeht. Es wird sich nämlich zeigen (Gl. (35) u. (36)), dass die Verknüpfung mit den speziellen Randbedingungen der  $H_{0,m}$ -Welle nur dann eindeutig ist, wenn die beiden Summanden (Gleichung (11)) sowohl nach  $y$  wie nach  $z$  identische Funktionen enthalten.

Es muss also sein (aus (11)):

$$\text{und } \begin{aligned} a_1 \cos(A_1 y) - \sin(A_1 y) &\equiv b_1 \cos(B_1 y) - \sin(B_1 y) \\ a_2 \sin(A_2 z) + \cos(A_2 z) &\equiv b_2 \sin(B_2 z) + \cos(B_2 z). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit unter den Konstanten die für alle vier Ausdrücke von (10) gleich ausfallenden Bedingungsgleichungen

$$\text{und } \begin{aligned} B_1 &= A_1, & B_2 &= A_2 \\ b_1 &= a_1, & b_2 &= a_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Einführung von (12) in (8) ergibt nunmehr für die Komponenten im Leiterhohlraum zusammenfassend die folgende Darstellung:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \bar{H} \{a_1 \sin(A_1 y) + \cos(A_1 y)\} \{a_2 \sin(A_2 z) + \cos(A_2 z)\} \\ \mathfrak{E}_x &= \bar{E} \{a_1 \cos(A_1 y) - \sin(A_1 y)\} \{a_2 \cos(A_2 z) - \sin(A_2 z)\} \\ \mathfrak{H}_y &= -\frac{\gamma A_1 \bar{H} + j \omega \mu \epsilon A_2 \bar{E}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \{a_1 \cos(A_1 y) - \sin(A_1 y)\} \{a_2 \sin(A_2 z) + \cos(A_2 z)\} \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{\gamma A_1 \bar{E} - j \omega \mu A_2 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \{a_1 \sin(A_1 y) + \cos(A_1 y)\} \{a_2 \cos(A_2 z) - \sin(A_2 z)\} \\ \mathfrak{H}_z &= -\frac{\gamma A_2 \bar{H} - j \omega \mu \epsilon A_1 \bar{E}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \{a_1 \sin(A_1 y) + \cos(A_1 y)\} \{a_2 \cos(A_2 z) - \sin(A_2 z)\} \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{\gamma A_2 \bar{E} + j \omega \mu A_1 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \{a_1 \cos(A_1 y) - \sin(A_1 y)\} \{a_2 \sin(A_2 z) + \cos(A_2 z)\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die hierin vorkommenden Konstanten müssen nun durch Einfügen der Randbedingungen derart bestimmt werden, dass die Formeln im Falle unendlicher Leitfähigkeit übergehen in die bekannten Ausdrücke der  $H_{0,m}$ -Welle des idealen Wellenleiters zu

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= \bar{H} \cos\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{j \omega \mu \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{m\pi}{z_0} \sin\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \\ \mathfrak{H}_z &= \frac{\gamma \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{m\pi}{z_0} \sin\left(\frac{m\pi}{z_0} z\right) \\ \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{H}_y = \mathfrak{E}_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Bedingungen dieses Grenzzustandes sind, wie der Vergleich von Gleichung (13) mit (14) zeigt, somit charakterisiert durch

$$\begin{aligned} \bar{E} = 0; \quad & a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \\ & A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{m\pi}{z_0}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (15)$$

Der Problemstellung gemäss können an Stelle von Gleichung (14) natürlich auch die Komponenten der  $H_{n,0}$ -Welle angesetzt werden; dies bedeutet aber lediglich ein Austausch von  $m$  durch  $n$  und  $z_0$  durch  $y_0$ , was im Prinzip nichts Neues bringt.

## 2. Die Randbedingungen.

Über die von der Rohrwelle im Leiter induzierten Feldkomponenten orientiert anschaulich Fig. 2 am Beispiel der  $H_{0,1}$ -Welle. Dabei sind die Systemgrössen im Leiterhohlraum mit dem Index 1,

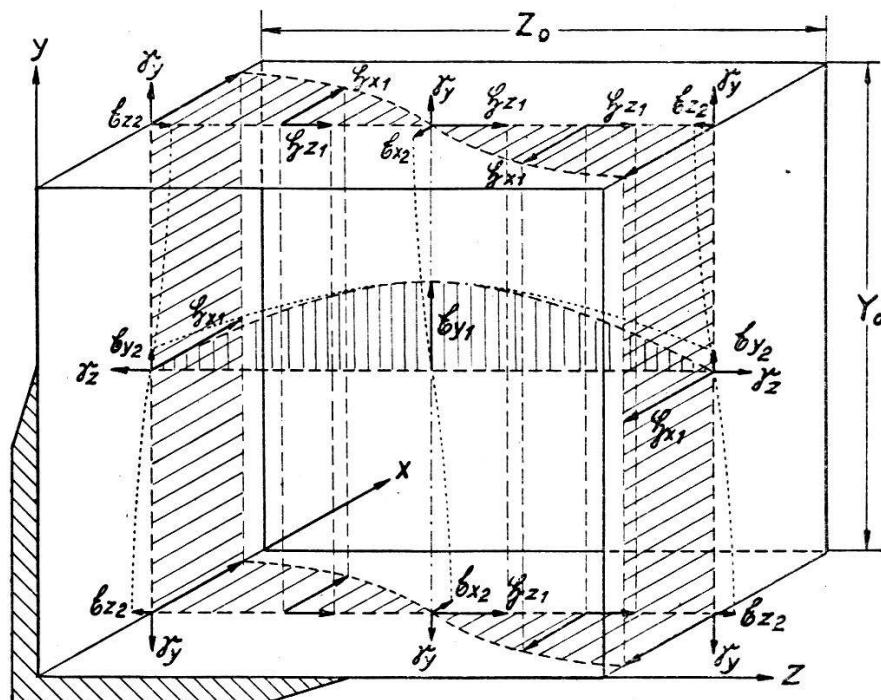


Fig. 2.

Die Feldstruktur der  $H_{0,1}$ -Welle im verlustbehafteten Hohlleiter.

diejenigen im Leitermetall mit dem Index 2 gekennzeichnet. Von den im Idealfall vorhandenen drei Komponenten  $\mathfrak{H}_{x_1}$ ,  $\mathfrak{H}_{z_1}$  und  $\mathfrak{E}_{y_1}$  (Felder strichliert eingezeichnet) erzeugen die beiden ersten in den Rohrwandungen die Feldstärken  $\mathfrak{E}_{x_2}$ ,  $\mathfrak{E}_{y_2}$  und  $\mathfrak{E}_{z_2}$ , die ihrerseits entsprechende Feldveränderungen im Leiterhohlraum (punktiert eingezeichnet) zur Folge haben. Die Komponente  $\mathfrak{E}_{y_1}$  bewirkt auf Grund der Kontinuität des Verschiebungsstromes eine elektrische

Feldstärke senkrecht zur Wandebene, die aber infolge des enormen Unterschiedes zwischen den dynamischen Leitfähigkeiten der beiden Medien vernachlässigbar klein ist.  $\mathfrak{G}_y$  und  $\mathfrak{G}_z$  sind die im Leitermetall absorbierten Energieverluste.

Diese Betrachtung zeigt, dass in der Grenzschicht der beiden Medien in erster Näherung nur Tangentialkomponenten auftreten. Im Falle der  $H_{0,m}$ -Welle sind dies die Primärkomponenten  $\mathfrak{H}_{x_1}$  und  $\mathfrak{H}_{z_1}$  und die in den Leiterwandungen induzierten Sekundärkomponenten  $\mathfrak{E}_{x_2}$ ,  $\mathfrak{E}_{y_2}$  und  $\mathfrak{E}_{z_2}$ . Über die Grösse  $\mathfrak{H}_y$  lässt sich im obigen Sinne nichts aussagen; sie existiert erst in zweiter Ordnung und kann daher vernachlässigt werden.

Beiläufig sei noch erwähnt, dass später, bei der Einführung der Randbedingungen, der Nullsetzung von  $\mathfrak{H}_y$  ( $\mathfrak{H}_z$  im Falle der  $H_{n,0}$ -Welle) eine eminente Bedeutung zukommt; erst diese Relation ermöglicht die eindeutige Bestimmung der früher eingeführten Konstanten und damit die Lösung des Problems überhaupt.

Die nachstehende Herleitung der Randbedingungen erfolgt ohne Beschränkung auf eine bestimmte Wellentype.

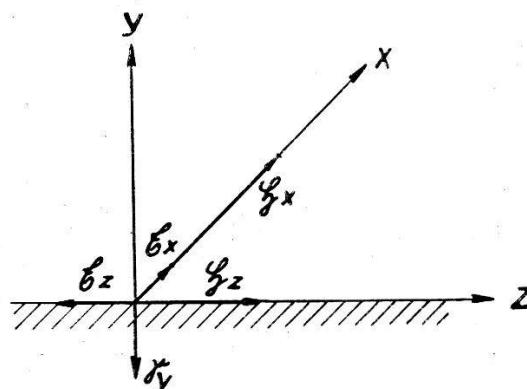


Fig. 3.

Auf Grund der Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponenten an Grenzflächen gelten für die Randkomponenten der Felder in den beiden Medien die Beziehungen

$$\mathfrak{H}_2/\text{Rand} = \mathfrak{H}_1/\text{Rand} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_1/\text{Rand} = \mathfrak{E}_2/\text{Rand}. \quad (16)$$

Der Zusammenhang unter den Randkomponenten im Leitermetall ist grundsätzlich durch die Gleichungen (3) und (4) gegeben. Die geschlossene Auswertung des Gleichungssystems ist jedoch aus den in der Einleitung dargelegten Gründen nicht möglich. Zu einer sehr genauen Näherung gelangen wir aber im Hinblick auf die außerordentlich kleine Eindringtiefe der Rohrwellen. Dies besagt offensichtlich, dass die räumliche Feldänderung in Richtung der Metalltiefe bedeutend grösser sein muss, als diejenige parallel zur Leiter-

oberfläche. Wir dürfen deshalb auf der linken Seite der Gleichungen (3) und (4) in erster Näherung sämtliche Glieder mit Ableitungen in Richtung der Metallocberfläche vernachlässigen. Die sechs Gleichungen reduzieren sich dann auf vier, die sich weiter in zwei unabhängige Systeme aufteilen lassen.

Wir berechnen zunächst die Feldstruktur in der unteren und oberen Wand des Wellenleiters. Die Lage der Randkomponenten ist für  $y = 0$  in Fig. 3 dargestellt. Aus Gleichung (3) und (4) ergeben sich, wenn wir nur Feldänderungen nach  $y$  (Richtung Metalltiefe) berücksichtigen, die folgenden Feldgleichungen ( $\sigma_2 \gg \omega \varepsilon_2$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_{z_2}}{\partial y} &= \sigma_2 \mathfrak{E}_{x_2} \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}_{x_2}}{\partial y} &= \sigma_2 \mathfrak{E}_{z_2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{E}_{z_2}}{\partial y} &= -j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{x_2} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_{x_2}}{\partial y} &= j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{z_2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Das Bestehen dieses Gleichungssystems fordert zwangsläufig die Aufteilung in die beiden unabhängigen Gleichungspaare

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_{z_2}}{\partial y} &= \sigma_2 \mathfrak{E}_{x_2} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_{x_2}}{\partial y} &= j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{z_2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} -\frac{\partial \mathfrak{H}_{x_2}}{\partial y} &= \sigma_2 \mathfrak{E}_{z_2} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_{z_2}}{\partial y} &= -j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{x_2}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Zur Auflösung der Systeme (19) und (20) machen wir für die untere Metallwand den allgemeinen Ansatz ( $\delta$  = Ausbreitungskonstante Richtung Metalltiefe)

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_{2/y=0} e^{\delta y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_{2/y=0} e^{\delta y}, \quad (21)$$

wobei  $y$  in bezug auf die Lage der Koordinaten (siehe Fig. 1) negativ zu nehmen ist. Durch Einführen von (21) erhält man aus (19) die Bestimmungsgleichungen

$$\delta \mathfrak{H}_{z_2/y=0} = \sigma_2 \mathfrak{E}_{x_2/y=0} \quad \text{und} \quad \delta \mathfrak{E}_{x_2/y=0} = j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{z_2/y=0} \quad (22)$$

und hieraus nach Eliminierung des Verhältnisses  $\mathfrak{E}_{x_2}/\mathfrak{H}_{z_2}$  die Ausbreitungskonstante zu  $\delta = \sqrt{j \omega \mu_2 \sigma_2}$ . Der gleiche Wert findet sich auch aus den Bestimmungsgleichungen von (20), wonach

$$-\delta \mathfrak{H}_{x_2/y=0} = \sigma_2 \mathfrak{E}_{z_2/y=0} \quad \text{und} \quad \delta \mathfrak{E}_{z_2/y=0} = -j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{x_2/y=0}. \quad (23)$$

Damit ist der Zusammenhang unter den Randkomponenten in der unteren Metallwand aus (22) und (23) bestimmt durch

$$\mathfrak{E}_{x_2/y=0} = \mathfrak{H}_{z_2/y=0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_{z_2/y=0} = -\mathfrak{H}_{x_2/y=0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}}. \quad (24)$$

Das nämliche Vorgehen ergibt aus (19) und (20) die Randwertgleichungen der oberen Leiterwandung mit Hilfe des Ansatzes ( $y$  positiv)

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2 /_{y=y_0} e^{-\delta y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_2 /_{y=y_0} e^{-\delta y}. \quad (25)$$

Man erhält nach kurzer Zwischenrechnung

$$\mathfrak{E}_{x_2} /_{y=y_0} = -\mathfrak{H}_{z_2} /_{y=y_0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_{z_2} /_{y=y_0} = \mathfrak{H}_{x_2} /_{y=y_0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}}. \quad (26)$$

Berücksichtigen wir in Gleichung (3) und (4) nur Feldänderungen nach der  $z$ -Richtung, so ergeben sich die Feldgleichungen in den beiden Seitenwänden, woraus unmittelbar die simultanen Gleichungspaare

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \mathfrak{H}_{y_2}}{\partial z} &= \sigma_2 \mathfrak{E}_{x_2} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_{x_2}}{\partial z} &= -j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{y_2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_{x_2}}{\partial z} &= \sigma_2 \mathfrak{E}_{y_2} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_{y_2}}{\partial z} &= j \omega \mu_2 \mathfrak{H}_{x_2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

hervorgehen. Fig. 4 zeigt die Lage der Randkomponenten für  $z = 0$ .

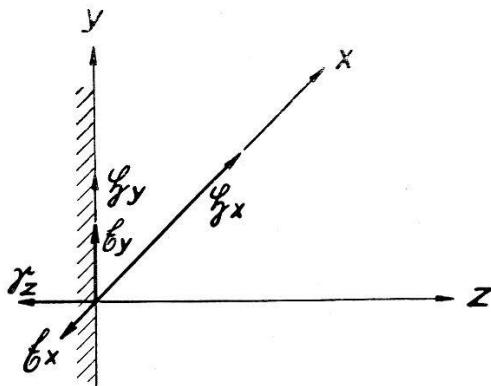


Fig. 4.

Die Auflösung von (27) und (28) ergibt mit Ansätzen analog (21) und (25) für die vertikalen Wände des Wellenleiters schliesslich die Randbedingungen:

$$\mathfrak{E}_{x_2} /_{z=0} = -\mathfrak{H}_{y_2} /_{z=0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}}, \quad \mathfrak{E}_{y_2} /_{z=0} = \mathfrak{H}_{x_2} /_{z=0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}} \quad (29)$$

$$\mathfrak{E}_{x_2} /_{z=z_0} = \mathfrak{H}_{y_2} /_{z=z_0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}}, \quad \mathfrak{E}_{y_2} /_{z=z_0} = -\mathfrak{H}_{x_2} /_{z=z_0} \sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}}. \quad (30)$$

### 3. Die Einführung der Randbedingungen.

Im Falle der  $H_{0,m}$ -Welle erhalten wir aus den Gleichungen (24), (26), (29b) und (30b) mit Berücksichtigung von (16) nunmehr die folgenden Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_{x_1} \Big|_{y=0} &= \mathfrak{H}_{z_1} \Big|_{y=0} \mathfrak{z}_2 \\ \mathfrak{E}_{y_1} \Big|_{z=0} &= \mathfrak{H}_{x_1} \Big|_{z=0} \mathfrak{z}_2 \\ \mathfrak{E}_{z_1} \Big|_{y=0} &= -\mathfrak{H}_{x_1} \Big|_{y=0} \mathfrak{z}_2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_{x_1} \Big|_{y=y_0} &= -\mathfrak{H}_{z_1} \Big|_{y=y_0} \mathfrak{z}_2 \\ \mathfrak{E}_{y_1} \Big|_{z=z_0} &= -\mathfrak{H}_{x_1} \Big|_{z=z_0} \mathfrak{z}_2 \\ \mathfrak{E}_{z_1} \Big|_{y=y_0} &= \mathfrak{H}_{x_1} \Big|_{y=y_0} \mathfrak{z}_2. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{j \omega \mu_2}{\sigma_2}} = \mathfrak{z}_2 \quad (33)$$

gesetzt, entsprechend dem Wellenwiderstand im Leitermetall. An Stelle der Gleichungen (29a) und (30a) tritt hier, da  $\mathfrak{H}_y$  erst in zweiter Ordnung existiert (siehe Abschnitt 2), die weitere Forderung

$$\mathfrak{H}_{y_1} = 0, \quad (34)$$

unabhängig von  $y$  und  $z$  (vgl. den Idealfall Gleichung (14)).

Die in den Gleichungen (31) und (32) auftretenden Randwerte bestimmen wir nun aus Gleichung (13). Ihre Einführung in (31) ergibt die Beziehungen\*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma A_2 \bar{H} - j \omega \epsilon_1 A_1 \bar{E}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} \mathfrak{z}_2 &= -\bar{E} a_1 \\ \frac{\gamma A_1 \bar{E} - j \omega \mu_1 A_2 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} a_2 &= \bar{H} \mathfrak{z}_2 \\ \frac{\gamma A_2 \bar{E} + j \omega \mu_1 A_1 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} a_1 &= -\bar{H} \mathfrak{z}_2, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

analog aus (32)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma A_2 \bar{H} - j \omega \epsilon_1 A_1 \bar{E}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} \mathfrak{z}_2 \{ a_1 \sin(A_1 y_0) + \cos(A_1 y_0) \} \\ = \bar{E} \{ a_1 \cos(A_1 y_0) - \sin(A_1 y_0) \} \\ \frac{\gamma A_1 \bar{E} - j \omega \mu_1 A_2 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} \{ a_2 \cos(A_2 z_0) - \sin(A_2 z_0) \} \\ = -\bar{H} \mathfrak{z}_2 \{ a_2 \sin(A_2 z_0) + \cos(A_2 z_0) \} \\ \frac{\gamma A_2 \bar{E} + j \omega \mu_1 A_1 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} \{ a_1 \cos(A_1 y_0) - \sin(A_1 y_0) \} \\ = \bar{H} \mathfrak{z}_2 \{ a_1 \sin(A_1 y_0) + \cos(A_1 y_0) \}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

\*) Hierbei erkennt man nun die Notwendigkeit der Bedingungsgleichung (12) denn ohne diese würden sich die orthogonalen Funktionen nicht wegheben und damit eine eindeutige Lösung verunmöglichen; m. a. W., die Randbedingungen müssen für jeden Punkt der Metalloberfläche identisch erfüllt sein.

Die Bedingung (34) liefert aus (13) unmittelbar den Zusammenhang

$$\gamma A_1 \bar{H} + j\omega \varepsilon_1 A_2 \bar{E} = 0. \quad (37)$$

Zur Ermittlung der Gleichungskonstanten müssen wir noch in (36) eine Vereinfachung vornehmen.

Entsprechend Gleichung (15) ist im idealen Fall  $A_1 = 0$  und  $A_2 = m\pi/z_0$ . Bei endlicher Leitfähigkeit muss sich also  $A_1$  um einen sehr kleinen Betrag von 0 unterscheiden, ebenso  $A_2$  um einen sehr kleinen Betrag von  $m\pi/z_0$ . Wir machen deshalb den Ansatz

$$A_1 y_0 = \alpha \quad \text{und} \quad A_2 z_0 = m\pi + \beta \quad (m = 1, 2, 3\dots),$$

wobei  $\alpha, \beta \ll 1$ , womit die trigonometrischen Funktionen in (36) mit grosser Näherung durch ihre Argumente  $\alpha$  und  $\beta$  ausgedrückt werden können. Es folgt hiefür

$$\sin(A_1 y_0) = \sin \alpha \cong \alpha = A_1 y_0$$

$$\cos(A_1 y_0) = \cos \alpha \cong 1$$

$$\sin(A_2 z_0) = \sin(m\pi + \beta) \cong (-1)^m \beta = (-1)^m (A_2 z_0 - m\pi)$$

$$\cos(A_2 z_0) = \cos(m\pi + \beta) \cong (-1)^m.$$

Nach Gleichung (15) sind auch  $a_1$  und  $a_2 \ll 1$ , also ist angenähert

$$1 + a_1 A_1 y_0 \cong 1, \quad 1 + a_2 (A_2 z_0 - m\pi) \cong 1.$$

Mit diesen Vereinfachungen geht (36) schliesslich über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma A_2 \bar{H} - j\omega \varepsilon_1 A_1 \bar{E}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1} \mathfrak{z}_2 &= \bar{E} (a_1 - A_1 y_0) \\ \frac{\gamma A_1 \bar{E} - j\omega \mu_1 A_2 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1} \{a_2 - (A_2 z_0 - m\pi)\} &= -\bar{H} \mathfrak{z}_2 \\ \frac{\gamma A_2 \bar{E} + j\omega \mu_1 A_1 \bar{H}}{\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1} (a_1 - A_1 y_0) &= \bar{H} \mathfrak{z}_2. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Das scheinbar überbestimmte System der Gleichungen (35), (37) und (38) muss nach den fünf Unbekannten  $\bar{E}$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  und  $a_1$ ,  $a_2$  nun derart aufgelöst werden, dass bei der Auswertung gleichzeitig einzelne Gleichungen identisch in einander übergehen und mithin die Zahl der Gleichungen schneller abnimmt als diejenige der Unbekannten.

Zunächst ergibt der Vergleich der korrespondierenden Ausdrücke in (35) und (38) die Beziehungen (womit die beiden Systeme identisch werden)

$$a_1 = \frac{1}{2} A_1 y_0 \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{1}{2} (A_2 z_0 - m\pi). \quad (39)$$

Führen wir ferner aus (37)

$$\bar{E} = -\frac{\gamma}{j\omega\epsilon_1} \frac{A_1}{A_2} \bar{H}$$

in (35) ein, so reduzieren sich die drei Gleichungen mit Berücksichtigung von Gleichung (9) auf zwei. Hieraus folgen wegen

$$\begin{aligned} \gamma^2 A_1^2 - \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 A_2^2 &= -(\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 - A_1^2) (\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1) \cong \\ &\quad -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 (\gamma^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1) \end{aligned}$$

die weiteren Beziehungen

$$a_1 = \frac{j\omega\epsilon_1}{A_1} \mathfrak{z}_2 \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{A_2}{j\omega\mu_1} \mathfrak{z}_2. \quad (40)$$

Aus (39) und (40) finden wir endlich die besonders interessierenden Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  in der Form

$$A_1^2 = 2 \mathfrak{z}_2 \frac{j\omega\epsilon_1}{y_0} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{m\pi}{z_0 + \frac{2\mathfrak{z}_2}{j\omega\mu_1}}. \quad (41)$$

Dies sind die gesuchten Lösungen der Gleichungssysteme (35) und (38), wie sich zusammen mit (39) und (40) unschwer verifizieren lässt. Ferner zeigt die Kontrolle, dass im Falle unendlicher Leitfähigkeit, oder nach Gleichung (33) für  $\mathfrak{z}_2 \rightarrow 0$ , die gefundenen Gleichungskonstanten in der Tat in den durch Gleichung (15) beschriebenen Grenzzustand übergehen.

#### 4. Die Ausbreitungskonstante.

Sie ergibt sich unmittelbar aus (9), wonach

$$\gamma^2 = A_1^2 + A_2^2 - \omega^2 \mu_1 \epsilon_1,$$

durch Einsetzen von Gleichung (41). Schreibt man wegen  $\left| \frac{2\mathfrak{z}_2}{j\omega\mu_1 z_0} \right| \ll 1$

$$A_2^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{z_0}\right)^2}{\left(1 + \frac{2\mathfrak{z}_2}{j\omega\mu_1 z_0}\right)^2} \cong \left(\frac{m\pi}{z_0}\right)^2 \left(1 - \frac{4\mathfrak{z}_2}{j\omega\mu_1 z_0}\right),$$

so folgt hiefür mit  $\mathfrak{z}_2$  aus (33) die Gleichung

$$\gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{z_0}\right)^2 - \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 - 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\omega^2 \mu_1 \epsilon_1}{y_0} + \left(\frac{m\pi}{z_0}\right)^2 \frac{2}{z_0}}{\sqrt{j\omega\mu_2\sigma_2}}. \quad (42)$$

Die Einführung der Grenzfrequenz, definiert durch

$$f_{0,m} = \frac{m}{2z_0\sqrt{\mu_1\epsilon_1}} = \frac{m}{2z_0} \frac{v}{\sqrt{\mu_{r_1}\epsilon_{r_1}}} \quad (v = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}), \quad \text{und} \quad \frac{f}{f_{0,m}} = \nu$$

liefert für die Ausbreitungskonstante der  $H_{0,m}$ -Welle im verlustfreien Dielektrikum schliesslich die Formel

$$\gamma = \frac{m\pi}{z_0} \sqrt{1 - \nu^2 - (1 - j) \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\nu^2}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi \nu f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}}}. \quad (43)$$

Das additive dritte Glied unter der Wurzel zeigt deutlich den Einfluss der endlichen Leitfähigkeit. Im besonderen folgt für die Grenzfrequenz  $f = f_{0,m}$  ( $\nu = 1$ )

$$\gamma_{0,m} = j \frac{m\pi}{z_0} \sqrt{(1 - j) \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{1}{y_0} + \frac{2}{z_0} \right)}{\sqrt{\pi f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}}}. \quad (44)$$

Für  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  geht (43) über in die bekannte Formel des idealen Wellenleiters.

Wir wollen noch den Ausdruck für das verlustbehaftete Dielektrikum beifügen, wozu wir nach Abschnitt 1 in Gleichung (42) an Stelle von  $j\omega\epsilon_1$  einfach den Wert  $j\omega\epsilon_1 + \sigma_1 = j\omega\epsilon_1(1 - j \operatorname{tg} \delta)$  ( $\delta$  = Verlustwinkel) zu setzen haben. Man erhält nach einiger Zwischenrechnung die vollständige Darstellung

$$\gamma = \frac{m\pi}{z_0} \sqrt{1 - \nu^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\nu^2}{y_0} (1 - \operatorname{tg} \delta) + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi \nu f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} + j \left\{ \nu^2 \operatorname{tg} \delta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\nu^2}{y_0} (1 + \operatorname{tg} \delta) + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi \nu f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} \right\}} \quad (45)$$

und im speziellen für  $f = f_{0,m}$  ( $\nu = 1$ )

$$\gamma_{0,m} = j \frac{m\pi}{z_0} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{1 - \operatorname{tg} \delta}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} - j \left\{ \operatorname{tg} \delta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{1 + \operatorname{tg} \delta}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} \right\}}. \quad (46)$$

### 5. Die Dämpfungskonstante.

Wir beschränken uns hier auf den praktisch meist vorkommenden Fall des Dielektrikums aus Luft ( $\epsilon_r = \mu_r = 1$ ,  $\delta = 0$ ). Die Aufteilung von Gleichung (43) in Real- und Imaginärteil ergibt für die Leitungsdämpfung der  $H_{0,m}$ -Welle den Ausdruck

$$\beta = \frac{m\pi}{z_0 \sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left\{ 1 - \nu^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\nu^2}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi \nu f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\nu^2}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi \nu f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} \right\}^2}} + 1 - \nu^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\nu^2}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi \nu f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} \text{ Np/cm}, \quad (47)$$

gültig für  $0 < f < \infty$ , wobei  $f_{0,m} = (m/2z_0)v$ . Bei der Grenzfrequenz  $f = f_{0,m}$  ( $v = 1$ ) vereinfacht sich die Formel auf den Wert

$$\beta_{0,m} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \frac{m\pi}{z_0} \sqrt{\frac{\frac{1}{\mu_2} + \frac{2}{z_0}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{y_0}{\sqrt{\pi f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}}} \text{ Np/cm}}. \quad (48)$$

Der aus Gleichung (47) hervorgehende Dämpfungsverlauf ist in Fig. 5 an dem Beispiel der  $H_{0,1}$ -Welle eines Kupferrohres von 2000 MHz Grenzfrequenz dargestellt. Darin ist  $z_0/y_0 = 3$ ,  $\mu_2 = \mu_1 = 4\pi \cdot 10^{-9}$  H/cm und  $\sigma_2 = 57 \cdot 10^4$  S/cm angenommen. Für tiefe Frequenzen nähert sich die Kurve dem konstanten Wert  $\beta = m\pi/z_0$ ,

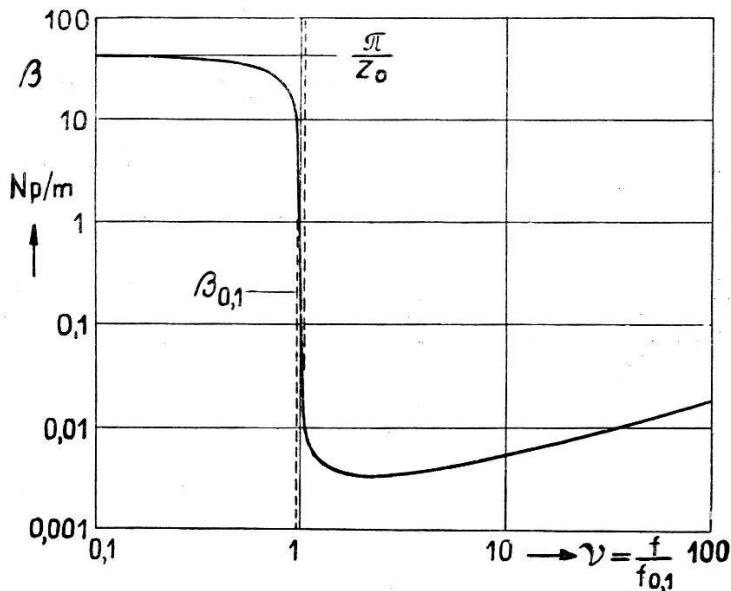


Fig. 5.

Dämpfungsverlauf der  $H_{0,1}$ -welle — nach Gl. (47), ... Näherung nach Gl. (50).

während sie für höhere Frequenzen nach Durchlaufen des Durchlassbereiches gegen unendlich strebt. In der Umgebung der Grenzfrequenz ist vor allem der filtertechnisch interessante steile Kurvenabfall bemerkenswert. Zur Abschätzung dieser Dämpfungsänderung lässt sich aus Gleichung (47) für  $f = f_{0,m}$  ( $v = 1$ ) noch relativ leicht eine Formel herleiten. Man findet nach längerer Zwischenrechnung mit grosser Näherung

$$\frac{d\beta}{df} \Big|_{f=f_{0,m}} = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{m\pi^2}{z_0 v \beta_{0,m}} = -\sqrt{\sqrt{2}-1} \frac{\pi}{v} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}}{\frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{1}{y_0} + \frac{2}{z_0} \right)}} \text{ Np/cm, Hz.} \quad (49)$$

Hieraus folgt wegen  $f_{0,m} = (m/2z_0)v$ , dass bei steigender Ordnung  $m$  die Kurvensteilheit mit  $m^{1/4}$ , die Dämpfung dagegen mit  $m^{3/4}$  zunimmt. Da die letztere für  $f \ll f_{0,m}$  proportional  $m$  ist, so ver-

bessern sich mithin die Filtereigenschaften mit  $\sqrt{m}$ ; der Gewinn ist also sehr bescheiden.

Hinsichtlich der Abmessungen des Rohrquerschnittes ergeben sich umso günstigere Verhältnisse, je grösser  $y_0$  gewählt wird, indem dadurch die Dämpfungsänderung vergrössert und die zugehörige Dämpfung gleichzeitig verkleinert wird. Bei einem gegebenen  $y_0$  ist die Kurvensteilheit für  $z_0 = 2 y_0$  ein Optimum.

Für Frequenzen wesentlich unterhalb und oberhalb der Grenzfrequenz lässt sich Gleichung (47) erheblich vereinfachen. Zu dem Zweck setzen wir

$$1 - \nu^2 = \pm p \quad \text{und} \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\frac{\nu^2}{y_0} + \frac{2}{z_0}}{\sqrt{\pi \nu f_{0,m} \mu_2 \sigma_2}} = q,$$

wobei das pos. Vorz. für  $f \ll f_{0,m}$ , das neg. Vorz. für  $f \gg f_{0,m}$  gilt. Damit folgt aus Gleichung (47)

$$\beta = \frac{m \pi}{z_0 \sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\pm p - q)^2 + q^2} \pm p - q}$$

und hieraus durch Reihenentwicklung

$$\beta_{/f \ll f_{0,m}} = \frac{m \pi}{z_0} \sqrt{p} \quad \text{und} \quad \beta_{/f \gg f_{0,m}} = \frac{m \pi}{z_0} \frac{q}{2 \sqrt{p}},$$

oder mit Rückgängigmachung der obigen Substitution und einiger Umstellung:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{m \pi}{z_0} \sqrt{1 - \nu^2} & \text{für } f \ll f_{0,m} \\ \text{und} \quad \beta &= \sqrt{\frac{2 \pi \mu_2}{v \mu_1^2 \sigma_2} \frac{\sqrt{m}}{z_0^{3/2}} \frac{\frac{z_0}{2 y_0} \nu^{3/2} + \nu^{-1/2}}{\sqrt{\nu^2 - 1}}} & \text{für } f \gg f_{0,m}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Der Dämpfungsverlauf der beiden Näherungsformeln ist in Fig. 5 für die  $H_{0,1}$ -Welle dieses Beispiels gestrichelt eingezeichnet. Die erste Gleichung stimmt mit der Dämpfungsformel des idealen Wellenleiters überein; das Fehlen von  $\sigma_2$  zeigt, dass für  $f \ll f_{0,m}$  der Einfluss der Leitungsverluste äusserst gering ist, was auch zu erwarten war. Der zweite Ausdruck, gültig für  $f \gg f_{0,m}$ , ist vollständig identisch mit dem in der Literatur angegebenen. Dort wurde die Formel jedoch nach anderen Verfahren (Poynting-Methode) hergeleitet, während sie hier aus der asymptotischen Entwicklung von Gleichung (47) hervorging. Diese Übereinstimmung beweist mithin die Richtigkeit der vorstehenden Störungsrechnung.

Hinsichtlich der Größenordnung der in der Rechnung vernachlässigten Glieder zweiter und höherer Ordnung zeigt die numerische Überprüfung, dass bei Kupferleitern für Frequenzen bis  $10^4$  MHz die Zahlenwerte der obigen Formeln mit einem Fehler von höchstens  $10^{-4}$  behaftet sind, welche Genauigkeit praktisch vollauf genügt.

Es liegt in der Art des Verfahrens, dass sich das obige Vorgehen zur Berechnung der Ausbreitungskonstante nur auf  $H_{0,m}$ -Wellen anwenden lässt. Zur Gewinnung des allgemeinen Ausdruckes der  $H_{n,m}$ -Welle müssten mehr Freiheitsgrade und damit mehr Bestimmungsgleichungen eingeführt werden, deren Auflösung aber, wenn überhaupt möglich, nicht so einfach ausfallen dürfte.

Die vorliegende Arbeit entstand im Hochfrequenzlaboratorium der Firma Brown, Boveri & Cie., Baden, Schweiz. Den Herren Dr. H. J. von BAEYER und Dr. F. LÜDI danke ich bestens für die Überlassung des Themas und die Diskussion des Grundsätzlichen.

#### **Literaturangabe.**

R. J. SARBACHER and W. A. EDSON: „Hyper and Ultrahigh Frequency Engineering“, John Wiley & Sons, 1944. (Siehe auch das dort aufgeführte Literaturverzeichnis.)

S. RAMO and J. R. WHINNERY: „Fields and Waves in Modern Radio“, John Wiley & Sons, 1945.

R. W. P. KING, H. R. MIMNO and A. H. WING: „Transmission Lines, Antennas and Wave Guides“, McGraw-Hill, 1945.

J. KEMP: Electromagnetic Waves in Metall Tubes of Rectangular Cross-Section, Journal I. E. E., 1941, Vol. 88, Part III, p. 213.

S. KUHN: Calculation of Attenuation in Wave Guides, Journal I. E. E., March-May 1946, Vol. 93, Part III A, Nr. 4, p. 663.